CHIMIE

BTS CHIMIE 1989

PROBLÈME

On considère l'équation différentielle du second ordre

$$(E) \qquad y'' + 2y' + 5y = 0$$

dans laquelle y est fonction de la variable réelle x.

1. Montrer que la fonction f définie par

$$f(x) = e^{-x} \sin 2x$$

est une solution particulière de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$.
Intégrer l'équation (E) sur $\mathbb{R}$.

2. On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
On prendra pour unité $5\,cm$ sur l'axe des abscisses et $10\,cm$ sur l'axe des ordonnées.

a) Déterminer les abscisses des points communs à (C) et à l'axe des abscisses.

b) Étudier les variations de la restriction de f à $[0,\pi]$ et dessiner soigneusement (C) sur cet intervalle.

3. On appelle A_k l'aire (en unités d'aire) du domaine limité par (C) et l'axe des abscisses et dont les points ont une abscisse dans l'intervalle $\left[k\frac{\pi}{2},(k+1)\frac{\pi}{2}\right]$, k étant un entier positif.

a) Calculer A_0, A_1, A_k. Donner une valeur approchée de A_0 à 10^{-3} près.

b) Montrer que la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison.

EXERCICE

On mesure la durée de vie dans des conditions normale d'utilisation de 100 piles électriques, et on obtient les résultats suivants :

Durée de vie *(en heures)*	Nombre de piles
$[80;100[$	2
$[100;120[$	2
$[120;140[$	16
$[140;160[$	28
$[160;180[$	30
$[180;200[$	15
$[200;220[$	5
$[220;240[$	2

1. Calculer la moyenne et l'écart-type de cette série statistique *(on prendra le centre de chaque intervalle pour les calculs)*.

2. On admet que la durée de vie d'une pile est une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne $m = 163$ et d'écart-type $\sigma = 25$.

Calculer la probabilité pour que la durée de vie d'une pile soit :
- supérieure à 180 heures,
- supérieure à 150 heures,
- inférieure à 145 heures.

BTS CHIMIE 1990

EXERCICE 1

On considère un lot de tubes à essais. À chaque tube, on asocie son diamètre et sa hauteur exprimés en millimètres. On définit ainsi deux variables aléatoires d et h.

La variable aléatoire d suit la loi normale de moyenne $\mu_d = 19{,}7$ et d'écart-type $\sigma_d = 0{,}4$.

La variable aléatoire h suit la loi normale de moyenne $\mu_h = 203$ et d'écart-type $\sigma_h = 6$.

On suppose que les variables aléatoires d et h sont **indépendantes**.

1. Calculer à 10^{-3} près la probabilité pour qu'un tube à essais ait un diamètre inférieur à $20\,mm$.

2. Calculer à 10^{-3} près la probabilité pour qu'un tube à essais ait une hauteur supérieure à $195\,mm$.

3. Des contraintes d'expérience et d'entretien imposent les conditions suivantes :

$$19 < d < 20{,}5 \;\; et \;\; 195 < h < 210$$

Quel est le pourcentage de tubes à essais utilisables?

EXERCICE 2

première partie

Lors de la dissociation thermique de l'iodure d'hydrogène à une température fixée, on montre que le taux de dissociation y de l'iodure d'hydrogène évolue en fonction du temps t (exprimé en secondes) selon une loi qui obeit à l'équation différentielle :

$$(E) \quad \frac{dy}{dt} = A(1-5y)(1+3y)$$

A étant une constante réelle strictement positive.

1. Vérifier que les fonctions constantes $y = -\frac{1}{3}$ et $y = \frac{1}{5}$ sont solutions de l'équation différentielle (E).

2. Dans la suite du problème, on cherche la solution non constante de l'équation (E), définie sur $\mathbb{R}$, et vérifiant $y(0) = 0$.

On admettra, dans les calculs, les inégalités

$$-\frac{1}{3} < y < \frac{1}{5}$$

a) Montrer que l'équation (E) peut s'écrire sous la forme :

$$\left(\frac{5}{8(1-5y)}+\frac{3}{8(1+3y)}\right)dy = Adt$$

b) Déduire de la question précédente la relation :

$$\frac{1+3y}{1-5y} = Ce^{8At}$$

où C est une constante réelle non nulle, et calculer la valeur de C correspondant à $y(0)=0$.
c) Montrer que la solution cherchée peut s'écrire :

$$y(t) = \frac{e^{8At}-1}{3+5e^{8At}}$$

Deuxième partie

1. Étudier les variations de la fonction

$$f\ :\quad x \mapsto \frac{e^x-1}{3+5e^x}$$

sur $]-\infty,+\infty[$ et les limites aux bornes de son ensemble de définition.

2. a) Écrire une équation de la tangente en O, origine du repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ à la courbe représentative C_f de la fonction f.

b) On admettra que le point de coordonnées $\left(\ln\dfrac{3}{5},-\dfrac{1}{15}\right)$ est le centre de symétrie de la courbe, et que cette courbe est située au dessous de sa tangente en O au voisinage de ce point O.

Tracer la courbe C_f, sa tangente en O et ses asymptotes dans le repère orthogonal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ avec :

$$||\vec{\imath}|| = 1\,cm \quad et \quad ||\vec{\jmath}|| = 10\,cm$$

3. Résoudre l'équation $f(x)=0{,}1$.

En prenant 2.10^{-6} pour valeur de la constante A dans la première partie, peut-on en déduire au bout de combien d'heures le taux de dissociation de l'iodure d'hydrogène atteint la valeur 0,1 ?

BTS CHIMIE 1991

EXERCICE 1
On a contrôlé le dosage d'un produit dans un mélange à la sortie d'une chaîne de conditionnement. Pour un échantillon de 100 lots de 5 kilogrammes de mélange analysés, on a obtenu les résultats suivants, où P_i représente la masse du produit exprimée en grammes et n_i l'effectif correspondant :

P_i	142	144	146	148	150	152	154	156	158	160
n_i	1	5	6	21	32	22	7	4	1	1

1. Calculer la moyenne et l'écart-type de l'échantillon.

2. Donner une estimation ponctuelle de la moyenne et de l'écart-type de la population.

3. Déterminer l'intervalle de confiance de la moyenne de la population au risque de 5 %.

4. Un lot de 5 kilogrammes de mélange est dit de qualité « extra » s'il contient entre 147 grammes et 155 grammes de produit. On admet que la variable aléatoire X qui, à un lot de 5 kilogrammes de mélange, associe la masse, exprimée en grammes, du produit dosé, suit la loi normale de moyenne $m=150$ et d'écart-type $\sigma=3$.
Calculer $P(147 \leqslant X \leqslant 155)$.
En déduire le pourcentage de qualité extra dans le produit.

EXERCICE 2
On étudie en chimie cinétique des réactions successives dont le schéma de réaction est le suivant :

$$A \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} B \xrightarrow{k_3} C$$

Les lois cinétiques sont les suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{dA}{dt} = -k_1[A]+k_2[B] \\ \dfrac{dB}{dt} = k_1[A]-(k_2+k_3)[B] \\ \dfrac{dC}{dt} = k_3[B] \end{cases}$$

$[A]$, $[B]$ et $[C]$ sont les concentrations à l'instant t des produits A, B et C (t exprimé en minutes). k_1, k_2 et k_3 sont les constantes de vitesse exprimées en min^{-1}.

Les conditions à l'instant $t=0$ sont :

$$[A]_0 = a, \quad [B]_0 = 0 \ \ et \ [C]_0 = 0$$

On note x, y, z les fonctions de la variable réelle t définies pour $t \geqslant 0$ par :

$$x = \frac{[A]}{a} \qquad y = \frac{[B]}{a} \qquad z = \frac{[C]}{a}$$

On suppose que
$k_1 = 1{,}6\,min^{-1}$, $k_2 = 0{,}15\,min^{-1}$, $k_3 = 1{,}25\,min^{-1}$.

On a donc

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -1{,}6x+0{,}15y & (1) \\ \dfrac{dy}{dt} = 1{,}6x-1{,}4y & (2) \\ \dfrac{dz}{dt} = 1{,}25y & (3) \end{cases}$$

et $x(0)=1$, $y(0)=z(0)=0$.

Première partie

1. En utilisant l'équation différentielle (1), déterminer y en fonction de x et de $\frac{dx}{dt}$. En déduire $\frac{dy}{dt}$ en fonction de $\frac{dx}{dt}$ et de $\frac{d^2x}{dt^2}$.

En reportant y et $\frac{dy}{dt}$ dans l'équation (2), établir une équation différentielle du second ordre linéaire à coefficients constants vérifiée par x.

2. Résoudre l'équation différentielle

$$(E) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0$$

où $t \geqslant 0$.

3. En utilisant la question précédente et la relation

$$y = \frac{1}{0{,}15}\frac{dx}{dt} + \frac{1{,}6}{0{,}15}x$$

montrer que x et y peuvent s'écrire sous la forme

$$x(t) = \lambda e^{-t} + \mu e^{-2t}$$

$$y(t) = 4\lambda e^{-t} - \frac{8}{3}\mu e^{-2t}$$

4. Sachant qu'en outre $x(0) = 1$ et $y(0) = 0$, calculer les réels λ et μ.

5. En utilisant les relations (1), (2) et (3), calculer

$$\frac{d}{dt}\left(x(t) + y(t) + z(t)\right)$$

et en déduire que

$$z(t) = 1 - x(t) - y(t)$$

Deuxième partie

1. Étudier le sens de variation des fonctions x, y, z définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$x(t) = 0{,}4e^{-t} + 0{,}6e^{-2t}$$

$$y(t) = 1{,}6(e^{-t} - e^{-2t})$$

$$z(t) = -2e^{-t} + e^{-2t} + 1$$

2. Représenter graphiquement les fonctions x, y, z dans un même plan rapporté au même repère orthogonal avec les unités suivantes :

$4\,cm$ pour $1\,min$ sur l'axe des abscisses,

$10\,cm$ pour 1 unité sur l'axe des ordonnées,

et $t \in [0; 4]$.

3. À quel instant le taux de formation de C atteint-il 90 % ? Quel est à ce même instant le taux de disparition du produit A ?
Interpréter graphiquement les résultats.

BTS CHIMIE 1992

EXERCICE 1

On réalise une réaction chimique autocatalytique superposée à une réaction non autocatalytique $A \longrightarrow B$.

À un certain moment de la réaction pris comme instant initial ($t = 0$), on a $[A] = a - x_0$ et $[B] = x_0$.
À l'instant t ($t > 0$), $[A] = a - x$, $[B] = x$.
I. On admet que la vitesse de réaction est donnée par la relation :

$$(\mathcal{R}) \qquad v = \frac{dx}{dt} = k\,[A][B]$$

k est une constante liée à la réaction.

1. Établir l'équation différentielle liant $\frac{dx}{dt}$, x, a et k.

2. Déterminer en fonction de a et k les coefficients α et β vérifiant

$$\frac{1}{kx(a-x)} = \frac{\alpha}{a-x} + \frac{\beta}{x}$$

3. Résoudre alors, pour x dans l'intervalle$]0,a[$, l'équation différentielle établie au 1).

II. On réalise une expérience de ce type à $20°C$, on obtient les résultats suivants, t en *minutes* et $[A]$ en $mol.l^{-1}$:

t	100	270	480	600	705	800
$[A]$	0,370	0,357	0,313	0,261	0,209	0,136

1. On donne $a = 0{,}377$. En déduire les valeurs de x.

On prend $y = \ln\left(\frac{x}{a-x}\right)$ comme variable intermédiaire.
2. Représenter dans un repère orthogonal les points de coordonnées (t_i, y_i).

3. Établir l'équation de la droite des moindres carrés $y = f(t)$ pour les valeurs de t comprises entre 100 et 800.

4. Calculer le coefficient de corrélation.
L'ajustement linéaire est-il légitime?

5. En déduire une valeur approchée de k, et une expression approchée de $x(t)$.

EXERCICE 2

On ajoute du SO_2 dans un vin pour le protéger d'une part des attaques des levures et des bactéries, d'autre part de l'oxydation.
Après embouteillage, on prélève des échantillons de 50 bouteilles sur la chaîne d'embouteillage et on dose dans chaque bouteille la concentration en SO_2 libre qui sera exprimée en $mg.l^{-1}$.
Voici les résultats du dosage du SO_2 libre dans l'échantillon $n^o 1$.

Concentration en SO_2 libre	Nombre de bouteilles
[20; 20,2[	3
[20,2; 20,4[	9
[20,4; 20,6[	20
[20,6; 20,8[	13
[20,8; 21[	5

1. Donner la moyenne m_1 et l'écart-type σ_1 de cet échantillon.

2. En calculant l'écart-type estimé de la population totale, en déduire une estimation de la concentration moyenne M en SO_2 libre dans la production par un intervalle de confiance au seuil de risque de 5 %.

3. On considère un deuxième échantillon de même taille,
- de moyenne $m_2 = 20{,}476\, mg.l^{-1}$
- d'écart-type $\sigma_2 = 0{,}206\, mg.l^{-1}$.
Au seuil de risque de 5 %, la différence observée est-elle significative ?

4. On admet que dans la production, la concentration C en SO_2 libre suit une loi de Gauss de moyenne : $20{,}5\, mg.l^{-1}$ et d'écart-type : $0{,}2\, mg.l^{-1}$.
On estime que le vin est impropre à la consommation si la concentration en SO_2 libre est supérieure à $20{,}9\, mg.l^{-1}$. Quel sera, sous ces hypothèses, le pourcentage de bouteilles impropres à la consommation ?

BTS CHIMIE 1993

EXERCICE 1 Le service qualité d'une usine pharmaceutique décide de contrôler la quantité d'acide acétylsalicylate de lysine, contenu dans les sachets produits par une machine automatique. Pour cela, il mesure la masse, en grammes, de cinquante sachets choisis au hasard.
Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Masse x_i	Effectif n_i
[0,87; 0,88[	1
[0,88; 0,89[	5
[0,89; 0,90[	7
[0,90; 0,91[	20
[0,91; 0,92[	9
[0,92; 0,93[	3
[0,93; 0,94[	3
[0,94; 0,95[	2

1. Calculer la moyenne et l'écart-type de la série statistique ainsi définie.

2. Soit X la variable aléatoire qui à tout sachet associe la masse d'acide acétylsalicylate de lysine qu'il contient. On suppose que X suit une loi normale de moyenne $m = 0{,}90$ et d'écart-type $\sigma = 0{,}015$.

2.1. Calculer, sur une production de 10 000 sachets, le nombre de sachets qui ont une masse comprise entre 0,89 et 0,91.

2.2. Déterminer l'intervalle centré en m contenant 95 % des masses de sachets.

2.3. Un réglage de la machine permet de modifier l'écart-type σ de X. Déterminer σ pour que 99 % au moins des sachets aient leur masse supérieure à $0{,}895\, g$?

EXERCICE 2
La vitesse des molécules d'un gaz peut être considérée comme une variable aléatoire dont la fonction de répartition est F définie sur $[0, +\infty[$:

$$F(x) = \int_0^x f(\nu)d\nu \ \text{ avec } \ f(\nu) = A\nu^2 e^{-B\nu^2}$$

f est une fonction dont les valeurs peuvent être déterminées expérimentalement grâce à l'appareil de Lammert (pour un gaz à une température donnée).

La première partie de l'exercice va permettre de déterminer les constantes A et B caractéristiques de la fonction f associée au mercure gazeux à la température de $373^o K$.

La deuxième partie se compose d'une étude de f et du calcul de la vitesse moyenne des molécules dans les mêmes conditions.

Ces deux parties sont indépendantes.

Première partie
Une expérience réalisée avec l'appareil de Lammert a donné les résultats suivants avec du mercure gazeux à $373^o K$:

ν	200	300	400	600	800	1000
$f(\nu)$	$4{,}1.10^{-4}$	$7{,}2.10^{-4}$	$9{,}8.10^{-4}$	$10{,}6.10^{-4}$	$6{,}7.10^{-4}$	$2{,}8.10^{-4}$

(ν est mesuré en $m.s^{-1}$)

1. Calculer, pour chaque valeur de ν, la valeur de

$$y = \ln \frac{f(\nu)}{\nu^2}$$

Rassembler les résultats dans un tableau contenant en première ligne les valeurs de $x = \nu^2$ et en deuxième ligne les valeurs correspondantes de y, au centième le plus proche.

2. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de x et y. Un ajustement affine est-il justifié ?

3. Déterminer une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés.

4. Déduire de ce qui précède une expression approchée de $f(\nu)$.

Deuxième partie
Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par

$$f(x) = Ax^2e^{-Bx^2}$$

où $A = 1{,}14.10^{-8}$ et $B = 3{,}72.10^{-6}$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. Calcul de la vitesse moyenne des molécules de mercure gazeux à une température de 373^oK.

a) Soit u la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $u(x) = e^{-Bx^2}$. Calculer $u'(x)$.

b) En déduire le calcul de $M(\alpha) = \displaystyle\int_0^\alpha xf(x)dx$ en utilisant une intégration par parties.

c) On admettra que la vitesse moyenne est égale à la limite de $M(\alpha)$ quand α tend vers $+\infty$.
Calculer cette vitesse moyenne.

BTS CHIMIE 1994

EXERCICE 1
Pour contrôler le niveau de remplissage des flacons remplis d'éther par une machine automatique, on réalise des mesures sur un échantillon de 50 flacons extraits au hasard de la production.
Le tableau ci-dessous rassemble les résultats obtenus :

éther (ml) x_i	$[249;249{,}5[$	$[249{,}5;250[$	$[250;250{,}5[$	$[250{,}5;251[$	$[251;251{,}5[$
effectifs n_i	2	9	24	12	3

1. Calculer la moyenne m_e et l'écart-type σ_e de la série statistique ainsi définie.

2. Soit X la variable aléatoire associant à tout flacon la quantité d'éther qu'il contient. On suppose que X suit une loi normale de paramètres m et σ. On admet que, dans ces conditions, la moyenne d'échantillonnage $\overline{X}$, associant à tout échantillon de taille n, la moyenne des quantités d'éther observées, suit une loi normale de paramètres m et $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.
a) Donner des estimations de m et σ.
b) Utiliser ces estimations pour déterminer l'intervalle de confiance de m au seuil de risque 5 %.
c) On suppose que X suit une loi normale de paramètres $m = 250$ et $\sigma = 0{,}5$.
Déterminer le pourcentage de flacons dont le volume d'éther dépasse la valeur 249,5.

EXERCICE 2
On considère la réaction trimoléculaire irréversible

$$A + B + C \longrightarrow D$$

On désigne par
$a = [A]_0$, $b = [B]_0$ et $c = [C]_0$ les concentrations initiales de produits A, B et C (exprimées en millième de mole par litre),
$x(t)$ la concentration en produit D à l'instant t (exprimé en minutes),
k la constante de la vitesse de réaction.

L'objet de l'exercice consiste à préciser la fonction x en admettant que celle-ci vérifie l'équation différentielle

$$(E) \qquad \frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x)(c-x)$$

avec $a = 7$, $b = 5$ et $c = 5$.

1. Résolution de l'équation différentielle (E)
a) Montrer que pour tout réel $z \notin \{5{,}7\}$

$$\frac{1}{(7-z)(5-z)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{7-z} - \frac{1}{5-z} + \frac{2}{(5-z)^2}\right)$$

b) Déterminer une primitive G de la fonction g définie sur $[0{,}5[$ par

$$g(z) = \frac{1}{(7-z)(5-z)^2}$$

c) Montrer, en résolvant l'équation différentielle (E) avec la condition initiale $x(0) = 0$ que

$$\frac{1}{4}\ln\left(\frac{7}{5} \times \frac{5-x(t)}{7-x(t)}\right) + \frac{x(t)}{10(5-x(t))} = kt$$

Il n'est pas demandé d'exprimer x en fonction de t.

2. Déterminer la constante k, sachant que $x(1) = 1$.
On donnera la valeur exacte de k et sa valeur approchée arrondie à 10^{-4} près.

3. On admet dans cette question que t et $x(t)$ sont liés par

$$\frac{1}{4}\ln\left(\frac{7}{5} \times \frac{5-x(t)}{7-x(t)}\right) + \frac{x(t)}{10(5-x(t))} = 0{,}0078t$$

Si cette relation permet le calcul de t connaissant $x(t)$, elle ne permet pas en revanche de prévoir, autrement que graphiquement, quelle sera la valeur de $x(t)$ à l'instant t. L'objet de cette question est la détermination d'une expression approchée de $x(t)$ en fonction de t, valable sur l'intervalle $[2{,}4]$.
a) Recopier et compléter (en arrondissant à 10^{-2} près) le tableau suivant :

t_i	2,96				
$x_i = x(t_i)$	2	2,5	3	3,5	4
$y_i = \ln(5 - x_i)$					

b) Déterminer le coefficient de corrélation de y et t. L'ajustement affine de y par rapport à t, par la méthode des moindres carrés, est-il de bonne qualité ?
Justifier la réponse.

c) Déterminer une équation de la droite de régression de y en t, en arrondissant ses coefficients au millième le plus proche.
d) En déduire une expression approchée de $x(t)$ en fonction de t, notée $x_{appr}(t)$.
e) Comparer les valeurs de $x_{appr}(t)$ à celles de $x(t)$ pour les valeurs de t de la question 3.a).

BTS CHIMIE 1995

EXERCICE 1

Une entreprise d'imprimerie compose les différents tomes d'une encyclopédie des sciences et des techniques.

1. On note X_1 la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de fautes d'impression par page du premier tome. Sur un échantillon aléatoire de 48 pages, le nombre de fautes est le suivant :

8	4	6	1	4	6	7	5	3	4	4	9	1	9	1	2
5	1	9	6	4	6	3	2	5	5	3	4	3	6	4	5
3	4	4	1	7	7	4	1	5	3	2	2	1	1	7	3

Calculer la moyenne μ_1 et l'écart-type σ_1 de cet échantillon.

On admet, dans la suite de cet exercice, qu'une estimation ponctuelle $\widehat{m}_1$ de la moyenne m_1 de la variable aléatoire X_1 est 4,17 et qu'une estimation ponctuelle $\widehat{s}_1$ de l'écart-type s_1 de X_1 est 2,29.

2. On note X_2 la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de fautes d'impression par page du deuxième tome.

Sur un échantillon aléatoire de 64 pages de ce deuxième tome on a obtenu une moyenne μ_2 de 3,31 fautes d'impression et un écart-type σ_2 de 1,63.

En déduire une estimation ponctuelle $\widehat{m}_2$ de la moyenne m_2 de la variable aléatoire X_2 et une estimation ponctuelle $\widehat{s}_2$ de l'écart-type s_2 de X_2.

3. On se propose de construire un test d'hypothèse pour observer l'évolution dans la qualité du travail d'impression.

3.1 On note $\overline{X}_1$ la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre moyen de fautes d'impression dans des échantillons aléatoires de 48 pages du premier tome et $\overline{X}_2$ la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre moyen de fautes d'impression dans des échantillons aléatoires de 64 pages du deuxième tome.
Quelles sont les lois de probabilité des variables aléatoires $\overline{X}_1$ et $\overline{X}_2$?

3.2 On note D la variable aléatoire telle que $D = \overline{X}_1 - \overline{X}_2$. On admet que D suit la loi normale

$$\mathcal{N}\left(m_1 - m_2; \sqrt{\frac{\widehat{s}_1^2}{48} + \frac{\widehat{s}_2^2}{64}}\right)$$

On pose pour hypothèse nulle $H_0 : m_1 = m_2$ et pour hypothèse alternative $H_1 : m_1 \neq m_2$.

a) Calculer, sous l'hypothèse H_0, les nombres h et k tels que :

$$P(-h < D < h) = 0{,}99 \quad et \quad P(-k < D < k) = 0{,}95$$

b) Énoncer la règle de décision relative à ce test successivement lorsque l'on choisit un seuil de signification de 1 % puis de 5 %.

c) Peut-on conclure au vu des échantillons donnés dans les questions **1.** et **2.** que la différence des moyennes observées est significative au seuil de risque de 1 % ? au seuil de risque de 5 % ?

EXERCICE 2

Dans la réaction d'oxydo-réduction du persulfate de potassium $K_2S_2O_8$ par l'iodure de potassium KI en excès, on dose l'iode I_3^- libéré au moyen d'une solution titrée de thiosulfate de sodium dans des prélévements effectués à intervalles de temps réguliers.
Soient $x(t)$ le volume de solution versé correspondant à une durée de réaction t et a la valeur limite de x correspondant à la réaction totale.
Dans tout le problème, on suppose que : $0 \leqslant x(t) < a$.
On sait que la fonction x vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{dx}{dt} = k_T(a - x).$$

On se propose de vérifier qu'à la température T de l'expérience, k_T est une constante positive.

Partie A : étude théorique en supposant que k_T a la valeur constante k ($k > 0$).

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)$$

dans laquelle x est une fonction de la variable réelle positive t.

Déterminer la solution particulière de cette équation différentielle vérifiant la condition initiale $x(0) = 0$.

2. Soit f la fonction numérique définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(t) = a\left(1 - e^{-kt}\right)$$

a) Étudier les variations de la fonction f.

b) Soit Γ la courbe représentant la fonction f dans un repère cartésien $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Donner une équation de la tangente à Γ au point $O(0,0)$.

Montrer que Γ possède une asymptote et en préciser une équation.

3. Le temps t étant exprimé en minutes et x en millilitres, on a obtenu, à la température $T = 306\,K$, $x(10) = 4{,}2$ et $x(20) = 7{,}5$.
Montrer que a vérifie la relation :

$$(a - 4{,}2)^2 = a(a - 7{,}5).$$

En déduire la valeur de a.

Partie B : vérification expérimentale de la constance de k_T.

Les mesures poursuivies à 306 K ont donné les résultats suivants :

t_i	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
x_i	4,2	7,5	10,1	12,2	13,8	15,1	16,1	16,9	17,6	18,1	18,5

On admet dans cette partie que $a = 20$.

1. On pose $y = \ln\left(\dfrac{a}{a-x}\right)$. Dresser le tableau des valeurs de t_i et y_i (on donnera pour y_i des valeurs décimales approchées à 10^{-3} près).

2. Calculer une valeur décimale approchée à 10^{-5} près du coefficient de corrélation linéaire de la série double $(t_i ; y_i)$.

3. Calculer, en justifiant, une valeur décimale approchée de k_T à 10^{-3} près.

BTS CHIMIE 1996

EXERCICE 1

Dans une entreprise de produits d'entretien, on envisage de distribuer gratuitement à l'occasion d'une campagne publicitaire dix mille sachets d'une nouvelle poudre à laver. On remplit les sachets à l'aide d'une machine. Pendant l'opération, on se livre au prélèvement d'un sachet de temps à autre pour en contrôler la masse. Les cinq cents sachets prélevés constituent un échantillon dont les masses en g se répartissent en 10 classes données dans le tableau suivant :

Classes	Effectifs
[141,143[	11
[143,145[	27
[145,147[	53
[147,149[	85
[149,151[	104
[151,153[	97
[153,155[	60
[155,157[	30
[157,159[	18
[159,161[	15

1. a. Calculer une valeur approchée de la moyenne m et de l'écart type s de cette série. Compte-tenu de l'erreur commise en supposant toutes les observations d'une clase au centre de celle-ci, on se contentera d'une précision de $0{,}5\,.10^{-2}$.

b. On suppose que le poids d'un sachet pris au hasard dans le stock suit une loi gaussienne de moyenne μ et d'écart type σ. Utiliser ces données pour estimer ponctuellement la moyenne μ et l'écart type σ de l'ensemble des sachets confectionnés.

2. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur la masse en grammes d'un sachet. On suppose que X suit la loi normale $\mathcal{N}(150 ; 4)$.

Calculer les probabilités suivantes :

a. $P(X < 148)$; b. $P(147 < X < 157)$.

3. Pour livrer les sachets à une agence chargée de la distribution, on conditionne ceux-ci sous la forme de caissons de 120 sachets. Soit Y la variable aléatoire qui à tout caisson de 120 sachets associe la moyenne des masses en grammes d'un sachet de poudre.

a. Justifier que Y suit la loi normale $\mathcal{N}\left(150 ; \dfrac{4}{\sqrt{120}}\right)$.

b. Trouver a pour que l'on ait :

$P(150 - a < Y < 150 + a) = 0{,}95$.

EXERCICE 2

Le but du problème est l'étude de la désintégration d'un corps radioactif, le Thorium^{227}, qui donne du Radium^{223}, lequel se désintègre à son tour en donnant du Radon^{219}. Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1

1. Soit N_0 le nombre d'atomes de Thorium à l'instant $t = 0$, N_1 le nombre d'atomes de Thorium un jour après, N_k le nombre d'atomes de Thorium k jours après (k entier).

On sait que le nombre d'atomes de Thorium diminue de 3,7 % par jour.

a. Donner l'expression de N_1 en fonction de N_0, puis N_{k+1} en fonction de N_k.

b. En déduire la nature de la suite (N_k) et l'expression de N_k en fonction de N_0 et k. Déterminer alors à 10^{-4} près le coefficient a tel que $N_k = N_0.e^{ak}$.

2. On considère la fonction N définie sur $[0, +\infty[$ par : $N(t) = N_0.e^{-0{,}038t}$.

On admet que $N(t)$ représente le nombre d'atomes de Thorium à l'instant t (l'unité de temps est le jour).

a. Étudier la limite de N en $+\infty$.

b. Étudier les variations de N et donner son tableau de variation.

Partie 2

À l'instant $t = 0$, on isole N_0 atomes de Thorium. On note $R(t)$ le nombre d'atomes de Radium à l'instant t, pour t dans l'intervalle $[0, +\infty[$. À l'instant $t = 0$, il n'y a aucun atome de Radium. On admet que la fonction R est la solution sur $[0, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' + 0{,}062y = 0{,}038\,N_0.e^{-0{,}038t}$$

qui vérifie la condition initiale $R(0) = 0$.

1. a. Montrer que la fonction y_1 définie sur $[0, +\infty[$ par $y_1(t) = \left(\frac{19}{12}\right) N_0.e^{-0{,}038t}$ est une solution de (E).
b. Déterminer dans $[0, +\infty[$ la solution générale y_0 de l'équation sans second membre associée à l'équation (E).
c. En déduire la solution générale y de (E).
d. Déterminer alors la fonction R.

2. On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(t) = e^{-0{,}038t} - e^{-0{,}062t}$$

a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
b. Montrer que
$f'(t) = e^{-0{,}038t}\left[-0{,}038 + 0{,}062e^{-0{,}024t}\right]$.
c. Donner la valeur exacte t_0, puis une valeur décimale approchée à 10^{-1} près de la solution de l'équation
$f'(t) = 0$.
Justifier alors le signe de $f'(t)$ suivant les valeurs de t.
d. Donner le tableau de variation de f.

3. Donner l'expression de $R(t)$ en fonction de $f(t)$. En déduire le tableau de variation de R.

BTS CHIMIE 1997

EXERCICE 1

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 10[$ par :

$$f(x) = \frac{2400x}{1 - 0{,}1x} e^{-\frac{1}{3}x}$$

1) Démontrer que, pour tout réel x appartenant à $[0; 10[$:

$$f'(x) = \frac{800e^{-\frac{1}{3}x}}{(1 - 0{,}1x)^2}(0{,}1x^2 - x + 3)$$

En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 10[$.
2) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 10 (On rappelle que $x < 10$).
3) Écrire les développements limités de $\frac{1}{1 - 0{,}1x}$ et $e^{-\frac{1}{3}x}$ à l'ordre 1 au voisinage de 0. En déduire le développement limité de $f(x)$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.

Partie B

On considère un gaz dont l'équation caractéristique est, pour 100 moles, à température constante :

$$P(V - 0{,}1) = 2400e^{-\frac{1}{3V}}$$

où le volume V exprimé en m^3 est tel que $V > 0{,}1$ et P désigne la pression exprimée en Pa.
1) Démontrer que $P = f\left(\frac{1}{V}\right)$.
D'après le résultat de la question 3 de la partie A, on en déduit que le réel $\frac{2400}{V} - \frac{560}{V^2}$ est une bonne approximation de P lorsque V est assez grand.

Dans la suite de cette partie, on supposera que $V \geqslant 10$ et $P = \frac{2400}{V} - \frac{560}{V^2}$.
2) Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près du volume V pour lequel la pression est égale à $100\,Pa$.

EXERCICE 2

Les trois questions sont indépendantes.
Dans un laboratoire pharmaceutique, une machine automatique fabrique en grande quantité des suppositoires contenant du paracétamol.
On désigne par X la variable aléatoire qui, à tout suppositoire pris au hasard dans la production, associe la masse (en mg) de paracétamol qu'il contient.
On admet que X suit une loi normale de moyenne m et d'écart-type $\sigma = 8$.
1) Dans cette question, on suppose que $m = 170$.
a) Calculer $P(150 < X < 180)$.
b) Déterminer le réel α pour que :

$$P(170 - \alpha < X < 170 + \alpha) = 0{,}85.$$

On donnera une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
2) On suppose que la probabilité qu'un suppositoire, pris au hasard dans le stock, soit conforme au cahier des charges est égale à 0,85. Le médicament est commercialisé en boîtes de 10 suppositoires. On désigne par Y la variable aléatoire qui, à toute boîte de 10 suppositoires, associe le nombre de suppositoires conformes qu'il contient.
a) Préciser la loi de Y et indiquer ses paramètres.
b) Calculer $P(Y \geqslant 9)$.
3) On veut contrôler la qualité de la fabrication sur une période donnée. Dans ce but, pendant le fonctionnement de la machine, on prélève de temps à autre un suppositoire dont on mesure la masse de paracétamol. On constitue ainsi un échantillon de 100 suppositoires. Les tirages sont supposés indépendants. À chaque échantillon ainsi constitué, on associe la masse moyenne $\overline{X}$ (en mg) de paracétamol de ses suppositoires.
On se propose de construire un test permettant d'accepter ou de refuser, au seuil de signification de 5%, l'hypothèse selon laquelle la masse moyenne de paracétamol contenue dans un suppositoire est égale à $170\,mg$.
On pose pour hypothèse nulle $H_0 : m = 170$ et pour hypothèse alternative $H_1 : m \neq 170$.
a) Sous l'hypothèse nulle H_0, quelle est la loi de la variable aléatoire $\overline{X}$? On précisera ses paramètres.
b) Énoncer clairement la règle de décision du test.
c) Les résultats des mesures de l'échantillon prélevé sont donnés dans le tableau suivant :

masse (mg)	[145;155[	[155;165[	[165;175[	[175;185[	[185;195[
effectifs	7	30	43	16	4

Au vu de cet échantillon, peut-on accepter l'hypothèse H_0 au seuil de signification de 5% ?

BTS CHIMIE 1998

EXERCICE 1

Deux filiales d'une même entreprise fabriquent des piles de 9 volts. On admet que les durées de vie moyennes des piles issues des filiales A et B suivent des lois de probabilité d'espérances mathématiques respectives μ_A et μ_B.

Dans la production de la filiale A, on a prélevé un échantillon de 55 piles et on a consigné dans le tableau ci-dessous les résultats concernant leur durée de vie :

durée de vie (en heures)	[75; 77[	[77; 79[	[79; 81[	[81; 83[	[83; 85[	[85; 87[	[87; 89[	[89; 91[	[91; 93[
Nombre de piles	7	8	3	7	7	4	5	5	9

En ce qui concerne la filiale B, on a testé un échantillon de 75 piles et on a obtenu les statistiques suivantes :
durée de vie moyenne $m_2 = 81\,h$, écart-type correspondant $\sigma_2 = 4{,}5\,h$.

1) Déterminer à 10^{-1} près, la durée de vie moyenne m_1 et l'écart-type correspondant σ_1 pour l'échantillon prélevé dans la production de la filiale A. (Pour ce calcul, on supposera que les effectifs sont concentrés au centre des classes).

2) Trouver les estimations ponctuelles m_A et m_B de la durée de vie moyenne des piles fabriquées par les filiales A et B, à 10^{-1} près et les estimations ponctuelles σ_A et σ_B des écarts-types correspondants. On justifiera les résultats.

3) On se pose la question de savoir si la différence des moyennes des durées de vie observées dans les deux échantillons est imputable à une meilleure fabrication dans l'une des deux filiales ou tout simplement à des fluctuations d'échantillonnage. Dans ce but, on construit un test unilatéral.

On note $\overline{X}_A$ la variable aléatoire prenant pour valeur la durée de vie moyenne d'une pile dans un échantillon de taille 55 provenant de la filiale A.

On note $\overline{X}_B$ la variable aléatoire prenant pour valeur la durée de vie moyenne d'une pile dans un échantillon de taille 75 provenant de la filiale B.

On admet que : $\overline{X}_A$ suit la loi normale de moyenne μ_A et d'écart-type $\dfrac{\sigma_A}{\sqrt{55}}$, $\overline{X}_B$ suit la loi normale de moyenne μ_B et d'écart-type $\dfrac{\sigma_B}{\sqrt{75}}$.

$\overline{X}_A$ et $\overline{X}_B$ sont des variables aléatoires indépendantes.

On pose $D = \overline{X}_A - \overline{X}_B$ et on admet que D suit une loi normale.

a) Calculer l'écart-type de D.

b) On pose comme hypothèse nulle H_0 : «$\mu_A = \mu_B$» et comme hypothèse alternative H_1 : «$\mu_A > \mu_B$».

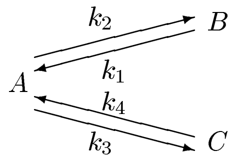
Calculer, sous l'hypothèse H_0, le nombre h tel que :

$$P(D < h) = 0{,}95.$$

c) Énoncer la règle de décision relative à ce test lorsqu'on choisit un seuil de signification de 5% et conclure.

EXERCICE 2

On étudie des réactions chimiques au cours desquelles un corps A subit des transformations selon le schéma suivant :



k_1, k_2, k_3, k_4 sont des constantes de vitesse.

On note $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ les concentrations respectives des produits A, B, C à un instant t donné (t exprimé en minutes).

Les conditions initiales sont $x(0)=1$, $y(0)=0$ et $z(0)=0$.

On dispose au dessus de la cuve où a lieu la réaction une burette par laquelle on verse du produit A à une vitesse constante dans la cuve. Dans ces conditions initiales expérimentales, les fonctions x, y, z définies sur l'intervalle $[0; +\infty[$ vérifient le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= 1 - 2x + y + z \\ \dfrac{dy}{dt} &= x - y \\ \dfrac{dz}{dt} &= x - z \end{cases}$$

Partie A

1) a) Calculer $\dfrac{d}{dt}(x + y + z)$ et, à l'aide des conditions initiales, en déduire que $y(t) + z(t) = 1 + t - x(t)$.

b) Démontrer que x est solution de l'équation différentielle

$$(E) \qquad \frac{dx}{dt} + 3x = 2 + t$$

2) a) Déterminer une fonction affine x_0 solution de l'équation (E).

b) Résoudre alors l'équation (E).

c) Déterminer une solution particulière x_1 de l'équation (E) vérifiant la condition initiale $x_1(0) = 1$.

3) Démontrer que $\dfrac{d}{dt}(y-z)+y-z = 0$, et en déduire que $y = z$. Des questions précédentes déduire l'expression de $y(t)$ et $z(t)$.

Partie B

On considère maintenant la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par

$$f(t) = \frac{5}{9} + \frac{1}{3}t + \frac{4}{9}e^{-3t}$$

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité graphique $5\,cm$).

1) Calculer $f'(t)$ et étudier les variations de la fonction f en justifiant clairement l'étude du signe de la dérivée.

2) Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$. Démontrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = \dfrac{1}{3}t + \dfrac{5}{9}$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$. Préciser la position de la courbe par rapport à son asymptote.

3) Représenter dans le même repère orthonormal (d'unité $5\,cm$) la courbe $\mathcal{C}$, son asymptote $\mathcal{D}$ et sa tangente au point d'abscisse 0.

Partie C
Préciser alors, à l'aide des résultats des parties A et B, à partir de quel instant α on aura retrouvé la concentration initiale en produit A. (On donnera α à la seconde près).

BTS CHIMIE 1999

EXERCICE 1

Deux laboratoires A et B fabriquent des tubes à essai et les conditionnent dans des paquets. Tous les paquets contiennent le même nombre de tubes.
1. On note X_1 la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de tubes défectueux par paquet provenant de l'entreprise A. Sur un échantillon aléatoire de 49 paquets provenant du laboratoire A les nombres de tubes défectueux par paquet sont les suivants :

7	5	5	4	4	4	9	7	9	2	7	8	7	8	4
4	9	10	5	10	6	4	5	6	1	2	5	7	8	0
6	0	1	5	2	0	5	2	3	3	4	1	3	10	1
0	10	2	7											

Calculer une valeur approchée à 10^{-2} près de la moyenne m_1 et de l'écart-type s_1 de cet échantillon. On admet dans la suite de cet exercice qu'une estimation ponctuelle $\widehat{\mu}_1$ de la moyenne μ_1 de la variable aléatoire X_1 est 4,84 et qu'une estimation ponctuelle $\widehat{\sigma}_1$ de l'écart-type σ_1 de X_1 est 2,99.
2. On note X_2 la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de tubes défectueux par paquet provenant de l'entreprise B. Sur un échantillon aléatoire de 64 paquets provenant du laboratoire B on a obtenu une moyenne m_2 de 3,88 tubes défectueux et un écart-type s_2 de 1,45.
En déduire une estimation ponctuelle $\widehat{\mu}_2$ de la moyenne μ_2 de la variable aléatoire X_2 et une estimation ponctuelle $\widehat{\sigma}_2$ de l'écart-type σ_2 de X_2.
3. On se propose de construire un test d'hypothèse pour comparer les qualités de production des laboratoires A et B.
On note $\overline{X}_1$ la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre moyen de tubes défectueux par paquet dans des échantillons aléatoires de 49 paquets de la production du laboratoire A.
On note $\overline{X}_2$ la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre moyen de tubes défectueux par paquet dans des échantillons aléatoires de 64 paquets de la production du laboratoire B.
3.1 Le nombre d'observations étant important, on admet que les lois de probabilité de $\overline{X}_1$ et $\overline{X}_2$ peuvent être approchées par des lois normales.
Exprimer la moyenne et l'écart-type de chacune de ces variables aléatoires en fonction de ceux de X_1 et de X_2.
Dans toute la suite, on considère donc que $\overline{X}_1$ et $\overline{X}_2$ sont deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi normale.
3.2 on note D la variable aléatoire telle que :

$$D = \overline{X}_1 - \overline{X}_2.$$

Quelle est la loi de probabilité de D ? Déterminer la moyenne et l'écart-type de D. Justifier.
4. Dans cette question, on admet que D suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu_1 - \mu_2; 0{,}46)$.
On pose pour hypothèse nulle $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ et pour hypothèse alternative $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$.
4.1 Calculer, sous l'hypothèse H_0, les nombres h et k tels que :

$$P(-h < D < h) = 0{,}99 \quad \text{et} \quad P(-k < D < k) = 0{,}95.$$

4.2 Énoncer la règle de décision relative à ce test lorsqu'on choisit un seuil de signification de 1 %, puis de 5 %.
4.3 Peut-on conclure après examen des échantillons donnés dans les questions 1 et 2 que la différence des moyennes observées est significative au seuil de risque de 1 % ? Au seuil de risque de 5 % ?

EXERCICE 2

On considère la réaction irréversible : $A + B \longrightarrow C$.
Les concentrations initiales des produits A et B sont en mol.L^{-1}, respectivement 0,3 et 0,5. À l'instant t, en minutes, les concentrations des produits A et B sont :

$$[A] = 0{,}3 - x(t) \qquad \text{et} \qquad [B] = 0{,}5 - x(t).$$

La fonction x, dérivable sur $[0, +\infty[$ vérifie :

$$x(0) = 0 \qquad \text{si } t \in [0, +\infty[, \quad 0 \leqslant x(t) < 0{,}3$$

x vérifie l'équation différentielle (E) :

$$\frac{dx}{dt} = 0{,}02(0{,}3 - x)(0{,}5 - x),$$

où 0,02 est la constante de vitesse de la réaction en L.mol^{-1}.min^{-1}.

I. 1) Trouver les constantes réelles a et b telles que pour $x \neq 0{,}3$ et $x \neq 0{,}5$:

$$\frac{1}{(0{,}3 - x)(0{,}5 - x)} = \frac{a}{0{,}3 - x} + \frac{b}{0{,}5 - x}.$$

2) Montrer que la solution de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition initiale $x(0) = 0$ est telle que :

$$\ln\left(\frac{3(0{,}5 - x)}{5(0{,}3 - x)}\right) = 0{,}004t.$$

3) Montrer que : $x(t) = 0{,}3 \times \dfrac{1 - e^{-0{,}004t}}{1 - 0{,}6e^{-0{,}004t}}$

II. 1) Montrer que pour t dans $[0, +\infty[$:

$$x'(t) = \frac{0{,}00048.e^{-0{,}004t}}{(1 - 0{,}6.e^{-0{,}004t})^2}.$$

2) Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t)$ et en déduire l'existence d'une asymptote D à Γ.
3) Dresser le tableau de variation de x.
4) Tracer soigneusement dans un repère orthogonal (1 cm pour 50 unités sur l'axe (O,t), 1 cm pour 0,05 unité sur

l'axe (O,x)), la courbe Γ, son asymptote D, et la tangente à l'origine pour $t \in [0{,}1\,000]$.
5) Au bout de combien de temps x prendra-t-elle la valeur 0,27? On donnera d'abord une valeur de t lue graphiquement, puis on précisera la valeur exacte par le calcul.

BTS CHIMIE 2000

EXERCICE 1 (13 points)
On se propose d'étudier le système de réactions successives suivant : $A \to B \to C$. On appelle $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ les concentrations respectives des produits A, B et C à l'instant t exprimé en minutes. À l'instant $t = 0$, on a les concentrations initiales : $x(0) = a$, $y(0) = 0$ et $z(0) = 0$. Les lois de la cinétique chimique montrent que x, y et z sont solution sur $[0, +\infty[$ du système (S) :

$$\left\{\begin{array}{lcll} \dfrac{dx}{dt} & = & -k_1 x & (1) \\ \dfrac{dy}{dt} & = & k_1 x - k_2 y & (2) \\ \dfrac{dz}{dt} & = & k_2 y & (3) \end{array}\right.$$

où k_1 et k_2 sont deux nombres réels distincts.

Première partie
1) Résoudre l'équation différentielle (1). Déterminer la solution de (1) qui vérifie la condition $x(0) = a$.
2) a) Montrer que les solutions du système (S) vérifient l'équation différentielle

$$(4) : \quad y' + k_2 y = a k_1 e^{-k_1 t},$$

b) Résoudre l'équation différentielle (4). Déterminer la solution de (4) qui vérifie la condition $y(0) = 0$.
3) a) Montrer que pour tout $t \geqslant 0$, on a :

$$x'(t) + y'(t) + z'(t) = 0.$$

b) En déduire à l'aide des conditions initiales, la solution z du système (S).

Deuxième partie
On a réalisé une expérience du type $A \to B \to C$, à une température fixe et on a obtenu les résultats suivants sur les concentrations du produit A :

t_i (en min)	0	0,5	1	2	4,5	6	7
x_i (en $mol.L^{-1}$)	2	1,213	0,736	0,271	0,022	0,005	0,002

On pose $X = \ln x$.
1) a) Recopier et compléter le tableau suivant en donnant des résultats arrondis à 10^{-2} près.

t_i	0	0,5	1	2	4,5	6	7
$X_i = \ln x_i$							

b) Donner une valeur approchée à 10^{-5} près du coefficient de corrélation de la série statistique (t_i, X_i). Un ajustement affine de X en t par la méthode des moindres carrés est-il justifié?
2) a) Donner une équation de la forme $X = \alpha t + \beta$ de la droite de régression de X en t par la méthode des moindres carrés. On donnera des valeurs approchées à 10^{-2} près des coefficients α et β.
b) Sachant que l'étude théorique montre que pour tout $t \in [0, +\infty[$, on a $x(t) = ae^{-k_1 t}$ et que $x(0) = 2$, déterminer une valeur approchée de k_1 à 10^{-2} près.
On admet pour la suite que : $a = 2$, $k_1 = 1$ et $k_2 = 0{,}5$.

Troisième partie
On considère les fonctions x, y et z définies sur $[0, +\infty[$ par :

$$x(t) = 2e^{-t} \qquad y(t) = 4\left(e^{-0{,}5t} - e^{-t}\right)$$

$$z(t) = 2\left(1 - 2e^{-0{,}5t} + e^{-t}\right)$$

On appelle C_1, C_2 et C_3 leurs courbes représentatives respectives dans un repère orthogonal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. (Les unités graphiques sont 2 cm pour l'unité en abscisse et 5 cm pour l'unité en ordonnée).
1) La courbe C_1 est tracée sur la feuille donnée en annexe. En déduire le tableau de variation de la fonction x.
2) Étudier les variations de la fonction y. On appelle t_M la valeur de t pour laquelle y admet un maximum y_M. Déterminer les valeurs exactes de t_M et de y_M.
Dresser le tableau de variation de y.
3) a) Montrer que C_3 admet une asymptote Δ.
b) Étudier les variations de z et dresser son tableau de variation.
4) Tracer la droite Δ et les courbes C_1, C_2 et C_3 dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
5) On appelle τ l'instant où les concentrations des produits A et B sont égales. Déterminer par lecture graphique une valeur approchée de τ exprimée en minutes.

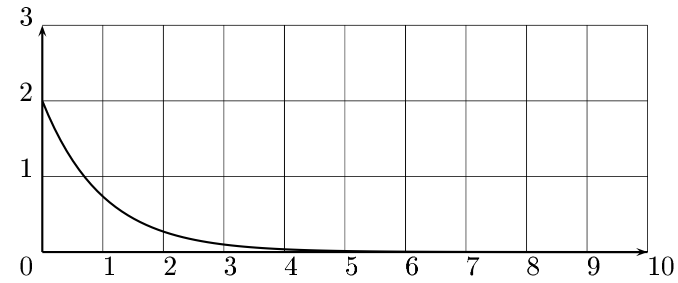
Exercice 2 (7 points)
Dans la fabrication de comprimés effervescents, il est prévu que chaque comprimé doit contenir 1625 mg de bicarbonate de sodium. Afin de contrôler la fabrication de ces médicaments, on a prélevé un échantillon de 150 comprimés et on a mesuré la quantité de bicarbonate de sodium pour chacun d'eux. Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau suivant :

Classes	[1610,1615[	[1615,1620[	[1620,1625[[	[1625,1630[	[1630,1635[
Effectifs	7	8	42	75	18

1) En convenant que les valeurs mesurées sont regroupées au centre de chaque classe, calculer une valeur approchée à 10^{-2} près de la moyenne m et de l'écart type s de cet échantillon.
2) À partir des résultats obtenus pour cet échantillon, assimilé à un échantillon non exhaustif, donner les estimations ponctuelles $\widehat{M}$ et $\widehat{\sigma}$ de la moyenne M et de l'écart type σ de la quantité de bicarbonate de sodium dans la population (formée de l'ensemble de tous les comprimés fabriqués et supposée très grande). Dans la question suivante, on prendra pour valeur de σ son estimation $\widehat{\sigma}$.

3) On appelle $\overline{X}$ la variable aléatoire qui à tout échantillon de taille $n = 150$ associe la quantité moyenne de bicarbonate de sodium de cet échantillon.
a) $\overline{X}$ peut-elle être approchée par une loi classique?
Si oui, laquele? Donner ses paramètres.
b) Déterminer un intervalle de confiance de la quantité moyenne de bicarbonate de sodium dans la population avec le coefficient de confiance 95%.
c) Quelle devrait être la taille minimum de l'échantillon prélevé pour connaître avec le coefficient de confiance 95% la quantité moyenne de bicarbonate de sodium dans la population à 1 mg près?

Annexe



BTS CHIMIE 2001

EXERCICE 1 (10 points)
Une entreprise fabrique des flacons destinés à contenir une substance particulière. Un flacon est dit conforme s'il vérifie un ensemble de critères définis par l'entreprise. On appelle p la proportion de flacons conformes dans l'ensemble de la production.

Première partie
Un processus de contrôle de la conformité des flacons a été mis au point par l'entreprise. On s'intéresse dans cette partie aux risques d'erreurs de ce contrôle et on suppose que la proportion p de flacons conformes est égale à 0,8.
On prélève un flacon au hasard dans l'ensemble de la production. On note :
C l'événement : « le flacon prélevé est conforme » ; on a donc $P(C) = 0{,}8$.
A l'événement : « le flacon prélevé est accepté par le contrôle ».
Une étude préliminaire a permis d'estimer les risques d'erreurs de ce contrôle :
- la probabilité de refuser un flacon sachant qu'il est conforme est de 0,05 ; on a donc $P_C(\overline{A}) = 0{,}05$.
- la probabilité d'accepter un flacon sachant qu'il n'est pas conforme est de 0,1 ; on a donc $P_{\overline{C}}(A) = 0{,}1$.
1. a) Déterminer la probabilité qu'un flacon soit accepté sachant qu'il est conforme.
b) Déterminer la probabilité qu'un flacon soit accepté par le contrôle.
c) Déterminer la probabilité qu'un flacon ne soit pas conforme sachant qu'il a été accepté par le contrôle. (Arrondir le résultat au centième).
2. On admet que la probabilité de choisir un flacon non conforme parmi ceux qui ont été acceptés par le contrôle est égale à 0,03.
On prélève au hasard et avec remise des échantillons de 100 flacons dans l'ensemble des flacons qui ont été acceptés par le contrôle.
On appelle X la variable aléatoire qui, à tout échantillon de ce type, associe le nombre de flacons non conformes de cet échantillon.
a) Quelle est la loi suivie par X ? b) On admet que la loi de X peut être approchée par une loi de Poisson. Quel est le paramètre de cette loi de Poisson ?
Calculer, à l'aide de cette loi de Poisson, une valeur approchée de la probabilité de l'événement $(X > 5)$.

Seconde partie
On se propose de construire et d'utiliser un test unilatéral pour valider ou refuser, au seuil de risque 5%, l'hypothèse selon laquelle la proportion p de flacons conformes dans l'ensemble de la production, sur une période donnée, est égale à 0,8. (Hypothèse nulle H_0 : « $p = 0{,}8$ » ; hypothèse alternative H_1 : « $p < 0{,}8$ »).
Pour cela, on prélève au cours de cette période dans l'ensemble de la production des échantillons de 200 flacons, au hasard et avec remise.
On appelle F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de ce type, associe la proportion de flacons conformes de cet échantillon. On admet que la loi de F est une loi normale $\mathcal{N}(p,\sigma)$.
1. Sous l'hypothèse H_0 :
a) Montrer qu'une valeur approchée de σ est 0,03.
b) Déterminer le réel positif h tel que
$P(F \geqslant 0{,}8-h) = 0{,}95$. (Arrondir le résultat au centième).
2. Énoncer la règle de décision relative à ce test de validité d'hypothèse.
3. Dans un échantillon de 200 flacons, on a trouvé 156 flacons conformes.
Au vu de cet échantillon, doit-on, au seuil de risque 5%, accepter ou refuser l'hypothèse « $p = 0{,}8$ »?

EXERCICE 2 (10 points) L'objet de cet exercice est l'étude du potentiel électrique dans un électrolyte. On considère un électrolyte, le chlorure de sodium NaCl, mis en solution dans l'eau à la température de 25^oC et de concentration 10^{-2} $mol.L^{-1}$. Un ion Na^+ étant choisi, on prend son centre comme origine de l'espace rapporté à un repère. Cet ion crée, en tout point de l'atmosphère ionique qui l'entoure, un potentiel électrique U, fonction de la distance x de ce point au centre de l'ion considéré.

1. Expression de $U(x)$.
On admet que cette fonction U de la variable réelle x, avec $x > 0$, est solution de l'équation différentielle (E) :

$$x^2U'' + 2xU' = b^2x^2U,$$

où b est une constante réelle strictement positive.
a) Pour tout $x > 0$, on pose $Y(x) = xU(x)$.
Calculer $Y'(x)$ et $Y''(x)$.
On considère l'équation différentielle$(E_1) : Y'' - b^2Y = 0$.
Démontrer que Y est solution de (E_1) si et seulement si U est solution de (E).
b) Résoudre l'équation différentielle (E_1).

En déduire, pour tout $x > 0$, l'égalité (i) :
$U(x) = \frac{1}{x}(Ae^{-bx} + Be^{bx})$, où A et B sont des constantes réelles.

2. Calcul de la constante B.
Le potentiel étant nul à l'infini, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} U(x) = 0$.
Montrer, en utilisant l'égalité (i), qu'alors $B = 0$. (On montrera que si B était non nulle, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} U(x)$ serait égale à $+\infty$). On a donc, pour tout $x > 0, U(x) = \frac{A}{x}e^{-bx}$.

3. Calcul de la constante A.
a) Soit α un nombre réel supérieur ou égal à 4.
À l'aide d'une intégration par parties, calculer, en fonction de α, l'intégrale

$$I_\alpha = \int_4^\alpha xe^{-bx}dx$$

Déterminer la limite I de I_α lorsque α tend vers $+\infty$.
b) L'expression de l'électroneutralité conduit à l'égalité $A.I = k$, où k est une constante réelle positive.
Exprimer A en fonction de b et de k. En déduire que, pour tout $x > 0$, $U(x) = \frac{kb^2}{1+4b}\frac{1}{x}e^{-b(x-4)}$.

4. Tableau de variation de U, pour des valeurs particulières de b et de k.
On considère que, pour tout $x > 0$,

$$U(x) = \frac{0{,}16}{x}e^{-0{,}0325(x-4)}.$$

a) Calculer $U'(x)$ et étudier le sens de variation de U.
b) Calculer la limite de U en 0.
c) Donner le tableau de variation de U.

BTS CHIMIE 2002

PROBLEME 1 (8 points)
Lorsqu'un fil conducteur est parcouru par un courant électrique d'intensité constante, celui-ci s'échauffe par effet Joule et sa température varie en fonction du temps. Désignons par $\theta(t)$ la température du conducteur exprimée en degrés Celsius à l'instant t exprimé en secondes. À l'instant de la mise sous tension, choisi comme instant origine ($t = 0$), la température du conducteur est celle du milieu ambiant : $\theta(0) = 18$ (condition initiale). Dans les conditions de l'expérience, le bilan énergétique se traduit par l'équation différentielle :

$$(E) \qquad \theta'(t) + 10k\theta(t) = 2, \qquad t \geqslant 0$$

dans laquelle k est une constante qui dépend du conducteur et du milieu ambiant.

Partie A : On suppose, dans cette partie, que le conducteur est parfaitement isolé, c'est-à-dire que $k = 0$.
1. Écrire l'équation différentielle correspondant à $k = 0$ puis résoudre cette équation différentielle.
2. Représenter graphiquement les variations de θ dans un repère orthogonal d'unités graphiques : 1 cm en abscisse pour 2 secondes et 1 cm en ordonnée pour 2 ^oC.
3. Calculer le temps nécessaire pour que la température du conducteur atteigne 30 ^oC.

Partie B : On suppose, dans cette partie, que le conducteur n'est pas thermiquement isolé et que $k = 5.10^{-3}$.
1. Vérifier que la température du conducteur s'exprime par : $\theta(t) = 40 - 22e^{-0{,}05t}$
2. a. Calculer la température stationnaire du conducteur : $\theta_e = \lim\limits_{t\to+\infty} \theta(t)$.
Donner l'interprétation graphique de ce résultat.
b. Déterminer le développement limité de θ au voisinage de $t = 0$, à l'ordre 2. En déduire une équation de la tangente à la courbe représentative de θ en son point d'abscisse 0 et préciser la position de la courbe par rapport à cette tangente, au voisinage de $t = 0$.
3. a. Étudier les variations de θ en fonction de t.
b. Construire la courbe représentative de θ sur le même graphique que dans la partie A.
c. Calculer la température du conducteur à l'instant $t = 20$.
d. Calculer le temps nécessaire pour que la température du conducteur atteigne 39,99 ^oC.

PROBLEME 2 (12 points)
Un laboratoire de chimie est chargé de conditionner des flacons d'eau de toilette destinés à une parfumerie. On définit une variable aléatoire X associant à chaque flacon le volume de son contenu exprimé en cm^3 . On suppose que X suit la loi normale de moyenne μ (inconnue) et d'écart type $\sigma = 0{,}036$.

Première partie : Dans cette partie, on prend pour μ la valeur annoncée par le fournisseur : $\mu = 43{,}041$. Le cahier des charges indique que le flacon est conforme lorsque le volume de son contenu appartient à l'intervalle $[42{,}970; 43{,}130]$. On choisit un flacon au hasard dans la production.
1. Déterminer la probabilité pour qu'il soit conforme.
2. Trouver un intervalle centré en μ dans lequel le volume a 85% de chances de se trouver.

Deuxième partie : À l'occasion d'une commande, le parfumeur reçoit du laboratoire un lot de flacons. Il envisage d'effectuer un test de conformité de la moyenne μ de la production, avec la valeur $m = 43{,}041$ annoncée par le fournisseur. Pour réaliser ce test d'hypothèse bilatéral, il effectue un prélèvement aléatoire, assimilé à un prélèvement avec remise de 75 flacons pris dans le lot reçu. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Volume	[42,93; 42,97[	[42,97; 43,01[	[43,01; 43,05[	[43,05; 43,09[	]43,09; 43,13]
Effectif	2	7	39	19	8

1. Calcul de la moyenne.
Calculer la moyenne $\overline{x}$ de cet échantillon (arrondie à 10^{-3} près) en faisant l'hypothèse que les valeurs observées sont respectivement celle du centre de chaque classe.

2. Construction du test.
On oppose l'hypothèse nulle $H_0: \mu = m$ à l'hypothèse alternative $H_0 : \mu \neq m$.
a. Quelle est la loi de probabilité suivie par la moyenne d'échantillonnage $\overline{X}$? En préciser les paramètres.
b. En se plaçant sous l'hypothèse H_0 , déterminer la valeur arrondie à 10^{-3} près du réel h tel que :

$$P(\mu - h \leqslant \overline{X} \leqslant \mu + h) = 0{,}95.$$

c. En déduire l'intervalle d'acceptation de l'hypothèse H_0 au seuil de risque de 5%.
d. Énoncer la règle de décision du test.

3. Utilisation du test.
Peut-on affirmer, au seuil de risque de 5% , que la valeur m annoncée pour μ est correcte?

BTS CHIMIE 2003

EXERCICE 1 (13 points)

Objet : étude de la cinétique d'une réaction en chaîne.

On considère un réacteur dans lequel on fait réagir du CH_4 dans du Cl_2 en excès. Dans ce cas, on peut modéliser les réactions par des cinétiques d'ordre 1 :

$$CH_4 \longrightarrow CH_3Cl \longrightarrow CH_2Cl_2 \longrightarrow CHCl_3 \longrightarrow CCl_4$$

On note $a = [CH_4]_0$ la concentration initiale en CH_4 et k une constante de vitesse exprimée en min^{-1}. Le temps t est exprimé en minutes. *Les valeurs approchées seront arrondies au centième le plus proche.*
Les trois parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A.
$[CH_4]_t$ étant la concentration en CH_4 à l'instant t, on pose $x(t) = \dfrac{[CH_4]_t}{a}$.
À l'instant $t = 0$, la concentration en CH_4 est égale à a : $x(0) = 1$.
Les lois cinétiques donnent l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dx}{dt} = -4kx \qquad (1)$$

1. a. Donner la solution générale de l'équation différentielle (1).
b. Déterminer la solution de l'équation (1) qui vérifie la condition initiale $x(0) = 1$.
$[CH_3Cl]_t$ étant la concentration en CH_3Cl à l'instant t, on pose $y(t) = \dfrac{[CH_3Cl]_t}{a}$.

À l'instant $t = 0$, la concentration en CH_3Cl est nulle, donc $y(0) = 0$.
Les lois cinétiques donnent l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dy}{dt} = -3ky + 4ke^{-4kt}$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme :

$$y' + 3ky = 4ke^{-4kt} \qquad (2)$$

2. Résoudre l'équation différentielle homogène associée :

$$y' + 3ky = 0$$

3. Déterminer une solution particulière de l'équation (2) de la forme

$$t \longmapsto \lambda e^{-4kt}$$

où λ est une constante réelle.
4. a. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (2).
b. Préciser la solution de cette équation (2) qui vérifie la condition initiale $y(0) = 0$.

Partie B.
$[CH_2Cl_2]_t$ et $[CHCl_3]_t$ étant les concentrations en CH_2Cl_2 et $CHCl_3$ à l'instant t, on pose :
$z(t) = \dfrac{[CH_2Cl_2]_t}{a}$ et $r(t) = \dfrac{[CHCl_3]_t}{a}$.
À l'instant $t = 0$, ces concentrations sont nulles et donc $z(0) = r(0) = 0$.
Les lois cinétiques donnent les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = -2kz + 12k\left(e^{-3kt} - e^{-4kt}\right) & (3) \\ \dfrac{dr}{dt} = -kr + 2kz & (4) \end{cases}$$

1. Montrer que $r'(0) = 0$.
2. a. Montrer que l'équation (4) s'écrit sous la forme :

$$z(t) = \frac{1}{2k}\left[r'(t) + kr(t)\right].$$

2. b. En dérivant cette expression de z, exprimer $z' = \dfrac{dz}{dt}$ en fonction de $r' = \dfrac{dr}{dt}$ et de $r'' = \dfrac{d^2r}{dt^2}$.
b. En reportant les expressions de z et de $\dfrac{dz}{dt}$ dans l'équation (3), montrer que v vérifie l'équation différentielle du second ordre linéaire à coefficients constants (E_1) suivante :

$$v'' + 3kv' + 2k^2v = 24k^2\left(e^{-3kt} - e^{-4kt}\right).$$

3. Résoudre l'équation différentielle homogène (E_0) associée :

$$v'' + 3kv' + 2k^2v = 0$$

4. Déterminer une solution particulière de l'équation (E_1) de la forme

$$t \longmapsto \alpha e^{-3kt} + \beta e^{-4kt}$$

où α et β sont des constantes.
5. Donner la solution générale de l'équation différentielle (E_1).

On suppose maintenant que $k = 0{,}1$.

6. Montrer que la solution v qui vérifie les conditions initiales $v(0) = 0$ et $v'(0) = 0$ est définie par :

$$v(t) = 4e^{-0{,}1t} - 12e^{-0{,}2t} + 12e^{-0{,}3t} - 4e^{-0{,}4t}.$$

Partie C.
On considère la fonction v définie pour tout réel $t \geqslant 0$ par :

$$v(t) = 4e^{-0,1t} - 12e^{-0,2t} + 12e^{-0,3t} - 4e^{-0,4t}$$

1. a. Calculer la dérivée v' de v.
b. Vérifier que la dérivée de v peut s'écrire :

$$v'(t) = 0,4e^{-0,1t}\left(4e^{-0,1t} - 1\right)\left(e^{-0,1t} - 1\right)^2$$

2. Étudier le signe de $v'(t)$ en fonction de t. En déduire le tableau de variation de la fonction v sur l'intervalle $[0; 75]$.
3. Représenter graphiquement la fonction v pour $t \in [0; 75]$, dans un repère orthogonal d'unités graphiques :
1 cm sur l'axe des abscisses (1 cm représente donc 10 minutes) et 20 cm sur l'axe des ordonnées.

EXERCICE 2 (7 points)

Partie I : plan d'expériences.
Les valeurs approchées seront arrondies au millième le plus proche.

Pour établir un modèle du rendement en trichlorométhane, on réalise un plan factoriel d'expériences complet portant sur deux facteurs X_1 et X_2 : la température et la durée du passage des gaz dans le réacteur.
Ce plan d'expériences est construit selon l'algorithme de Yates.
On suppose que le rendement y du phénomène est modélisé par une expression de la forme :

$$y = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + a_{12}X_1X_2 + \varepsilon$$

où a_0, a_1, a_2, a_{12} sont des réels et ε une variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne 0 et d'écart type s, où s est un réel > 0.

On attribue les niveaux suivants aux facteurs :

niveau	-1	1
durée X_1	10 minutes	20 minutes
température X_2	50^oC	100^oC

Les quatre expériences réalisées ont donné les résultats suivants :

expérience	1	2	3	4
durée	10 min	20 min	10 min	20 min
température	50^oC	50^oC	100^oC	100^oC
rendement	0,05	0,10	0,15	0,25

1. Établir la matrice complète des interactions.
2. Calculer les estimations ponctuelles des effets.
3. Donner l'expression du modèle.
4. Interprétation
a) Que représente le coefficient a_0 par rapport à ces expériences ?
b) En interprétant des effets des deux facteurs, quelles sont les conditions optimales pour la fabrication du trichlorométhane ?

Partie II : étude statistique. *Les valeurs approchées seront arrondies au millième le plus proche.*

On suppose que l'estimation ponctuelle de a_1 est 0,038.
On considère que l'effet du facteur X_1 est estimé par une variable aléatoire qui suit une loi normale d'écart type $\sigma_e = 0,005$.
Calculer un intervalle de confiance de l'effet du facteur X_1 au seuil de risque $\alpha = 5\%$.

BTS CHIMIE 2004

EXERCICE 1 (10 points)
On étudie la cinétique, à 100^oC, de la substitution de l'atome de chlore de l'acide monochloroacétique par OH^- selon la réaction :

$$Cl - CH_2COO^- + OH^- \rightarrow HO - CH_2COO^- + Cl^-$$

à l'instant $t = 0$, les concentrations des réactifs sont : $[OH^-]_0 = a$ et $[Cl - CH_2COO^-]_0 = \frac{a}{2}$
où a est un réel donné tel que $a > 0$
de même à l'instant t,
$[OH^-] = a - x(t)$ et $[Cl - CH_2COO^-] = \frac{a}{2} - x(t)$
avec $0 \leqslant x(t) < \frac{a}{2}$
à l'instant t, le rendement de la réaction vaut $r(t) = \dfrac{x(t)}{a/2}$
On admet que la vitesse de la réaction est donnée par la relation : $v = \dfrac{dx}{dt} = k[Cl - CH_2COO^-].[OH^-]$
où k est une constante liée à la réaction avec t s'exprimant en secondes.

PARTIE A : Étude théorique
1. Établir l'équation différentielle, notée (E), liant $\dfrac{dx}{dt}$, a et k.
2. Trouver les constantes λ et μ, exprimées en fonction de a, telles que : pour tout x de l'intervalle $\left[0, \frac{a}{2}\right[$

$$\frac{2}{(a-x)(a-2x)} = \frac{\lambda}{a-x} + \frac{\mu}{a-2x}$$

3. Montrer que la solution de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition initiale $x(0) = 0$ est telle que :

$$\ln\left(\frac{a - x(t)}{a - 2x(t)}\right) = \frac{ak}{2}t$$

où ln est la fonction logarithme népérien.
4. Montrer que

$$r(t) = \frac{2\left(1 - e^{At}\right)}{1 - 2e^{At}}$$

où $A = \dfrac{ak}{2}$ et r désigne le rendement de la réaction.
5. On considère dans cette question que $A = 8.10^{-4}$. Déterminer alors le temps t (arrondi à la seconde) pour lequel le rendement $r(t)$ de la réaction est égal à 0,9.

PARTIE B : Exploitation de résultats expérimentaux - détermination de k

On donne $a = 1{,}65 mol.L^{-1}$.

En posant $y(t) = \ln\left(\dfrac{a - x(t)}{a - 2x(t)}\right)$, on obtient les résultats expérimentaux suivants :

t (en secondes)	0	150	300	900	1200	1500	1800	2100	2400
$y(t)$	0	0,097	0,222	0,688	0,902	1,130	1,408	1,550	1,938

1. Déterminer l'équation de la droite des moindres carrées sous la forme : $y = mt + p$ où m et p sont des coefficients réels. m sera donné avec une précision de 10^{-6} et p avec une précision de 10^{-3}.

2. En estimant que p est très proche de 0, et en utilisant le résultat de la modélisation de la 3^e question de la partie A, déterminer une valeur approchée de la constante k de la réaction.

EXERCICE 2 (10 points)

Étude expérimentale d'une colle à prise chimique.

Un fabricant met au point une nouvelle colle à prise chimique (par polymérisation). Durant la phase de collage, la résistance à la traction de la colle augmente de façon significative jusqu'à une valeur maximale. Le fabricant veut étudier la « durée de prise », c'est à dire la durée nécessaire pour que la résistance de la colle atteigne les trois quarts de sa valeur maximale.

Partie A

Le fabricant étudie l'influence de deux facteurs, la température et l'humidité ambiantes, sur la durée de prise de la colle. Il note X_1 (resp. X_2) la variable qui associe au facteur température (resp. humidité) son niveau, et Y la durée de prise étudiée (exprimée en minutes). Il procède à un plan d'expérience factoriel 2^2 dont les résultats figurent ci-dessous.

Tableau 1 :

Température X_1	HumiditéX_2	Durée de prise Y
18^oC	faible	11 min
22^oC	faible	9 min
18^oC	forte	10 min
22^oC	forte	13 min

niveau	-1	+1
température	18^oC	22^oC
humidité	faible	forte

Le modèle retenu pour Y est un modèle polynomial du type :

$$Y = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + a_{12}X_1X_2 + \varepsilon$$

1) Reproduire et compléter la matrice complète des expériences et des effets, construite selon l'algorithme de Yates :

Expérience	Moyenne	X_1	X_2	X_1X_2	Y
1					
2					
3					
4					
Effets	a_0	a_1	a_2	a_{12}	

2) Calculer les estimations ponctuelles des effets principaux et de l'interaction. Écrire l'équation du modèle de Y en fonction de X_1 et X_2.

3) Interprétation des effets :

a. Peut-on négliger l'interaction ?

b. À la température de 20^oC ($X_1 = 0$) comment varie la durée de prise lorsque l'humidité varie du niveau faible à fort ?

Partie B

Le fabricant effectue une deuxième campagne de mesures : il fait réaliser 100 collages indépendants, dans des conditions de température variables entre 18^oC et 22^oC. Les résultats sont donnés ci-dessous (durées en minutes).

Tableau 2 :

Durée de prise	[8,5;9[	[9;9,5[	[9,5;10[	[10;10,5[	[10,5;11[	[11;11,5[	[11,5;12[	[12;12,5[	[12,5;13[
Effectif	0	6	9	17	22	27	13	4	2

1) Calculer la moyenne $\overline{x}$ et l'écart type s de la série de mesures du tableau 2 (on donnera $\overline{x}$ à 0,01 près et s à 0,1 près).

2) On admet ici que la durée de prise est une variable aléatoire X suivant une loi normale de moyenne μ inconnue et d'écart-type $\sigma = 0{,}8$.

On note $\overline{X}$ la variable aléatoire qui à une série quelconque de 100 collages indépendants associe sa durée moyenne de prise. Donner la loi de probabilité de $\overline{X}$ en fonction de μ et σ.

3) Le fabricant construit un test bilatéral pour tester l'hypothèse nulle H_0 : « $\mu = 10{,}75$ » au seuil de signification de 95%.

L'hypothèse alternative est donc H_1 : « $\mu \neq 10{,}75$ ».

a) Sous l'hypothèse H_0, déterminer la valeur arrondie à 0,01 près du réel h telle que :

$$P(\mu - h \leqslant \overline{X} \leqslant \mu + h) = 0{,}95$$

b) En déduire l'intervalle d'acceptation de l'hypothèse H_0 au seuil de signification de 95%.

c) Énoncer la règle de décision du test.

d) Appliquer le test à la série de mesures du tableau 2 et conclure.

BTS CHIMIE 2005

Exercice 1 : (9 points)
Une entreprise fabrique des appareils de mesures qui doivent satisfaire à un cahier des charges.

Partie A

Une étude préalable a montré que 99% des appareils fabriqués sont conformes au cahier des charges. On choisit, au hasard et de façon non exhaustive (tirages avec remise), n appareils dans l'ensemble de la production.

1. On suppose dans cette question que $n = 10$.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'appareils conformes parmi les 10.
a) Pourquoi X suit-elle une loi binomiale? Quels sont les paramètres de cette loi?
b) Déterminer la probabilité pour qu'il y ait au moins 9 appareils conformes parmi les 10. Donner une valeur arrondie du résultat à 10^{-3} près.

2. On suppose dans cette question que $n = 500$.
Soit Y la variable aléatoire égale au nombre d'appareils non conformes parmi les 5 00.
On considère l'événement E : « le nombre d'appareils non conformes est supérieur ou égal à 6 »
a) Pourquoi peut-t-on approcher la loi binomiale de la variable aléatoire Y par la loi de Poisson de paramètre 5.
b) En utilisant cette approximation calculer la probabilité de l'événement E arrondie au centième.

Partie B

L'entreprise met en place un nouveau dispositif censé améliorer la fiabilité des appareils produits. Deux chaînes de fabrication sont mises en service : la chaîne no 1, sans nouveau dispositif et la chaîne no 2 avec le nouveau dispositif. Afin de tester l'hypothèse selon laquelle le nouveau dispositif améliore de manière significative la fiabilité des appareils produits, on a prélevé de manière aléatoire 200 appareils à la sortie de chacune des deux chaînes de fabrication. Un pourcentage p_1 (resp. p_2) d'appareils issus de la chaîne n^o 1 (resp. n^o 2) ont fonctionné parfaitement pendant les 3 premiers mois.

1. a) Expliquer pourquoi on met en place un test unilatéral.
b) On prend pour hypothèse nulle $H_0 : p_1 = p_2$
Préciser l'hypothèse H_1 alternative qui va être opposée à l'hypothèse H_0.
On note F_1 (resp. F_2) la variable aléatoire qui à chaque échantillon de taille 200 provenant de la chaîne no 1 (resp. no 2) associe la fréquence f_1 (resp.f_2) d'appareils ayant parfaitement fonctionné pendant 3 mois. Sur les deux échantillons prélevés, on a obtenu des valeurs observées qui sont : $f_1 = 87\%$ et $f_2 = 93\%$.
On note $D = F_2 - F_1$. Sous l'hypothèse nulle, les deux chaînes sont censées produire le même pourcentage p d'appareils conformes et la loi suivie par D (celle que l'on adopte) est la loi normale : $\mathcal{N}\left(0,\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{200}+\dfrac{p(1-p)}{200}}\right)$.
On prend $p = 0{,}9$ car $\left[p = \dfrac{f_1+f_2}{2}\right]$.

2. Préciser les paramètres de la loi suivie par D.

3. Si α est le seuil de risque, on désigne par h_α le réel positif tel que : $P(D \leqslant h_\alpha) = 1 - \alpha$.
a) On suppose dans cette question que $\alpha = 0{,}01$.
Déterminer la valeur arrondie au centième h_α.
Énoncer la règle de décision du test.
Conclure quant à l'efficacité présumée du nouveau dispositif au seuil de risque 0,01.
b) On suppose dans cette question que $\alpha = 0{,}05$. Déterminer h_α.
Énoncer la règle de décision du test.
Conclure quant à l'efficacité présumée du nouveau dispositif au seuil de risque 0,05.

Exercice 2 (11 points)
Le benzène, à l'état de vapeur, dilué dans un gaz inerte, réagit avec le dichlore.

Partie A

La réaction de chloration du benzène, dans certaines conditions, conduit à la formation de monochlorobenzène et de dichlorobenzène. On peut admettre que la concentration en dichlore est constante pendant toute la durée de la réaction (car cette concentration en dichlore est très grande par rapport à la concentration en benzène).
A l'instant t, exprimé en minute, on désigne par $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ les concentrations molaires respectives du benzène, du monochlorobenzène et du dichlorobenzène en micromole par litre.
A l'instant $t = 0$, les concentrations molaires sont égales à :
pour le benzène $[C_6H_6]_0 = 0{,}2$
pour le monochlorobenzène $[C_6H_5CI]_0 = 0$
pour le dichlorobenzène $[C_6H_4CI_2]_0 = 0$.
On admet que les fonctions x, y et z sont solutions sur $[0, +\infty[$ du système différentiel (S) :

$$\left\{\begin{array}{lcll} \dfrac{dx}{dt} & = & -k_1x & (E_1) \\ \dfrac{dy}{dt} & = & k_1x - k_2y & (E_2) \\ \dfrac{dz}{dt} & = & k_2y & (E_3) \end{array}\right.$$

où k_1 et k_2 sont des constantes de vitesse, $0 < k_1 < k_2$.

1. a) Résoudre l'équation différentielle (E_1).
b) Déterminer la solution de (E_1) vérifiant la condition initiale $x(0) = 0{,}2$.

2. a) Montrer que les solutions y du système (S) vérifient l'équation différentielle (E_4) :

$$y'(t) + k_2y(t) = 0{,}2k_1e^{-k_1t}, \qquad \text{avec } t \in [0, +\infty[.$$

b) Déterminer le réel A de sorte que $t \to Ae^{-k_1t}$ soit solution de l'équation différentielle (E_4).
c) Résoudre l'équation différentielle (E_4).
d) Déterminer la solution de $(E4)$ vérifiant la condition initiale $y(0) = 0$.

3. a) Vérifier que pour tout t supérieur ou égal à 0 , on a : $x'(t) + y'(t) + z'(t) = 0$.
b) En déduire la solution z du système (S) vérifiant la condition initiale $z(0) = 0$.

Partie B

On considère les fonctions f et g définies respectivement sur $[0, +\infty[$ par :

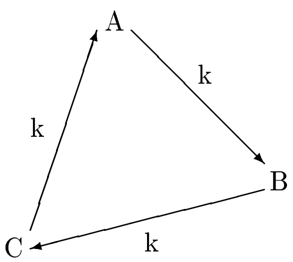
$$f(t) = e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t} \qquad \text{et} \qquad g(t) = \frac{0{,}2k_1}{k_2 - k_1} f(t)$$

a) Calculer la dérivée $f'(t)$.
b) Montrer que l'équation $f'(t) = 0$ admet une unique solution, qu'on notera t_m sur $\mathbb{R}_+$. Exprimer t_m en fonction de k_1 et k_2.
c) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+$.
d) En déduire que la fonction g admet un maximum en t_m.
2. Au cours d'une expérience on constate que le maximum de la fonction g est atteint à l'instant $t = 30$. Quelle relation peut-on déduire entre k_1 et k_2 ?

BTS CHIMIE 2006

Exercice 1 (10 points)

On considère trois réactions d'ordre 1 formant le cycle suivant :



On désigne par x, y et z les concentrations en $mol.L^{-1}$ à l'instant t des produits A, B et C (t exprimé en minutes). Sachant qu'à chaque instant t, on a : $x + y + z = 3$, les lois cinétiques donnent, en remplaçant z par $3 - x - y$, les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - y + 3 & (1) \\ \dfrac{dy}{dt} = -y + x & (2) \\ z = 3 - x - y & (3) \end{cases}$$

avec les conditions initiales : $x(0) = 3$, $y(0) = z(0) = 0$.
Les deux premières équations permettent d'établir une équation différentielle du second ordre linéaire à coefficients constants (E_1) vérifiée par x :

$$(E_1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 3x = 3$$

On rappelle que $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ est la dérivée seconde de la fonction x et que $\dfrac{dx}{dt}$ est la dérivée de la fonction x.
1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation du second degré d'inconnue r suivante :

$$(E_c) \qquad r^2 + 3r + 3 = 0$$

2. En déduire la solution générale de l'équation différentielle du second ordre suivante

$$(E_0) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 3x = 0.$$

Déterminer une fonction constante solution particulière de l'équation différentielle du second ordre (E_1).
4. En utilisant les résultats précédents, donner la solution générale de l'équation différentielle (E_1).
5. En utilisant l'équation (1), calculer la valeur prise par la dérivée de la fonction x en zéro : $x'(0)$.
6. Montrer que la solution de l'équation différentielle (E_1) qui vérifie les conditions initiales est la fonction x définie pour $t \geqslant 0$ par :

$$x(t) = 1 + 2e^{-1{,}5t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

7. Calculer la dérivée de la fonction x. En déduire l'expression de la fonction y.
8. Déterminer la fonction z en utilisant l'équation (3).
9. Calculer, en les justifiant, les limites de $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

Exercice 2 (10 points)

Partie A

On produit du styrène par déshydrogénation 3 catalytique de l'éthylbenzène. Pour étudier le rendement de cette production, on réalise un plan d'expérience 2^3 complet, construit selon l'algorithme de Yates.
Les trois facteurs sont :
X_1 : la nature du catalyseur, X_2 : la température,
X_3 : le rapport molaire vapeur d'eau / éthylbenzène.
En fonction du domaine expérimental, on attribue les niveaux suivants à chacun des facteurs :

niveau	-1	+1
X_1 : catalyseur	C_1	C_2
X_2 : température	800 K	1000 K
X_3 : rapport molaire	4/1	9/1

On réalise huit expériences dont les résultats sont donnés par le tableau suivant :

expérience	1	2	3	4
catalyseur	C_1	C_2	C_1	C_2
température	800 K	800 K	1000 K	1000 K
rapport molaire	4/1	4/1	4/1	4/1
rendement (%)	46	40	92	80

expérience	5	6	7	8
catalyseur	C_1	C_2	C_1	C_2
température	800 K	800 K	1000 K	1000 K
rapport molaire	9/1	9/1	9/1	9/1
rendement (%)	48	42	95	85

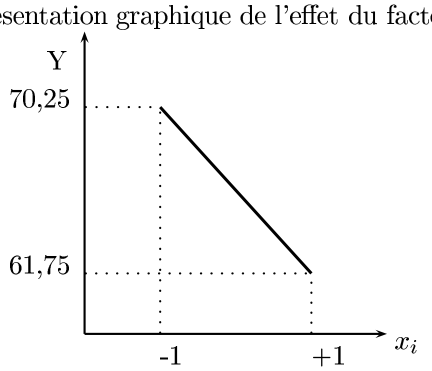
Le modèle retenu pour le rendement Y est un modèle polynomial de la forme :

$$Y = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_{12}X_1X_2 + a_{13}X_1X_3 + a_{23}X_2X_3 + a_{123}X_1X_2X_3 + \varepsilon.$$

1. Donner la matrice complète des expériences et des effets. Calculer une estimation ponctuelle de chacun des coefficients du modèle.
2. Si on considère qu'un effet dont l'estimation ponctuelle est inférieure à 1% est non significatif, donner l'expression du modèle.
3. La représentation graphique de l'effet du facteur X_1 est donnée par le graphique ci-joint en annexe. Justifier les valeurs de Y données sur le graphique en annexe.
Quel est l'effet global du facteur X_1 ?
Quelle conclusion peut-on en tirer afin d'obtenir le meilleur rendement ?

Partie B
On utilise le styrène dans la fabrication du polystyrène. À la fin de la chaîne de transformation un broyeur délivre le polystyrène en granulés. Afin de contrôler la granulométrie, on prélève un échantillon de 100 granulés et on mesure leur diamètre, en millimètre. La moyenne m et l'écart type s de cet échantillon sont tels que $m = 4{,}63$ et $s = 0{,}15$.
1. Cet échantillon étant assimilé à un échantillon non exhaustif, déduire des résultats obtenus pour cet échantillon une estimation ponctuelle (à 10^{-2} près) de la moyenne μ et de l'écart type σ des diamètres des granulés délivrés par ce broyeur. Dans la suite de l'exercice on considérera que la valeur de l'écart type σ est l'estimation ponctuelle obtenue.
2. On suppose que la variable aléatoire $\overline{X}$ qui, à tout échantillon non exhaustif de taille $n = 100$, associe la moyenne des diamètres des granulés de cet échantillon suit une loi normale. Quels sont les paramètres de cette loi ?
3. Déterminer un intervalle de confiance de la moyenne des diamètres μ, avec un coefficient de confiance égal à 95%.

Annexe :
Représentation graphique de l'effet du facteur X_1



BTS CHIMIE 2007

Exercice 1 (8 points)
Deux chaînes de production C_A et C_B d'un laboratoire pharmaceutique fabriquent, en très grande quantité, le comprimé d'un nouveau médicament dont la masse théorique de vente est de 900 mg. Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1° On note X_A (respectivement X_B) la variable aléatoire qui, à un comprimé pris au hasard dans la production de la chaîne C_A (respectivement C_B), associe sa masse en mg.
On sait que X_A (respectivement X_B) suit la loi normale de paramètres (m_A, σ_A) (respectivement (m_B, σ_B)). Un comprimé est jugé conforme au cahier des charges si sa masse est comprise entre 880 mg et 920 mg.

a) On donne $m_A = 896\ mg$ et $\sigma_A = 10\ mg$. Calculer, à 10^{-2} près, la probabilité qu'un comprimé pris au hasard dans C_A Soit conforme.

b) On donne $m_B = 900\ mg$. La probabilité qu'un comprimé fabriqué par C_B soit conforme est 0,97. Déterminer, à l'unité près, l'écart type σ_B.

2° Dans la production totale, 40 % des comprimés proviennent de la chaîne C_A et 60 % de la chaîne C_B. La chaîne C_A produit 4 % de comprimés non conformes et la chaîne C_B en produit 3 %. On prélève au hasard un comprimé dans la production du laboratoire.
On note A l'événement « Le comprimé a été fabriqué par la chaîne C_A », B l'événement « Le comprimé a été fabriqué par la chaîne C_B »,
C l'événement « Le comprimé est conforme ».

a) À partir de l'énoncé, déterminer les probabilités des événements A et B ainsi que les probabilités conditionnelles de C sachant A et de C sachant B que l'on notera respectivement $P_A(C)$ et $P_B(C)$.

b) Calculer alors la probabilité $P(C)$ de l'événement C.

c) On prélève un comprimé au hasard dans la production et on constate qu'il est conforme. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il provienne de la chaîne C_A.

3° Le contrôleur qualité n'étant pas satisfait de la production de la chaîne C_A , il décide de la faire régler. Après ce réglage, on teste l'hypothèse nulle $H_0 : m_A = 900Mg$, contre l'hypothèse alternative $H_1 : m_A \neq 900mg$, au seuil de risque 5 %. On désigne par $\overline{X}_A$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon non exhaustif de taille 100, associe sa masse moyenne en mg. Sous H_0, on admet que $\overline{X}_A$ suit la loi normale de paramètres $(900; 1)$.

a) Déterminer le nombre réel positif h tel que :

$$P(900 - h \leqslant \overline{X}_A \leqslant 900 + h) = 0{,}95$$

b) Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.

c) Un tirage de 100 comprimés dans la production de la chaîne C_A est effectué. La masse moyenne obtenue est $\overline{x} = 899\ mg$. Appliquer le test.

Exercice 2 - (12 points) Étude de la cinétique de deux réactions successives du 1er ordre.
On considère les réactions successives suivantes :

$$A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C$$

où k_1, et k_2 désignent des nombres réels strictement positifs.

On désigne par $a-x$, y et z les concentrations en mol.L^{-1} à l'instant t des produits A, B et C (t est exprimé en minutes), a désignant la concentration à l'instant $t = 0$ du produit A, seul présent au début de la réaction.
x, y et z sont des fonctions de t définies sur l'intervalle $[0, +\infty[$. D'après la conservation de la matière on a : $x = y + z$. Les lois cinétiques donnent :

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{dx}{dt} = k_1(a-x) & (1) \\ \dfrac{dy}{dt} = k_1(a-x) - k_2 y & (2) \\ z = x - y & (3) \end{array}\right.$$

Partie A :
1^o L'équation (1) s'écrit aussi : $x' + k_1 x = k_1 a$ (E_1) avec k_1 nombre réel positif non nul.

a) Résoudre l'équation homogène (E_0) : $x' + k_1 x = 0$.

b) Déterminer une solution particulière $x_p(t)$ de (E_1) sous la forme d'une fonction constante.

c) En déduire la solution générale de (E_1).

d) Sachant que la solution x de (E_1) cherchée vérifie $x(0) = 0$, montrer que : $x(t) = a(1 - e^{-k_1 t})$.

2^o On suppose, dans cette question, que k_1 et k_2 sont des nombres réels positifs distincts.
a) Montrer que l'équation (2) équivaut à (E_2) :

$$y' + k_2 y = k_1 a e^{-k_1 t}$$

b) Résoudre l'équation homogène (E_0') : $y' + k_2 y = 0$.

c) Déterminer une solution particulière $y_p(t)$ de (E_2) sous la forme $y_p(t) = \lambda e^{-k_1 t}$ où λ est une constante réelle à déterminer.

d) En déduire la solution générale de (E_2).
e) Sachant que $y(0) = 0$, montrer que:

$$y(t) = \frac{ak_1}{k_2 - k_1}(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t})$$

3^o Donner l'expression de $z(t)$.

Partie B : Étude d'un exemple.
Cas de la réduction d'un sel mercurique :

$$Hg^{2+} \longrightarrow Hg^{+} \longrightarrow Hg$$

(en présence de H_2 sous pression constante).
avec $a = 10^{-3}$ mol.L^{-1} ,$k_1 = 0{,}0283$ min^{-1} et $k_2 = 0{,}0033$ min^{-1}.

1^o Vérifier que :

$$z(t) = 10^{-3}\left(1 + 0{,}132e^{-0.0283t} - 1{,}132e^{-0{,}0033t}\right)$$

2^o Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} z(t)$.

3^o Déterminer la dérivée de la fonction z.

4^o Montrer que, pour tout nombre réel t strictement positif : $e^{-0{,}0283t} < e^{-0{,}0033t}$.

5^o En déduire le signe de $z'(t)$ et le sens de variation de z sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

BTS CHIMIE 2008

Exercice 1 (12 points)
On considère les réactions suivantes :

$$A \xrightarrow{k_1} B \underset{k_3}{\overset{k_2}{\rightleftarrows}} C$$

où k_1, k_2, k_3 désignent des constantes réelles strictement positives.
À l'instant t, on désigne par $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ les concentrations respectives en mol.L^{-1} des produits A, B et C.
Les lois de la cinétique chimique permettent d'écrire :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{dx}{dt} & = & -k_1 x \\ \dfrac{dy}{dt} & = & k_1 x - k_2 y + k_3 z \\ \dfrac{dz}{dt} & = & k_2 y - k_3 z \end{array}\right.$$

On suppose que, pour cette réaction : k_1=1 ; k_2=1 ; k_3=0,5 ; $x(0)$=1 ; $y(0)$=0 ; $z(0)$=0.
On obtient ainsi le système d'équations différentielles :

$$\left\{\begin{array}{lcll} x' & = & -x & (1) \\ y' & = & x - y + 0{,}5z & (2) \\ z' & = & y - 0{,}5z & (3) \end{array}\right.$$

avec les conditions initiales $x(0) = 1$; $y(0) = 0$; $z(0) = 0$.

Partie A

1. Résoudre l'équation (1). En déduire $x(t)$ en tenant compte de la condition initiale.
2. a) En utilisant l'équation (3), exprimer y en fonction de z et z' puis en déduire l'expression de y' en fonction de z'' et z'.
b) En reportant dans l'équation (2) les résultats obtenus aux questions 1. et 2.a), en déduire que z est solution de l'équation différentielle (E) : $z" + 1{,}5z' = e^{-t}$
3. a) Déterminer le réel α de sorte que la fonction φ : $t \to \alpha e^{-t}$ soit une solution de l'équation (E).
b) Résoudre l'équation différentielle (H) : $z'' + 1{,}5z' = 0$.
En déduire que les solutions de (E) sont les fonctions z définies par :

$$z(t) = \lambda e^{-1{,}5t} + \mu - 2e^{-t}$$

où λ et μ sont des constantes réelles.

c) En utilisant l'équation (3), en déduire l'expression de $y(t)$.
d) Sachant que $y(0) = 0$ et $z(0) = 0$, déterminer les constantes λ et μ.

Partie B

On considère les fonctions f, g et h définies sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(t) & = & e^{-t} \\ g(t) & = & e^{-t} - \dfrac{4}{3}e^{-1{,}5t} + \dfrac{1}{3} \\ h(t) & = & -2e^{-t} + \dfrac{4}{3}e^{-1{,}5t} + \dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

1. a) Déterminer, en justifiant, la limite en $+\infty$ de la fonction g.
b) Montrer que, pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0; +\infty[$, $g'(t)$ peut s'écrire $g'(t) = e^{-t}(-1 + 2e^{-0{,}5t})$.
c) En déduire que la fonction g admet un maximum en un réel t_0 (on donnera la valeur exacte de t_0). Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du maximum de g (la valeur exacte n'est pas demandée).
2. Les trois courbes données sur le graphique en annexe sont les représentations graphiques des fonctions$f$, g et h.
a) Indiquer sur ce graphique laquelle des trois courbes est la courbe C_g, laquelle est C_f, laquelle est C_h en justifiant la réponse.
b) On admet que $f(t)$, g(t), $h(t)$ sont les concentrations respectives des produits A, B, C à l'instant t. Déterminer à l'aide du graphique une approximation de l'instant t_1, à partir duquel la concentration de A devient inférieure à celle de B et une approximation de l'instant t_2 à partir duquel la concentration de C devient supérieure à celle de B. Placer t_1 et t_2 sur le graphique.

Exercice 2 (8 points)

Une entreprise conditionne et commercialise un désherbant liquide à base de glyphosate en bidons de 540 millilitres.

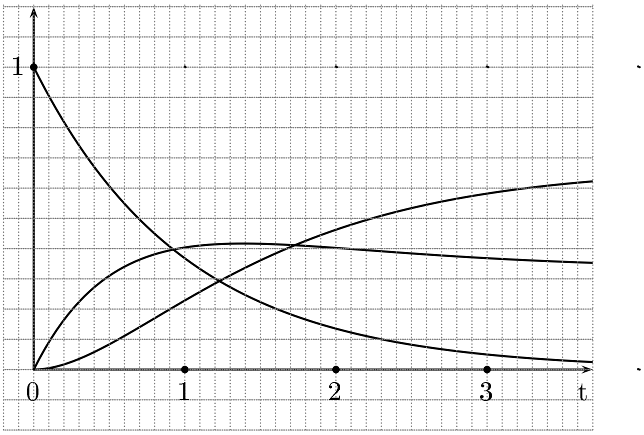
Partie A

La machine qui remplit les bidons peut être réglée au moyen d'un dispositif gradué en millilitres. Lorsque celui-ci est réglé sur la valeur m, le volume moyen de désherbant par bidon est m. On suppose que la variable aléatoire X qui, à tout bidon choisi au hasard dans la production, associe le volume en millilitres de désherbant qu'il contient, suit une loi normale de moyenne m et d'écart type 5.
1. On règle le dispositif sur la valeur $m = 540$. Calculer la probabilité de l'événement « $535 \leqslant X \leqslant 545$ ». On arrondira le résultat à 10^{-3} près.
2. Sur quelle valeur m faut-il régler le dispositif pour que la probabilité de l'événement « $X \leqslant 550$ » soit égale à 0,95? (La réponse sera arrondie à l'unité.)
3. Un bidon est commercialisable s'il contient au moins 530 millilitres de désherbant. On suppose, dans cette question, que le réglage est tel que 2 % des bidons ne sont pas commercialisables. On prélève au hasard 100 bidons dans la production. La production est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler le prélèvement à un tirage avec remise. On désigne par Y la variable aléatoire qui, à tout échantillon ainsi obtenu, associe le nombre de bidons de l'échantillon non commercialisables.
a) Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire Y? Quels en sont les paramètres? Justifier. Calculer l'espérance mathématique de Y.
b) On admet qu'on peut approcher la loi précédente par une loi de Poisson. Quel est le paramètre de cette loi de Poisson.
c) Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité de l'événement « L'échantillon contient au plus 3 bidons non commercialisables ».

Partie B

Une grande surface de jardinerie qui reçoit un lot important de bidons de ce désherbant décide de contrôler la teneur en glyphosate du désherbant dont la valeur annoncée par le fabricant est de 170 g/L. On désigne par μ la moyenne en g/L de la teneur en glyphosate des bidons du lot reçu par la grande surface. On prélève au hasard un échantillon de 50 bidons dans le lot reçu afin de l'adresser à un laboratoire. Le lot est supposé assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise. On note $\overline{G}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 50 bidons prélevés au hasard dans le lot, associe la teneur moyenne en glyphosate en g/L de ces bidons. On admet que la variable aléatoire $\overline{G}$ suit une loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type 0,9.
La grande surface construit un test d'hypothèse
l'hypothèse nulle est $H_0 : \mu = 170$
l'hypothèse alternative est $H_1 : \mu \neq 170$
le seuil de signification est fixé à 5 %
1. Sous l'hypothèse nulle, déterminer le réel h tel que $P(170 - h \leqslant \overline{G} \leqslant 170 + h) = 0{,}95$.
2. Énoncer la règle de décision du test.
3. Le résultat obtenu par le laboratoire pour la teneur moyenne en glyphosate des bidons de l'échantillon qui a été prélevé est $\overline{x} = 171{,}4$ g/L. Au vu de ce résultat, la grande surface estime que le produit est conforme à ce qu'annonce le fabricant. A-t-elle raison? Justifiez votre réponse.

Annexe



FONCTION DE RÉPARTITION DE LA LOI NORMALE $\mathcal{N}(0,1)$

Probabilité d'avoir une valeur inférieure à t : $P(T \leq t) = \Phi(t)$

t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91308	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3,1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3,2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3,3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3,4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3,5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3,6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3,7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3,8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3,9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997

Pour $t < 0$, prendre le complément à 1 de la valeur lue dans la table pour $|t|$.

Exemple : $P(X \leq -1{,}2) = 1 - \Phi(1{,}2) \simeq 1 - 0{,}88493 \simeq 0{,}11507$