BTS CHIMIE 2007

Exercice 1 (8 points)
Deux chaînes de production C_A et C_B d'un laboratoire pharmaceutique fabriquent, en très grande quantité, le comprimé d'un nouveau médicament dont la masse théorique de vente est de 900 mg. Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1^{o}On note X_A (respectivement X_B) la variable aléatoire qui, à un comprimé pris au hasard dans la production de la chaîne C_A (respectivement C_B), associe sa masse en mg.
On sait que X_A (respectivement X_B) suit la loi normale de paramètres (m_A,σ_A) (respectivement (m_B,σ_B)). Un comprimé est jugé conforme au cahier des charges si sa masse est comprise entre 880 mg et 920 mg.

a) On donne $m_A = 896\ mg$ et $\sigma_A = 10\ mg$. Calculer, à 10^{-2} près, la probabilité qu'un comprimé pris au hasard dans C_A Soit conforme.

b) On donne $m_B = 900\ mg$. La probabilité qu'un comprimé fabriqué par C_B soit conforme est 0,97. Déterminer, à l'unité près, l'écart type σ_B.

2^o Dans la production totale, 40 % des comprimés proviennent de la chaîne C_A et 60 % de la chaîne C_B. La chaîne C_A produit 4 % de comprimés non conformes et la chaîne C_B en produit 3 %. On prélève au hasard un comprimé dans la production du laboratoire.
On note A l'événement « Le comprimé a été fabriqué par la chaîne C_A », B l'événement « Le comprimé a été fabriqué par la chaîne C_B », C l'événement « Le comprimé est conforme ».

a) À partir de l'énoncé, déterminer les probabilités des événements A et B ainsi que les probabilités conditionnelles de C sachant A et de C sachant B que l'on notera respectivement $P_A(C)$ et $P_B(C)$.

b) Calculer alors la probabilité $P(C)$ de l'événement C.

c) On prélève un comprimé au hasard dans la production et on constate qu'il est conforme. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il provienne de la chaîne C_A.

3^o Le contrôleur qualité n'étant pas satisfait de la production de la chaîne C_A , il décide de la faire régler. Après ce réglage, on teste l'hypothèse nulle $H_0 : m_A = 900Mg$, contre l'hypothèse alternative $H_1 : m_A \neq 900mg$, au seuil de risque 5 %. On désigne par $\overline{X}_A$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon non exhaustif de taille 100, associe sa masse moyenne en mg. Sous H_0, on admet que $\overline{X}_A$ suit la loi normale de paramètres $(900; 1)$.

a) Déterminer le nombre réel positif h tel que : $\quad P(900 - h \leqslant \overline{X}_A \leqslant 900 + h) = 0{,}95$

b) Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.

c) Un tirage de 100 comprimés dans la production de la chaîne C_A est effectué. La masse moyenne obtenue est $\overline{x} = 899\ mg$. Appliquer le test.

Exercice 2 - (12 points) Étude de la cinétique de deux réactions successives du 1$^{\text{er}}$ ordre.
On considère les réactions successives suivantes : $\quad A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C$
où k_1, et k_2 désignent des nombres réels strictement positifs.
On désigne par $a - x$, y et z les concentrations en mol.L^{-1} à l'instant t des produits A, B et C (t est exprimé en minutes), a désignant la concentration à l'instant $t = 0$ du produit A, seul présent au début de la réaction.
x, y et z sont des fonctions de t définies sur l'intervalle $[0, +\infty[$. D'après la conservation de la matière on a : $x = y + z$. Les lois cinétiques donnent :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k_1(a - x) & (1) \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = k_1(a - x) - k_2 y & (2) \\[2mm] z = x - y & (3) \end{cases}$$

Partie A :

1^o L'équation (1) s'écrit aussi : $x' + k_1 x = k_1 a$ (E_1)
avec k_1 nombre réel positif non nul.

a) Résoudre l'équation homogène (E_0) : $x' + k_1 x = 0$.

b) Déterminer une solution particulière $x_p(t)$ de (E_1) sous la forme d'une fonction constante.

c) En déduire la solution générale de (E_1).

d) Sachant que la solution x de (E_1) cherchée vérifie $x(0) = 0$, montrer que :

$$x(t) = a(1 - e^{-k_1 t})$$

2^o On suppose, dans cette question, que k_1 et k_2 sont des nombres réels positifs distincts.

a) Montrer que l'équation (2) équivaut à (E_2) :

$$y' + k_2 y = k_1 a e^{-k_1 t}$$

b) Résoudre l'équation homogène (E_0') : $y' + k_2 y = 0$.

c) Déterminer une solution particulière $y_p(t)$ de (E_2) sous la forme $y_p(t) = \lambda e^{-k_1 t}$ où λ est une constante réelle à déterminer.

d) En déduire la solution générale de (E_2).

e) Sachant que $y(0) = 0$, montrer que:

$$y(t) = \frac{a k_1}{k_2 - k_1}(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t})$$

3^o Donner l'expression de $z(t)$.

Partie B : Étude d'un exemple.

Cas de la réduction d'un sel mercurique :

$$Hg^{2+} \longrightarrow Hg^{+} \longrightarrow Hg$$

(en présence de H_2 sous pression constante). avec $a = 10^{-3}$ mol.L^{-1} ,$k_1 = 0{,}0283$ min^{-1} et $k_2 = 0{,}0033$ min^{-1}.

1^o Vérifier que :

$$z(t) = 10^{-3}\left(1 + 0{,}132 e^{-0.0283t} - 1{,}132 e^{-0{,}0033t}\right)$$

2^o Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} z(t)$.

3^o Déterminer la dérivée de la fonction z.

4^o Montrer que, pour tout nombre réel t strictement positif : $\qquad e^{-0{,}0283t} < e^{-0{,}0033t}$.

5^o En déduire le signe de $z'(t)$ et le sens de variation de z sur l'intervalle $[0; +\infty[$.