BTS CHIMIE 1996

EXERCICE 1

Dans une entreprise de produits d'entretien, on envisage de distribuer gratuitement à l'occasion d'une campagne publicitaire dix mille sachets d'une nouvelle poudre à laver. On remplit les sachets à l'aide d'une machine. Pendant l'opération, on se livre au prélèvement d'un sachet de temps à autre pour en contrôler la masse. Les cinq cents sachets prélevés constituent un échantillon dont les masses en g se répartissent en 10 classes données dans le tableau suivant :

Classes	Effectifs
[141,143[	11
[143,145[	27
[145,147[	53
[147,149[	85
[149,151[	104
[151,153[	97
[153,155[	60
[155,157[	30
[157,159[	18
[159,161[	15

1. a. Calculer une valeur approchée de la moyenne m et de l'écart type s de cette série. Compte-tenu de l'erreur commise en supposant toutes les observations d'une clase au centre de celle-ci, on se contentera d'une précision de $0{,}5\,.10^{-2}$.

b. On suppose que le poids d'un sachet pris au hasard dans le stock suit une loi gaussienne de moyenne μ et d'écart type σ. Utiliser ces données pour estimer ponctuellement la moyenne μ et l'écart type σ de l'ensemble des sachets confectionnés.

2. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur la masse en grammes d'un sachet. On suppose que X suit la loi normale $\mathcal{N}(150; 4)$.

Calculer les probabilités suivantes : a. $P(X < 148)$; b. $P(147 < X < 157)$.

3. Pour livrer les sachets à une agence chargée de la distribution, on conditionne ceux-ci sous la forme de caissons de 120 sachets. Soit Y la variable aléatoire qui à tout caisson de 120 sachets associe la moyenne des masses en grammes d'un sachet de poudre.

a. Justifier que Y suit la loi normale $\mathcal{N}\left(150; \dfrac{4}{\sqrt{120}}\right)$.

b. Trouver a pour que l'on ait : $P(150 - a < Y < 150 + a) = 0{,}95$.

EXERCICE 2

Le but du problème est l'étude de la désintégration d'un corps radioactif, le Thorium^{227}, qui donne du Radium^{223}, lequel se désintègre à son tour en donnant du Radon^{219}.
Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1

1. Soit N_0 le nombre d'atomes de Thorium à l'instant $t = 0$, N_1 le nombre d'atomes de Thorium un jour après, N_k le nombre d'atomes de Thorium k jours après (k entier).

On sait que le nombre d'atomes de Thorium diminue de 3,7 % par jour.

a. Donner l'expression de N_1 en fonction de N_0, puis N_{k+1} en fonction de N_k.

b. En déduire la nature de la suite (N_k) et l'expression de N_k en fonction de N_0 et k. Déterminer alors à 10^{-4} près le coefficient a tel que $N_k = N_0.e^{ak}$.

2. On considère la fonction N définie sur $[0, +\infty[$ par : $N(t) = N_0.e^{-0{,}038t}$.

On admet que $N(t)$ représente le nombre d'atomes de Thorium à l'instant t (l'unité de temps est le jour).

a. Étudier la limite de N en $+\infty$.

b. Étudier les variations de N et donner son tableau de variation.

Partie 2

À l'instant $t = 0$, on isole N_0 atomes de Thorium. On note $R(t)$ le nombre d'atomes de Radium à l'instant t, pour t dans l'intervalle $[0, +\infty[$. À l'instant $t = 0$, il n'y a aucun atome de Radium. On admet que la fonction R est la solution sur $[0, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' + 0{,}062y = 0{,}038\, N_0.e^{-0{,}038t}$$

qui vérifie la condition initiale $R(0) = 0$.

1. a. Montrer que la fonction y_1 définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$y_1(t) = \left(\frac{19}{12}\right) N_0.e^{-0{,}038t}$$

est une solution de (E).

b. Déterminer dans $[0, +\infty[$ la solution générale y_0 de l'équation sans second membre associée à l'équation (E).

c. En déduire la solution générale y de (E).

d. Déterminer alors la fonction R.

2. On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(t) = e^{-0{,}038t} - e^{-0{,}062t}$$

a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Montrer que $f'(t) = e^{-0{,}038t}\left[-0{,}038 + 0{,}062e^{-0{,}024t}\right]$.

c. Donner la valeur exacte t_0, puis une valeur décimale approchée à 10^{-1} près de la solution de l'équation $f'(t) = 0$.

Justifier alors le signe de $f'(t)$ suivant les valeurs de t.

d. Donner le tableau de variation de f.

3. Donner l'expression de $R(t)$ en fonction de $f(t)$.
En déduire le tableau de variation de R.