De l'algorithmique au soleil. . .

Séminaire programme STi2D

E.Chauvet & S.Faucher

Académie de Montpellier
Lycée DHUODA - Nîmes

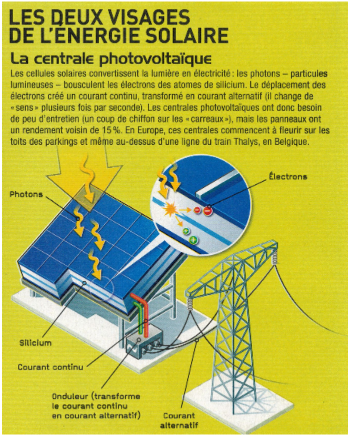
Atelier n° 2 - Lycée Jean Zay - 26 septembre 2012

Un numéro spécial de Science et Vie Junior

Produire de l’énergie à partir de l’énergie solaire

Par « transformation »

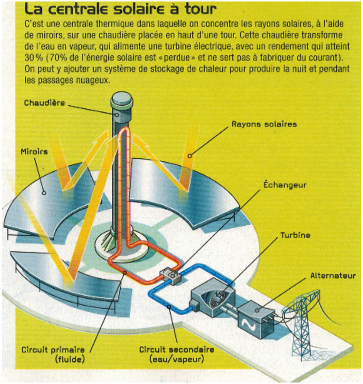
Utilisation de panneaux photovoltaïques.



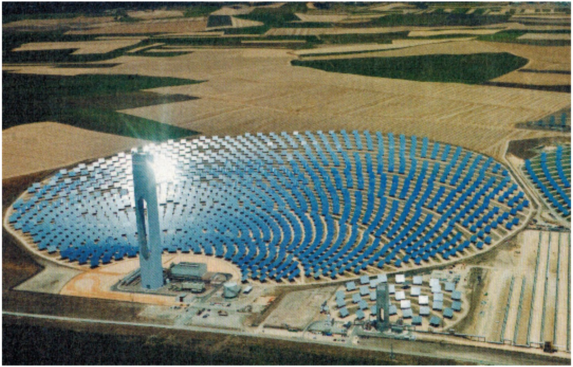
Produire de l'énergie à partir de l'énergie solaire

Par « concentration »

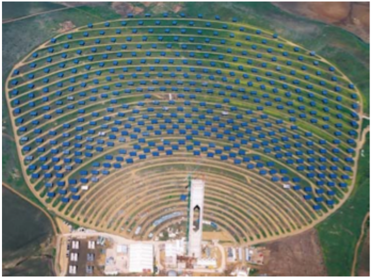
En concentrant les rayons lumineux en un point.

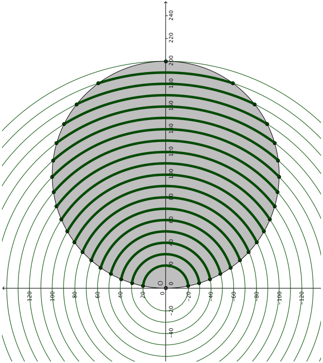


La centrale solaire thermique PS20 de Sanlucar la Mayor



Le réveil du matheux. . . qui voit ça. . .



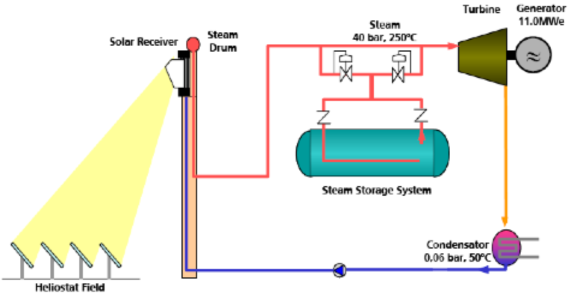


. . . et qui s’est posé la question :

Comment évaluer la quantité d’énergie produite par une telle centrale ?

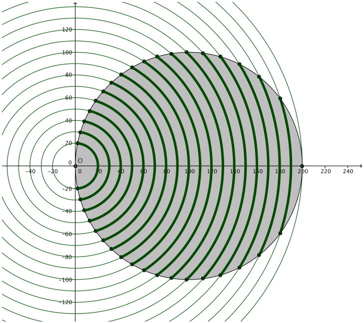
La réponse du physicien :

Vu qu'une telle centrale fonctionne ainsi. . .

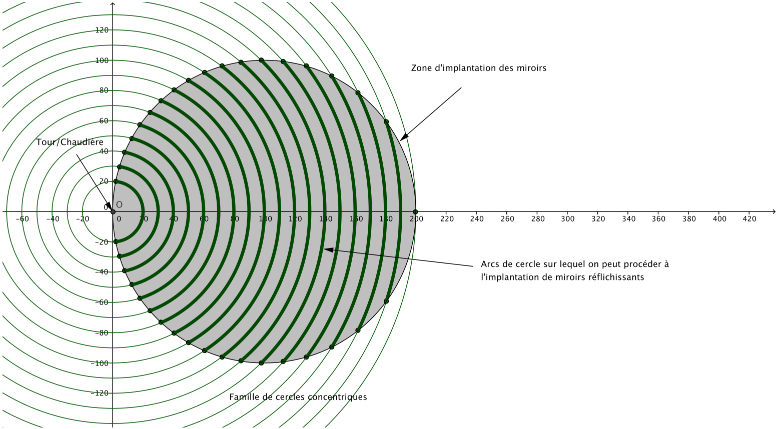


. . .le nombre de miroirs déterminera la quantité de lumière réfléchie sur la tour.

Géométrie de l'installation

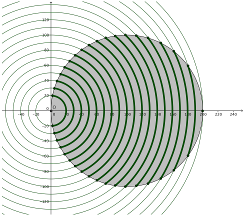


Dans l'oeil du matheux

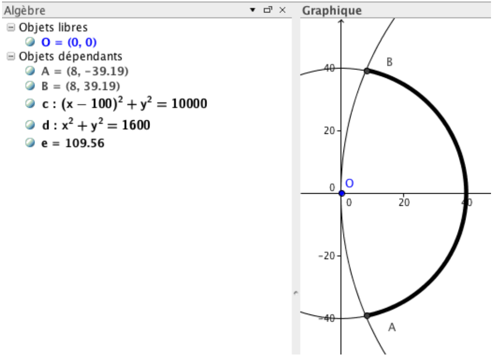


Ce que nous allons calculer :

La longueur cumulée des arcs de cercle situés dans la zone d'implantation.



Une particularité de Geogebra



Lorsqu'un objet est construit avec GeoGebra, le logiciel, s'il le peut, en calcule une « mesure ».

Premier obstacle. . .

La construction de la figure

- Allons nous construire la figure arc de cercle par arc de cercle ?
- Allons nous devoir récupérer mesure par mesure et faire les calculs à la main ?

Réponse : Utilisation de séquences et de listes

`Séquence` et `Liste`

Les logiciels de géométrie dynamique, tel `Geogebra`, permettent de programmer la construction d'une figure géométrique présentant des aspects « répétitifs », capacité que nous allons exploiter ici.
Nous utiliserons les commandes `Séquence` et `Liste`.

Description algorithmique de la construction

Nous construirons au préalable un cercle $\mathcal{C}$ de rayon 100.

Ébauche d'une démarche algorithmique de la construction :

- Construire une famille de cercles concentriques dont les rayons augmentent par pas de 10 ;
- Construire les points d'intersection entre cette famille de cercles concentriques et le cercle $(\mathcal{C})$ définissant la zone d'implantation ;
- Construire les arcs de cercle sur lequel on peut positionner les miroirs réfléchissants ;

puis :

- Calculer la longueur de ces arcs de cercle,
- Calculer la somme de ces longueurs.

Les instructions saisies

```
Liste1=Séquence[Cercle[(0, 0), 10n], n, 2, 20]
Liste2=Séquence[Intersection[c,Elément[liste1,n]],
           n, 1, 20]
Liste2'=Symétrie[liste2, y = 0]
Liste3=Séquence[Arc[Elément[liste1, n],
           Elément[liste2, n],
                   Elément[liste2', n]], n, 1, 20]
a=Somme[Liste3, 18]
```

Construction GeoGebra

Une remarque. . .

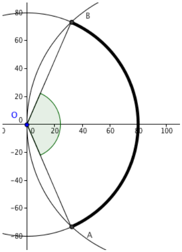
A été mis de côté dans cette démarche la « complexité mathématique » du problème, `GeoGebra` s'en étant chargé. . . .

Nous devrions être capable de décortiquer le raisonnement mathématiques et de compléter la démarche algorithmique déjà mise en avant, en l'axant non plus sur l'automatisation de la construction, mais sur celle des calculs à réaliser.

Identification des calculs à mener

Comme pour la construction géométrique, notre problème réside pour chacun des arcs de cercles en :

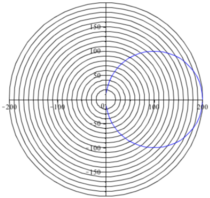
- déterminer les coordonnées des points d'intersection entre le cercle support de l'arc de cercle et le cercle d'implantation ;
- faire calculer l'angle au centre ;
- faire calculer la longueur de l'arc de cercle ;



puis cumuler les longueurs obtenues.

Construction géométrique avec Maple

```
> restart;
> r := n -> 10*n;
> with(plottools);
> with(plots);
> c := seq(circle([0, 0], r(k)),
           k = 2 .. 20);
> d := circle([100, 0], 100,
           color = blue);
> display(c, d, scaling = constrained);
```



mais ce n'est pas pour cela que nous sommes allés chercher Maple...

Feuille de calcul Maple

Recherche des points d'intersection

Feuille de calcul `Maple`

Deux options se présentent a priori :

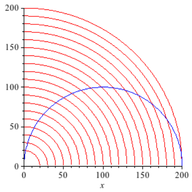
- Travailler avec des équations de cercle ;
- Utiliser des fonctions ;

en remarquant d'éventuelles symétries.

Choix retenu

Nous travaillerons avec des fonctions.

```
> f := (x, k)->sqrt(r(k)^2-x^2);
> g :=x->sqrt(10000-(x-100)^2) ;
> e1 := seq(plot(f(x, k),
           x = 0 .. 200),
               k = 2 .. 20);
> e2 := plot(g(x), x = 0 .. 200,
           color = blue);
> display(e1, e2, scaling =
           constrained);
```



Résolution « automatisée » pas à pas

Feuille de calcul `Maple`

```
> # Recherche des abscisses des points
      d'intersection entre les
            courbes f(x,k) et g
> i := seq(solve(f(x, k)^2 = g(x)^2, x),
             k = 2 .. 20);
```

$$i := 2, \frac{9}{2}, 8, \frac{25}{2}, 18, \frac{49}{2}, 32, \frac{81}{2}, 50, \frac{121}{2}, 72, \frac{169}{2}, 98, \frac{225}{2}, 128, \frac{289}{2}, 162, \frac{361}{2}, 200$$

Résolution « automatisée » pas à pas

Feuille de calcul `Maple`

```
> # Recherche de l'angle au centre des
        arcs de cercles rouges
> with(LinearAlgebra);
> a := seq(VectorAngle(<[1, 0]>,
         <[i[k], f(i[k], k+1)]>, k = 1 .. 19);
```

$$a := \arccos(1/10),\ \arccos\left(\frac{3}{20}\right),\ \arccos(1/5),\ \arccos(1/4),\ \arccos(3/10),\ \arccos\left(\frac{7}{20}\right),\ \arccos(2/5),\ \arccos\left(\frac{9}{20}\right),\ 1/3\,\pi,\ \arccos\left(\frac{11}{20}\right),\ \arccos(3/5),\ \arccos\left(\frac{13}{20}\right),\ \arccos\left(\frac{7}{10}\right),\ \arccos(3/4),\ \arccos(4/5),\ \arccos\left(\frac{17}{20}\right),\ \arccos\left(\frac{9}{10}\right),\ \arccos\left(\frac{19}{20}\right),\ 0$$

```
> b := seq(evalf(convert(VectorAngle(<[1, 0])>,
                <[i[k], f(i[k], k+1)]>,
                       degrees)), k = 1 .. 19);
```

$$b := 84.26082953\,degrees,\ 81.37307344\,degrees,\ 78.46304096\,degrees, \ldots$$

Résolution « automatisée » pas à pas

Feuille de calcul `Maple`

```
> # On calcule la longueur de chaque arc de cercle
> l := k->r(k+1)*a[k]:
> seq(l(k), k = 1 .. 19);
```

$$20 \arccos(1/10),\ 30 \arccos\left(\frac{3}{20}\right),\ 40 \arccos(1/5),\ 50 \arccos(1/4),\ 60 \arccos(3/10),\ 70 \arccos\left(\frac{7}{20}\right),\ 80 \arccos(2/5),\ 90 \arccos\left(\frac{9}{20}\right),\ \frac{100}{3}\pi,\ 110 \arccos\left(\frac{11}{20}\right),\ 120 \arccos(3/5),\ 130 \arccos\left(\frac{13}{20}\right),\ 140 \arccos\left(\frac{7}{10}\right),\ 150 \arccos(3/4),\ 160 \arccos(4/5),\ 170 \arccos\left(\frac{17}{20}\right),\ 180 \arccos\left(\frac{9}{10}\right),\ 190 \arccos\left(\frac{19}{20}\right),\ 0$$

```
> evalf(%);
```

29.41257812, 42.60684162, 54.77753624, 65.90580360, 75.96622038, 84.92576561, 92.74235848, 99.36278892, . . .

```
> 2.*%
```

58.82515624, 85.21368324, 109.5550725, 131.8116072, 151.9324408, 169.8515312, 185.4847170, . . .

Résolution « automatisée » pas à pas

Feuille de calcul `Maple`

```
> # On somme ces valeurs pour obtenir la moitié
            de la longueur disponible
> sum(l(k), k = 1 .. 19);
```

$$20\ \arccos(1/10) + 30\ \arccos\left(\frac{3}{20}\right) + 40\ \arccos(1/5) + 50\ \arccos(1/4) + 60\ \arccos(3/10) + 70\ \arccos\left(\frac{7}{20}\right) + 80\ \arccos(2/5) + 90\ \arccos\left(\frac{9}{20}\right) + \frac{100}{3}\pi + 110\ \arccos\left(\frac{11}{20}\right) + 120\ \arccos(3/5) + 130\ \arccos\left(\frac{13}{20}\right) + 140\ \arccos\left(\frac{7}{10}\right) + 150\ \arccos(3/4) + 160\ \arccos(4/5) + 170\ \arccos\left(\frac{17}{20}\right) + 180\ \arccos\left(\frac{9}{10}\right) + 190\ \arccos\left(\frac{19}{20}\right)$$

```
> # D'où la longueur totale disponible
> 2*evalf(%);
```

$$3082.410968$$

Tout d'un coup. . .


```
> longueur := 0;
  for k from 2 to 20 do
    i := solve(f(x, k)^2 = g(x)^2, x);
    a := VectorAngle[LinearAlgebra](<[1, 0])>,<[i, f(i, k)]>);
    l := r(k)*a;
    longueur := longueur+2*l;
  end:
> evalf(longueur);
```

3082.410967

Mathématiquement, que reste-t-il à regarder ?

Comment s'y prend réellement `Maple`

- pour résoudre les équations en jeu ?
- pour calculer les angles recherchés ?

et nous pouvons montrer aux élèves qu'ils ont tous les élements « techniques » pour y arriver…

Feuille de calcul `Maple`

Conclusion

Il n'y a pas…

d'effet boîte noire !