

EXERCICE 2 : éléments de correction

Partie 1 : Plan d'expériences

1. Matrice complète des interactions.

Expérience	I	X1	X2	X1X2	Rendement
1	1	-1	-1	+1	0,05
2	1	+1	-1	-1	0,10
3	1	-1	+1	-1	0,15
4	1	+1	+1	+1	0,25

La question posée est très mal rédigée. En effet il n'y a qu'une seule interaction qui est X_1X_2 . La question telle qu'elle est posée pousse à ne donner que la quatrième colonne du tableau donné plus haut.

Je propose la rédaction suivante : Donner la matrice complète des expériences et des effets.

2. Calculer les estimations ponctuelles des effets.

$$a_0 = \frac{0,05 + 0,10 + 0,15 + 0,25}{4} = 0,1375$$

$$a_1 = \frac{-0,05 + 0,10 - 0,15 + 0,25}{4} = 0,0375$$

$$a_2 = \frac{-0,05 - 0,10 + 0,15 + 0,25}{4} = 0,0625$$

$$a_{12} = \frac{0,05 - 0,10 - 0,15 + 0,25}{4} = 0,0125$$

3. Donner l'expression du modèle.

$$\text{RDT} = 0,1375 + 0,0375X_1 + 0,0625X_2 + 0,0125X_1X_2$$

4. Interprétation.

a) Que représente le coefficient a_0 par rapport à ces expériences ?

Le coefficient a_0 représente la moyenne des réponses, mais c'est aussi et c'est surtout la prévision du modèle au centre du domaine.

On sait que dans la pratique, pour tester le modèle, on fait en plus des quatre expériences, deux et mieux trois expériences au centre du domaine. Ces résultats permettent d'une part de s'assurer que le modèle donne une réponse au centre pas trop éloignée de la moyenne des réponses

expérimentales mais surtout de calculer l'écart-type expérimental qui permettra d'effectuer les tests statistiques nécessaires.

b) En interprétant les effets des deux facteurs, quelles sont les conditions optimales pour la fabrication du trichlorométhane ?

Lorsque X_1 , c'est-à-dire la durée passe du niveau -1 au niveau $+1$, c'est-à-dire de 10 minutes à 20 minutes le rendement augmente de $2 \times 0,0375$ soit en pourcentage 7,5 %.

Lorsque X_2 , c'est-à-dire la température passe du niveau -1 au niveau $+1$, c'est-à-dire de 50 °C à 100 °C le rendement augmente de $2 \times 0,0625$ soit en pourcentage 12,5 %.

Ainsi, les conditions optimales pour obtenir un rendement maximum sont : une température de 100 °C durant 20 minutes.

Partie 2 : Étude statistique

Les valeurs approchées seront arrondies au millième le plus proche.

On suppose que l'estimation ponctuelle de a_1 est 0,038. On considère que l'effet du facteur X_1 est estimé par une variable aléatoire qui suit une loi normale d'écart-type $\sigma_e = 0,005$. Calculer un intervalle de confiance de l'effet du facteur X_1 au seuil de risque de 5%.

L'intervalle de confiance au risque de 5 % est donné par :

$$\left[a_1 - 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, a_1 + 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

avec $a_1 = 0,038$, $\sigma = 0,005$ et $n = 4$.

On obtient l'intervalle :

$$[0,033 ; 0,043]$$

Pour aller plus loin.

Les réflexions qui suivent concernent des raisonnements statistiques courant dans les laboratoires mais qui sont largement hors-programme des classes de BTS et, donc, ne peuvent pas faire l'objet de question à l'examen.

Si l'on veut tester la validité du modèle linéaire, il est nécessaire de connaître soit l'écart-type expérimental soit l'écart-type résiduel. L'écart-type expérimental nécessite des expériences supplémentaires au centre du domaine expérimental dont un coût supplémentaire. L'écart-type résiduel peut, lui, se calculer facilement en négligeant certaines interactions.

En supposant, ici, que l'on néglige l'interaction d'ordre 2, on peut calculer alors l'écart-type résiduel avec un ddl = 1. On obtient alors les résultats suivants (obtenu avec le logiciel LU-

MIERE) :

Variable	Coefficient	Ecart-type	t Student	Confiance (%)	risque (%)
X1	0,0375	0,0125	3	79,52	20,48
X2	0,0625	0,0125	5	87,43	12,57

Le test T de Student teste chaque coefficient à 0 (hypothèse nulle : le coefficient est nul). La valeur de la confiance montre que les valeurs obtenues pour les coefficients sont non significatives, ce ne sont que du « bruit ». Poursuivons par l'analyse de la variance.

Source	Somme des carrés	Ddl	Carrés moyens	F de Fisher	confiance (%)
Régression	0,0213	2	0,01063	17	83,10
Résidus	0,0006	1	0,0006		
Total	0,0219	3	0,0073		
ECT résiduel	0,0250	Ddl =1			

Ce qui montre que le modèle linéaire n'est pas adapté. Il faudrait, par exemple, essayer un modèle quadratique.