

Asservissement et frottement

FRANÇOIS LOUF [1]

On considère souvent l'effet des frottements secs comme négligeable, mais cela n'est pas possible lorsque le système est irréversible. Voici une démarche de prise en compte de ces frottements secs dans la modélisation de systèmes mécaniques asservis.

Les systèmes mécaniques asservis, tels que les supports utilisés pour les travaux pratiques dans nos différentes formations, ne sont pas exempts de frottements. Mais, très souvent, les modèles que nous établissons n'en tiennent pas compte, soit parce que les effets de ces frottements sont assez peu visibles dans des cas d'utilisation standard, soit parce que l'on considère qu'ils sont trop complexes à modéliser. L'objectif ici est donc de montrer comment on peut introduire ces frottements secs dans les modèles de comportement analytiques, puis numériques.

Dans un premier temps, nous nous intéresserons au support de travaux pratique MaxPID [1a], dans lequel nous considérons que la liaison entre bras et bâti est imparfaite. Un couple de frottement sec, indépendant du chargement, sera simplement introduit dans le modèle. Nous montrerons, sur un cas particulier où l'existence de frottement sec peut être mise en évidence expérimentalement, que la réponse obtenue par le modèle non linéaire est alors pertinente. Sur ce cas particulier, nous montrerons que l'existence de frottement permet également de bien distinguer les rôles des actions intégrale et proportionnelle d'un correcteur PI.

Dans un second temps, nous montrerons comment modéliser un système vis-écrou dont le comportement est paramétré par le coefficient de frottement et le pas de la vis. Ainsi, le modèle construit permettra de représenter à la fois des systèmes réversibles et des systèmes irréversibles, et sa réponse pourra être rapprochée de résultats obtenus sur le robot Jockey, dont un axe est animé par un système roue-vis lui aussi irréversible et asservi en vitesse.

Mots-clés

automatismes, dynamique, travaux pratiques

Du frottement dans MaxPID

Présentation du support

Le MaxPID est un support désormais très connu, commercialisé par la société Didastel. Il s'agit d'une partie didactisée d'un bras de robot de récolte d'oranges développé par la société Pellenc.

Le système est composé d'un bras \underline{b} articulé par rapport au bâti 0 [1a]. Ce bras peut être muni de masses additionnelles à son extrémité. Un moteur à courant continu permet de l'animer via un mécanisme de transformation de mouvement. Pour cela, le rotor du moteur entraîne via un joint d'Oldham une vis \underline{v} . Cette vis est liée à un écrou \underline{e} , lui-même articulé avec le bras \underline{b} . Le stator s du moteur est également articulé avec le bâti.

La démarche de construction du modèle de comportement est la suivante :

- ① Écriture de la loi d'entrée-sortie cinématique
- ② Introduction d'un couple de frottement dans la liaison pivot entre le bras et le bâti
- ③ Écriture de la loi de mouvement
- ④ Modélisation du moteur et de l'asservissement en position

Le modèle cinématique

La modélisation de la chaîne cinématique ainsi que le paramétrage associé sont présentés en [1a]. L'écriture de la fermeture de chaîne géométrique

$$\vec{OA} + \vec{AC} + \vec{CB} + \vec{BO} = \vec{0}$$

soit

$$a\vec{x} + c\vec{x}_1 - \lambda\vec{x}_2 - b\vec{y} = \vec{0} \quad (1)$$

permet d'écrire, après projection, les deux équations scalaires suivantes :

$$a + c \cos\beta - \lambda \cos\alpha = 0 \quad (1.1)$$

$$c \sin\beta - \lambda \sin\alpha - b = 0 \quad (1.2)$$

Enfin, après avoir éliminé l'inconnue α , on trouve le lien entre λ et β :

$$\lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2c(a \cos\beta - b \sin\beta) \quad (1.3)$$

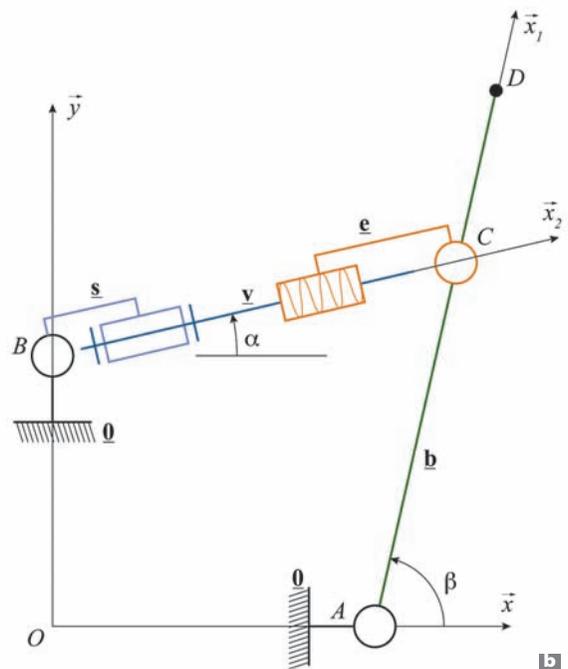
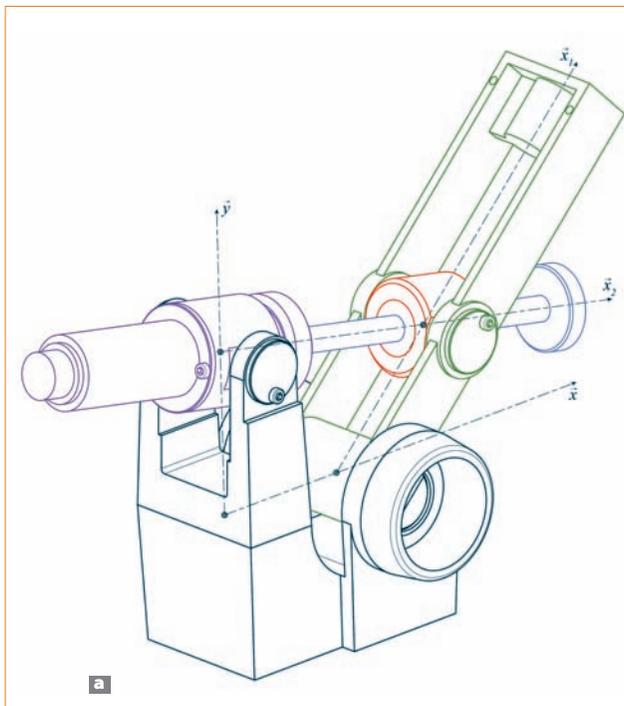
Cette loi d'entrée-sortie, qui ne donne pas explicitement le paramètre angulaire β en fonction de λ , peut être modifiée en remarquant que :

$$a \cos\beta - b \sin\beta = A \cos(\beta + \Phi)$$

avec

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{et} \quad \tan\Phi = b/a$$

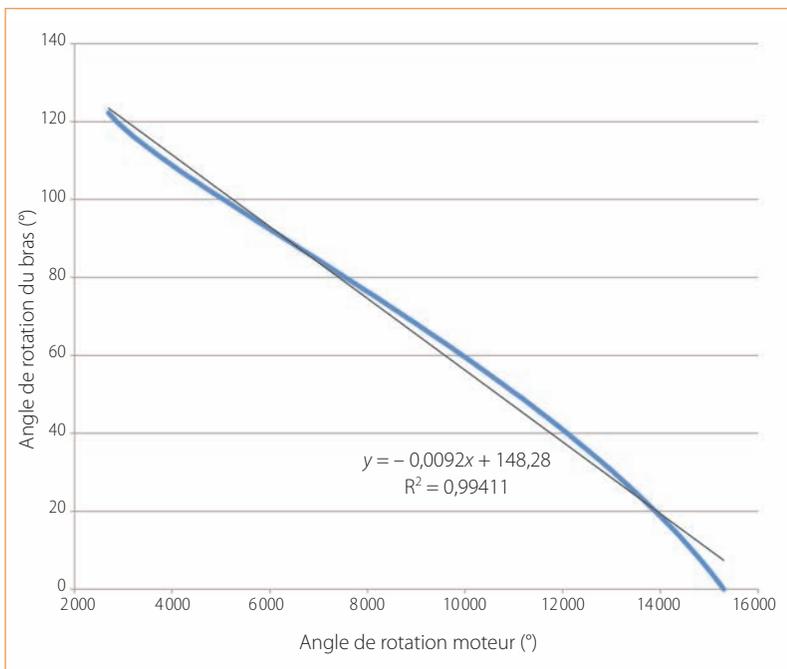
[1] Maître de conférences à l'ENS de Cachan (94), département Génie mécanique (DGM, www.dgm.ens-cachan.fr). Courriel : francois.louf@dgm.ens-cachan.fr.



1 Le système MaxPID

a Modèle CAO

b Modélisation cinématique plane proposée



2 Représentation graphique de la loi d'entrée-sortie géométrique calculée

Finalement, on trouve le lien entre l'angle du bras et la position de l'écrou sur la vis :

$$\beta = \arccos[(\lambda^2 - (a^2 + b^2 + c^2)) / 2cA] - \Phi \quad (1.4)$$

L'angle du bras est donné en fonction de l'angle moteur via la relation cinématique de la liaison hélicoïdale :

$$\beta = \arccos[((p\theta / 2\pi)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)) / 2cA] - \Phi \quad (1.5)$$

La loi d'entrée-sortie en vitesse peut également être trouvée en dérivant la relation implicite (1.3) :

$$\lambda \dot{\lambda} = -c\dot{\beta}(a \sin\beta + b \cos\beta) \quad (1.6)$$

On trouve alors le lien entre la vitesse angulaire du bras et la vitesse relative écrou/vis :

$$\dot{\beta} = -\dot{\lambda} \frac{\lambda}{c(a \sin\beta + b \cos\beta)} = -\dot{\lambda} \frac{\lambda}{cA \sin(\beta + \Phi)} \quad (1.7)$$

L'angle moteur est considéré nul lorsque la distance λ est nulle. On constate sur la figure 2 que la loi d'entrée-sortie géométrique est finalement assez peu non linéaire. Si on cherche la droite des moindres carrés qui s'approche le plus de cette courbe, on trouve un rapport de réduction global d'environ $r = 100$. Cet ordre de grandeur constitue un élément important pour la détermination des inerties prépondérantes (voir « L'écriture de l'équation de mouvement » plus loin).

La prise en compte du frottement sec

On considère que des frottements secs existent dans les différentes liaisons. Comme les liaisons pivots sont réalisées au moyen de paliers lisses, les résistances sont assez importantes. Pour simplifier la démarche, on modélisera uniquement un couple de frottement sec dans la liaison pivot liant le bras au bâti, mais la prise en compte des autres liaisons pourrait se faire de la même manière. Le couple de frottement peut être modélisé par les lois classiques de Coulomb. Dans ce cas, les efforts résistants vont être dépendants des efforts normaux. Afin de simplifier la mise en place d'un modèle, on utilisera un modèle de Tresca. Dans ce type de lois de frottement, le seuil d'effort tangentiel pour lequel il y a glissement est indépendant des efforts normaux. Ainsi deux états sont possibles :

- Si la vitesse de glissement est nulle, il y a adhérence, et le couple C_f peut être compris strictement entre deux bornes $C_{f,0}$ et $-C_{f,0}$.

● Si la vitesse de glissement est non nulle, le couple résistant C_f s'oppose à celle-ci.

Ce modèle simple est illustré graphiquement par la figure 3. Celle-ci montre clairement la relation non biunivoque entre le couple de frottement et la vitesse de glissement. La complexité de ce type de modèles le rend difficile à implémenter numériquement. Pour cette raison, ce type de lois est classiquement régularisé en utilisant, par exemple, le modèle suivant :

$$C_f = -2 / \pi C_{f,0} \arctan(\tau\omega) \quad (2)$$

Le paramètre τ de ce modèle permet de tendre vers la loi initiale en « raidissant » le comportement à l'origine. Néanmoins, quel que soit ce paramètre, il sera toujours impossible de représenter correctement l'adhérence : une vitesse de glissement, même faible, est indispensable pour qu'un couple résistant existe. Par ailleurs, si l'on augmente trop ce paramètre, des problèmes numériques peuvent apparaître.

L'écriture de l'équation de mouvement

On isole l'ensemble {vis, écrou, bras}, et on écrit le théorème de l'énergie cinétique dans un référentiel lié au bâti. L'intérêt est ici d'utiliser les relations cinématiques précédemment établies.

Afin de simplifier l'équation de mouvement, on réalise tout d'abord un calcul préliminaire des inerties en présence afin d'en négliger, éventuellement, certains termes.

D'après la documentation constructeur, l'inertie du rotor du moteur est de $J_r = 69,7 \text{ g}\cdot\text{cm}^2$, soit $J_r = 69,7 \times 10^{-7} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. Avec un rapport de réduction de l'ordre de 100, comme on l'a vu précédemment, on trouve une inertie équivalente ramenée à l'axe de rotation du bras de l'ordre de $J_{r,eq} = 69,7 \times 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. Comparativement, l'inertie équivalente ramenée sur l'axe de rotation du bras associée aux masses additionnelles vaut $M_a d^2$, soit au maximum $14,94 \times 10^{-2} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. La comparaison de ces deux termes montre qu'il est impossible de négliger l'inertie du rotor dans l'étude. La vis a une inertie linéique de $10,8 \times 10^{-6} \text{ kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{m}^{-1}$, ce qui donne ici, pour une vis d'une vingtaine de centimètres, $J_v = 2,16 \times 10^{-6} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. Ce terme est donc du même ordre de grandeur que l'inertie du rotor, dont on a montré qu'elle était importante. Ramenée à l'axe de rotation du bras, on trouve une inertie équivalente de $J_{v,eq} = 21,6 \times 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.

Enfin, l'inertie du bras calculée en un point de l'axe de rotation via un modèle CAO est de $J_b = 5 \times 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, ce qui paraît relativement négligeable par rapport aux deux autres termes précédemment calculés.

L'énergie cinétique totale de ce système est de la forme :

$$E_c = \frac{1}{2}(M_a d^2 + J_b)\dot{\beta}^2 + \frac{1}{2}(J_r + J_v)\dot{\theta}^2 \quad (3.1)$$

Afin de simplifier légèrement l'étude, on néglige la variation du rapport $\dot{\beta} / \dot{\theta}$ en fonction de l'angle β , ce

qui permet d'écrire l'énergie cinétique uniquement en fonction de $\dot{\beta}$:

$$E_c = \frac{1}{2}(M_a d^2 + J_b + J_{eq})\dot{\beta}^2 \quad (3.2)$$

avec $J_{eq} = (J_r + J_v)r^2$ et $r = 100$

Les puissances motrices, associées à la pesanteur et dissipées par frottement, sont respectivement de la forme :

$$P_m = C_m \frac{2\pi cA \sin(\beta + \Phi)}{\lambda} \dot{\beta}, \quad P_p = -M_a g d \cos(\beta) \dot{\beta}, \quad P_i = C_f \dot{\beta} \quad (4)$$

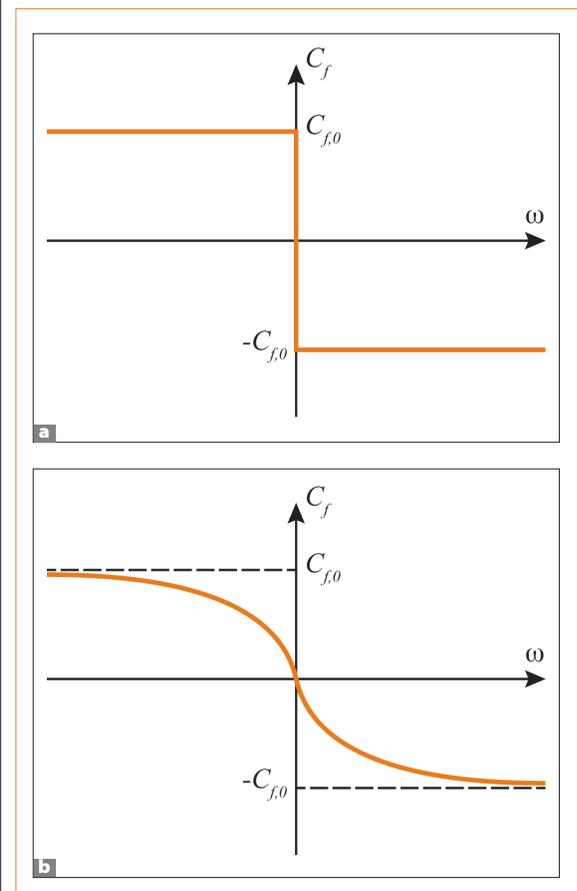
Le théorème de l'énergie cinétique fournit alors l'équation de mouvement recherchée :

$$dE_c / dt = P_m + P_p + P_i$$

soit

$$(M_a d^2 + J_b + J_{eq})\ddot{\beta} = C_m \frac{2\pi cA \sin(\beta + \Phi)}{n \lambda} - M_a g d \cos(\beta) + C_f \quad (5)$$

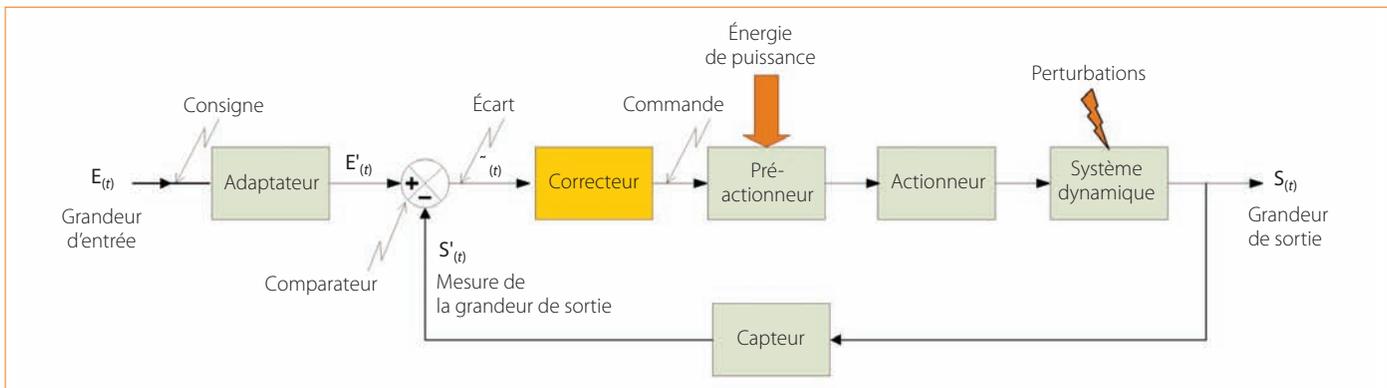
qui apparaît alors, malgré les simplifications, comme non linéaire, à cause de la cinématique et du couple de frottement qui dépend de la vitesse angulaire β .



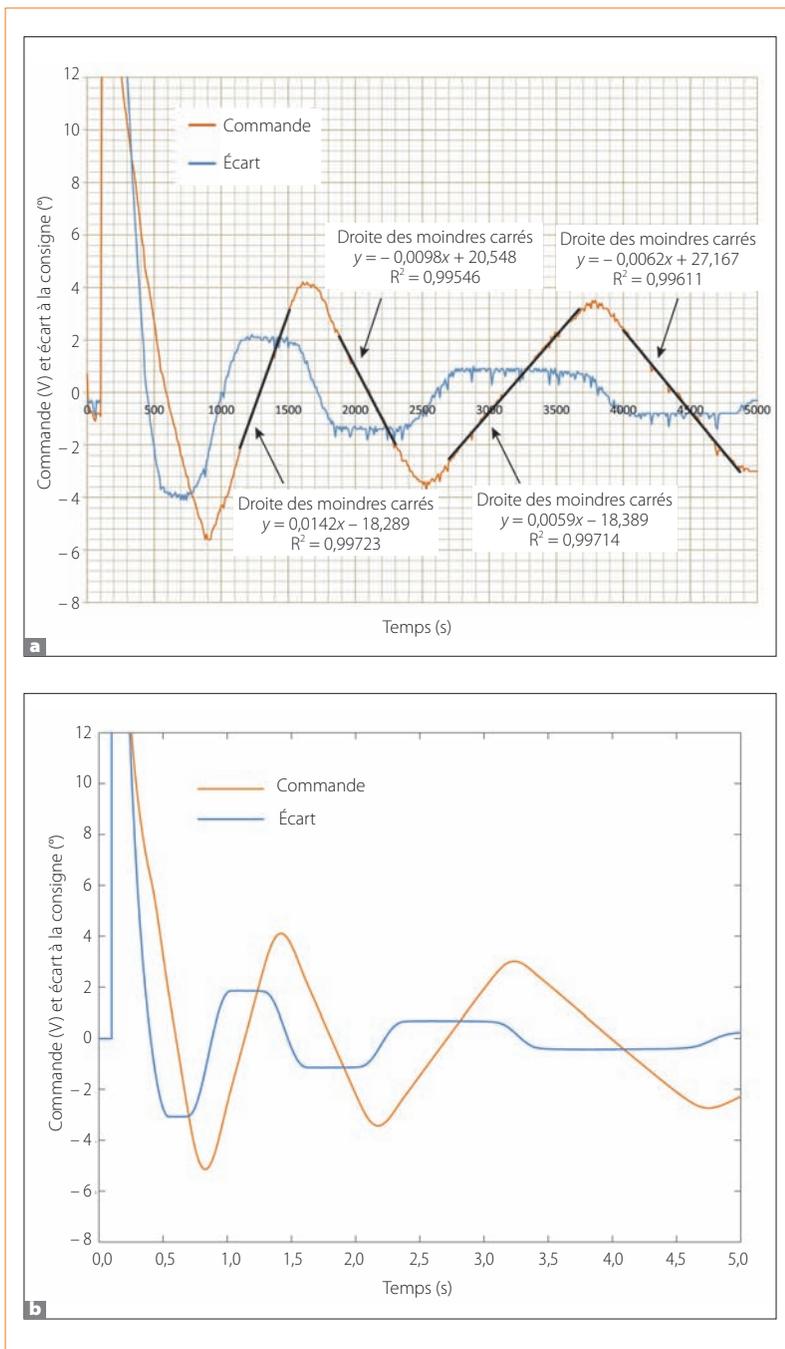
3 Traduction graphique des lois de frottement de Tresca et régularisation envisagée pour une résolution numérique plus aisée du problème non linéaire

a Loi de frottement de Tresca

b Loi de frottement de Tresca régularisée



4 Schéma générique représentatif d'un système asservi



5 Représentations de la tension moteur et de l'écart entre la consigne et la position atteinte

- a Réponse expérimentale
- b Réponse du modèle numérique proposé

Le comportement du moteur

Les équations du moteur à courant continu sont les suivantes :

$$U_m = e + R_i + L \frac{di}{dt} \quad C_m = K_i \quad e = K\omega_m$$

Elles permettent d'exprimer le couple moteur C_m en fonction de la tension d'alimentation U_m donnée et de la vitesse de rotation courante ω_m . Les différentes constantes peuvent être trouvées dans la documentation constructeur.

L'asservissement

Pour réaliser un asservissement en position du bras, l'angle β est mesuré, comparé à la consigne β_c , et l'écart constaté est interprété par un correcteur qui définit, via la tension d'alimentation du moteur U_m , l'action à mener pour réduire cet écart de façon efficace selon certains critères classiques : vitesse, stabilité, erreur statique, etc. Ce principe est illustré de façon générique en 4. Dans cette étude, nous nous limiterons au cas d'un correcteur proportionnel intégral :

$$U_m = K_p \varepsilon + K_i \int_0^T \varepsilon dt$$

Comparaison qualitative à des résultats expérimentaux et analyse

Un essai est réalisé sur le MaxPID avec un correcteur proportionnel intégral particulier : $K_p = 18$ et $K_i = 2$. Ce correcteur n'est pas performant, car nous verrons par la suite qu'il conduit à de fortes oscillations et à une réponse lente, mais il a l'intérêt pédagogique de permettre la mise en évidence des phénomènes de frottement sec et du rôle de l'intégrateur dans la correction d'une erreur statique.

La figure 5 montre l'évolution de la commande moteur et de l'écart en fonction du temps pour un échelon de position en entrée : le bras est initialement à l'angle $\beta = 0^\circ$, la consigne est $\beta_c = 40^\circ$.

On constate que le comportement est globalement oscillant, mais que les oscillations de l'écart sont écrêtées. Ce point peut être expliqué par la présence de frottements secs :

- En l'absence de frottement, la tension moteur change de signe au niveau d'un sommet de la sinusoïde de sortie lorsque l'effet intégral compense l'effet proportionnel.
- En présence de frottements secs, lorsque la tension d'alimentation devient faible, le couple moteur est

faible et ne parvient pas à compenser les efforts de frottement ; il y a alors adhérence. Durant toute cette phase, l'erreur est constante (on note $\epsilon = \epsilon_c$), l'action proportionnelle également, et l'action intégrale croît linéairement (on intègre la constante ϵ_c). Ce point est particulièrement visible sur la figure 5a, où l'on a tracé la droite des moindres carrés dans ces zones ; la pente de ces zones linéaires diminue d'un palier à un autre puisque l'erreur statique diminue elle aussi ; il faut donc intégrer plus longtemps pour vaincre les frottements.

Des résultats très proches sont obtenus via le modèle numérique proposé et implémenté dans Simulink. Comme le montre la figure 5b, pour un paramètre τ suffisamment important (1000), on obtient la même forme de réponse, avec des paliers réguliers sur la courbe représentant l'écart à la consigne, et une tension moteur qui croît linéairement dans ces zones. Bien que les lois de frottement utilisées soient simplifiées, les phénomènes d'adhérence sont correctement représentés.

Conclusion

Cette première partie a permis de montrer qu'il était possible d'introduire du frottement sec dans les modèles de comportement des systèmes asservis à l'aide de lois régularisées qui limitent la technicité de la mise en œuvre, et qui, malgré tout, permettent de représenter numériquement certains phénomènes observés expérimentalement. En jouant sur le paramètre τ de la loi régularisée, il est possible d'obtenir, qualitativement, des phases d'adhérence et de glissement successives. Cela va maintenant permettre de considérer le cas plus complexe de systèmes irréversibles à cause des phénomènes de frottement.

Le cas d'un système considéré comme irréversible

On considère un problème simple dont le modèle cinématique est présenté en 6. La vis, notée (1), et l'écrou, noté (2), sont liés par une liaison hélicoïdale. L'écrou est bloqué en rotation par une ponctuelle excentrée.

● **Caractéristiques de la liaison hélicoïdale :**

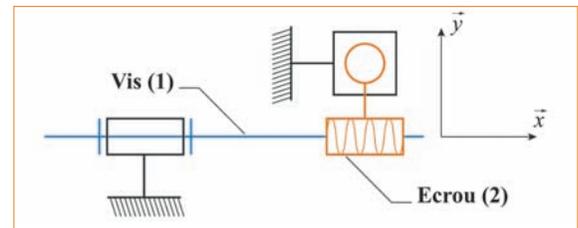
- Le filet est de forme rectangulaire, pour simplifier, mais le cas d'un filet trapézoïdal pourrait être traité avec des modifications mineures ;
- On considère dans toute l'étude que le pas est à droite, ce qui implique qu'une rotation de la vis selon $+\vec{x}$ entraîne la translation de l'écrou selon $-\vec{x}$.

● **Notation :**

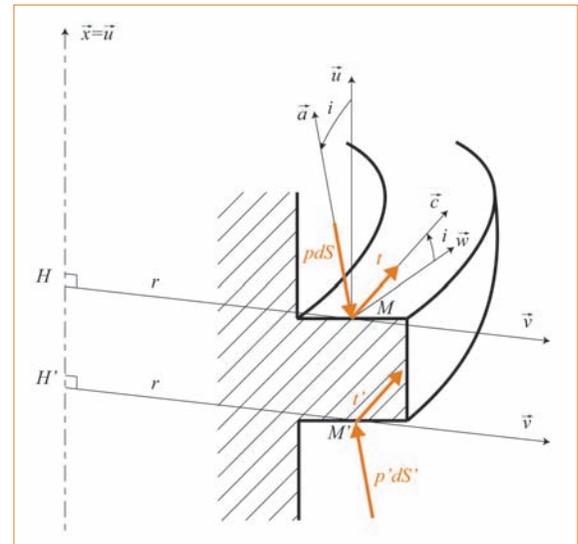
- r : rayon moyen du filet
- i : angle d'hélice
- μ : coefficient de frottement entre écrou et vis

● **Paramètres cinématiques introduits :**

- La position axiale de l'écrou u_2
- La position angulaire de la vis θ_1



6 Le système vis-écrou considéré



7 Les actions de contact sur le filet rectangulaire de la vis

La vis est soumise à un couple extérieur selon \vec{x} noté C_1 ; l'écrou, à un effort extérieur selon \vec{x} noté F_2 .

Les actions de contact

Dans toute la suite, on considérera que le contact peut se faire sur la partie inférieure comme sur la partie supérieure du filet. En effet, la zone de contact réelle ne peut être connue qu'en statique, dans des cas simples, et il n'est pas possible de la postuler à l'avance dans le cas général envisagé ici. Les efforts introduits dans cette partie sont représentés en 7.

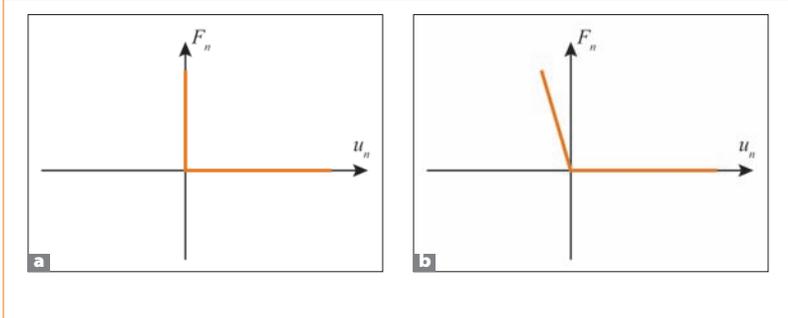
Les actions de contact définies ici représentent, par convention, les actions de l'écrou sur la vis :

- $d\vec{F} = -pdS\vec{a} + t\vec{c}$ représente les efforts de l'écrou sur la vis, dans le cas d'un contact sur le haut du filet, au point M.
- $d\vec{F}' = -p'dS'\vec{a}' + t'\vec{c}'$ représente les efforts de l'écrou sur la vis, dans le cas d'un contact sur le bas du filet, au point M'.

Dans ces expressions, les efforts tangentiels t et t' , en norme comme en sens, sont liés à l'intensité de l'effort normal pdS ou $p'dS'$ et à la vitesse de glissement $\vec{V}_{M,1/2}$ ou $\vec{V}'_{M',1/2}$ par les lois de Coulomb. Nous reviendrons par la suite sur la prise en compte numérique de ces dépendances complexes et fortement non linéaires.

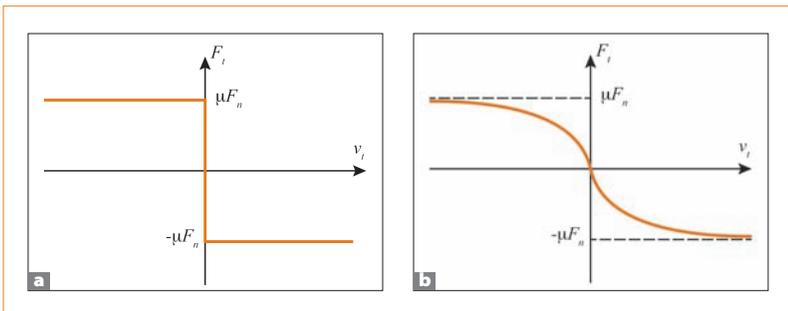
L'équilibre de la vis et de l'écrou

On isole tout d'abord la vis, et on écrit le théorème du moment dynamique projeté sur l'axe \vec{x} en un point



8 Traduction graphique des lois de contact et régularisation envisagée pour une résolution numérique plus aisée du problème non linéaire

- a Loi de contact
- b Loi de contact régularisée



9 Traduction graphique des lois de frottement et régularisation envisagée pour une résolution numérique plus aisée du problème non linéaire

- a Loi de frottement
- b Loi de frottement régularisée

quelconque de l'axe de rotation. La vis, de moment d'inertie J_1 autour de \vec{x} , est soumise au moment extérieur C_1 , à un éventuel couple résistant de type visqueux (coefficient c_1) et aux moments élémentaires en un point de l'axe des actions mécaniques de contact $\vec{d}\vec{F}$ et $\vec{d}\vec{F}'$ précédemment modélisées. On obtient donc l'équation suivante :

$$J_1 \ddot{\theta}_1 = C_1 - c_1 \dot{\theta}_1 + r \sin i \int_S p dS - r \sin i \int_{S'} p' dS' + r \cos i \int_S t dS + r \cos i \int_{S'} t' dS' \quad (6)$$

On isole ensuite l'écrou, et on écrit le théorème de la résultante dynamique projeté sur l'axe \vec{x} . L'écrou est soumis à l'effort extérieur F_2 , à un éventuel effort résistant visqueux (coefficient c_2) et aux actions mécaniques de contact $\vec{d}\vec{F}$ et $\vec{d}\vec{F}'$ précédemment modélisées. On obtient ainsi l'équation suivante :

$$m_2 \ddot{u}_2 = F_2 - c_2 \dot{u}_2 + \cos i \int_S p dS - \cos i \int_{S'} p' dS' - \sin i \int_S t dS - \sin i \int_{S'} t' dS' \quad (7)$$

La modélisation du comportement au contact

Les lois de contact non régularisées sont classiquement illustrées en 8. Cette figure traduit le fait que (pour une convention de normale extérieure donnée) :

- l'effort de contact F_n ne peut être que positif ou nul ;
- le déplacement normal relatif u_n des deux solides ne peut être que positif ou nul ;
- le produit de ces deux quantités ne peut être que nul, ce qui traduit qu'il ne peut y avoir de contact sans

pénétration, ou décollement sans effort (condition dite de complémentarité).

Les efforts de contact ont été précédemment définis, mais il est encore nécessaire d'introduire le déplacement relatif normal au point de contact.

Les solides vis et écrou étant considérés comme rigides dans cette étude, on peut calculer le déplacement relatif $\vec{\delta}_{M,1/2}$ aux points de contact M et M' entre les deux solides :

$$\vec{\delta}_{M,1/2} = r \theta_1 \vec{w} - u_2 \vec{x} \quad \text{et} \quad \vec{\delta}_{M',1/2} = r \theta_1 \vec{w}' - u_2 \vec{x}$$

La composante, suivant la normale de contact extérieure à la vis M, en est alors :

$$\vec{\delta}_{M,1/2} \cdot \vec{a} = -r \theta_1 \sin i - u_2 \cos i$$

On peut procéder de même au point de contact M' sur la surface inférieure du filet :

$$\vec{\delta}_{M',1/2} \cdot (-\vec{a}) = r \theta_1 \sin i + u_2 \cos i$$

On pourra vérifier que si les paramètres de position vérifient la relation classique d'une liaison hélicoïdale $u_2 = -(P / 2\pi) \theta_1$

alors le déplacement relatif selon la normale de contact est nul dans les deux cas.

Afin de rendre plus simple, numériquement parlant, la résolution du problème de contact, on propose classiquement dans la littérature de régulariser le comportement comme en 8b. Cela se traduit par l'introduction d'une raideur de contact qui, selon la valeur choisie, conduit à une légère interpénétration des deux solides.

On prendra donc un effort de contact nul lorsque le déplacement normal est positif (décollement), et un déplacement normal lié linéairement à l'effort normal lorsqu'il est négatif.

La pression de contact étant désormais liée aux quantités cinématiques, il reste à traiter le problème des efforts tangentiels dus aux frottements dans la liaison écrou/vis.

Le modèle classiquement retenu pour décrire les frottements secs est le modèle de Coulomb, dans lequel on ne distingue pas le coefficient d'adhérence et le coefficient de frottement :

- Dans tous les cas, la norme de l'effort tangential ne peut excéder une valeur déterminée par le produit de la norme de l'effort normal et du coefficient de frottement.
- Dans le cas où il y a adhérence, la norme de l'effort tangential est strictement inférieure à la norme de l'effort normal, sa direction n'étant pas déterminée.
- Dans le cas où il y a glissement, la norme de l'effort tangential est égale au produit de la norme de l'effort normal et du coefficient de frottement, sa direction étant la même que celle de la vitesse de glissement, son sens s'opposant au glissement.

Ces relations se traduisent graphiquement par la figure 9. Elle montre le comportement extrêmement non linéaire du frottement en fonction de la vitesse

tangentielle de glissement v_t . Comme pour la partie contact, et afin de simplifier la résolution numérique, on utilisera, comme dans le premier exemple, une loi régularisée qui lie de façon biunivoque l'effort tangential et la vitesse de glissement. Contrairement à ce qui a été fait dans la première partie, le seuil est cette fois-ci dépendant de l'effort normal.

Il reste donc à établir ces vitesses de glissement au point M et M' :

$$\vec{V}_{M,1/2} = \vec{V}_{M',1/2} = r\omega_1\vec{w} - \dot{u}_2\vec{x}$$

La projection de ces vitesses relatives selon le vecteur \vec{c} est :

$$\vec{V}_{M,1/2} \cdot \vec{c} = \vec{V}_{M',1/2} \cdot \vec{c} = r\omega_1 \cos i - \dot{u}_2 \sin i$$

Lorsque cette vitesse tangentielle relative est positive, les efforts tangentiels t et t' sont dirigés selon $-\vec{c}$, donc on pose la relation régularisée suivante :

$$t = -2/\pi \mu p d S \text{ arc tan}[\tau(r\omega_1 \cos i - \dot{u}_2 \sin i)]$$

et

$$t' = -2/\pi \mu p' d S' \text{ arc tan}[\tau(r\omega_1 \cos i - \dot{u}_2 \sin i)]$$

La mise en œuvre numérique

Les équations de la dynamique sont simplement traduites sous forme graphique dans Simulink **10** dans deux blocs visuellement indépendants. Le couplage résulte en fait des efforts et moments associés aux actions de contact qui sont entrés comme des actions supplémentaires. Leurs représentations, en fonction des quantités cinématiques, sont détaillées à part pour plus de lisibilité **11** **12**. Ces quantités sont elles-mêmes dépendantes des pressions de contact sur les parties haute et basse du filet. Ces pressions sont calculées à partir des déplacements normaux via une fonction définie par l'utilisateur qui permet d'écrire simplement les tests correspondant à la loi de contact retenue **13**.

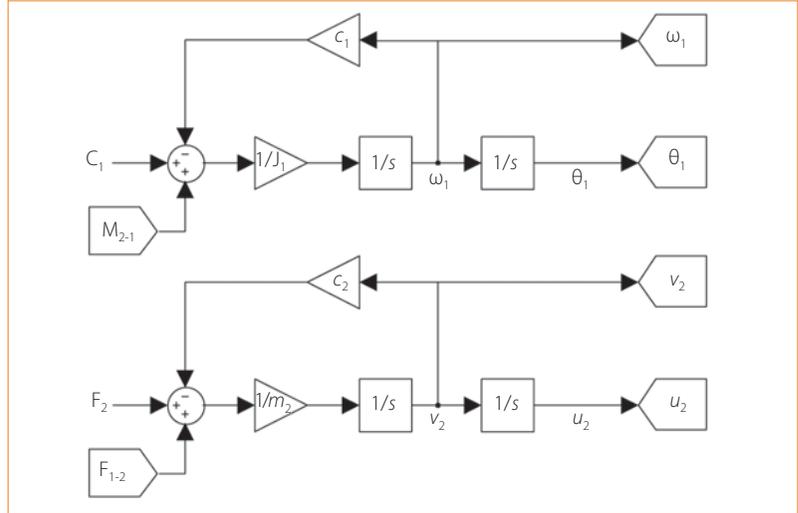
Les résultats

Étant donné la complexité du problème étudié, nous limiterons à l'étude de quelques cas que des résultats classiques ou le bon sens mécanique permettent d'expliquer.

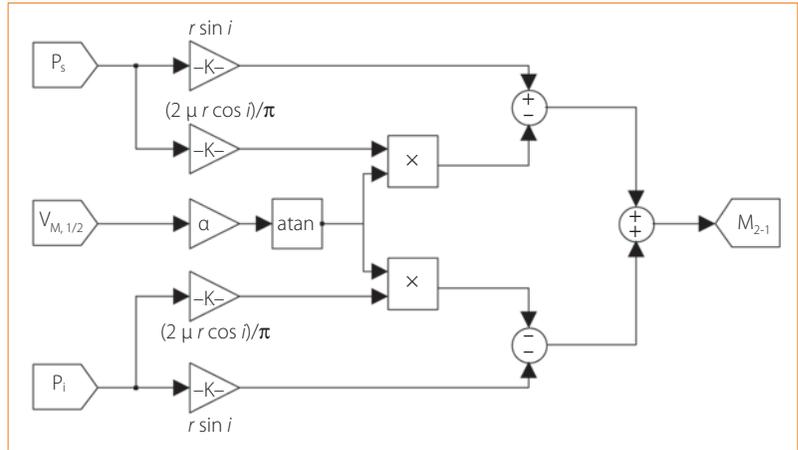
Premier cas test

Dans une première étude, on considère le système initialement immobile, et on applique à $t = 1$ s un effort $F_2\vec{x}$ avec $F_2 = 100$ N sur l'écrou. L'inertie de la vis est de $J_1 = 1,53 \times 10^{-6}$ kg.m² et la masse de l'écrou est $m_2 = 1$ kg. Il n'existe aucune autre source de dissipation que le frottement sec dans la liaison vis-écrou.

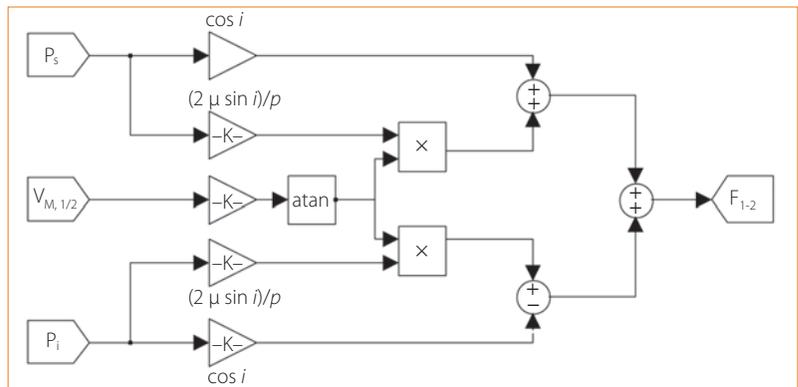
On représente ensuite l'évolution de la vitesse de rotation de la vis pour un coefficient de frottement variable entre $\mu = 0$ et $\mu = 0,2$. Le pas de la vis est de 6 mm pour un rayon moyen de $r = 5$ mm, ce qui conduit à un angle d'hélice $i = 0,189$ rad. On doit donc pouvoir vérifier que, lorsque le coefficient de frottement dépasse cette valeur $\text{arc tan}(\mu) > i$, selon



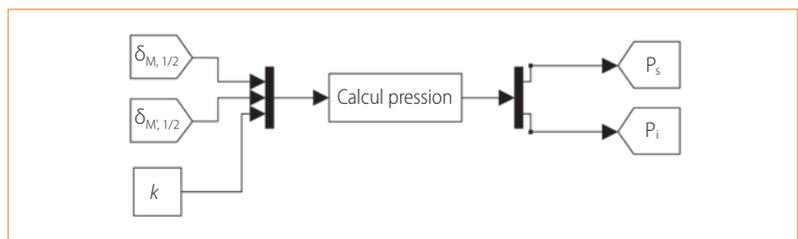
10 Traduction graphique des équations de la dynamique régissant le comportement du système vis-écrou



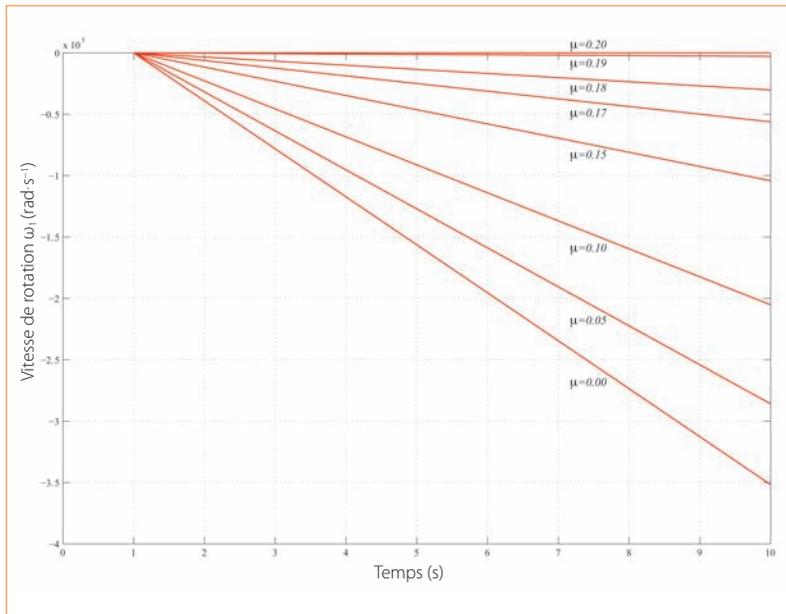
11 Le calcul du moment résultant des actions de contact sur la vis à partir des quantités cinématiques et des pressions calculées



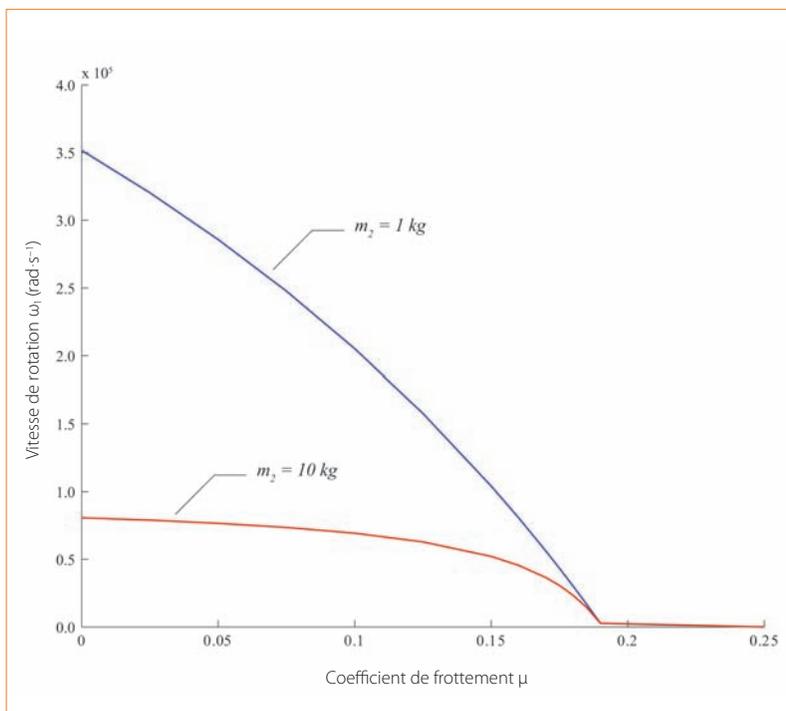
12 Le calcul de l'effort résultant des actions de contact sur l'écrou à partir des quantités cinématiques et des pressions calculées



13 Le calcul des pressions de contact sur les parties inférieure et supérieure du filet en fonction des déplacements relatifs normaux à travers une fonction utilisateur



14 Premier cas test : l'évolution temporelle de la vitesse de rotation de la vis pour différents coefficients de frottement



15 Premier cas test : l'influence de la masse et du coefficient de frottement

les résultats classiques sur l'irréversibilité statique du système vis-écrou (voir par exemple l'ouvrage de Georges Spinnler en bibliographie), le système demeure immobile, alors qu'il accélère uniformément sinon puisque les efforts de frottement sont constants ici. Dans ce cas, les frottements s'opposant au mouvement, l'accélération est d'autant plus faible que le coefficient de frottement est élevé. Les études numériques menées montrent que le modèle reproduit fidèlement ces résultats attendus 14. Lorsque l'écrou a une masse plus importante, imposée ici $m_2 = 10 \text{ kg}$, les vitesses atteintes à $t = 10 \text{ s}$ sont plus faibles du fait de l'inertie plus grande du système, et l'influence des frottements secs est moins visible pour des coefficients μ faibles, comme le montre la figure 15.

Deuxième cas test

Dans une deuxième étude, on considère le système initialement immobile, et on applique à $t = 1 \text{ s}$ un moment $C_1 = 1 \text{ N}\cdot\text{m}$ sur la vis jusqu'à $t = 3 \text{ s}$, et un effort $F_2 = 500 \text{ N}$ sur l'écrou à partir de $t = 4 \text{ s}$. De nouveau, on trace l'évolution de la vitesse de rotation de la vis en fonction du temps, et ce pour différents coefficients de frottement 16. On constate différents phénomènes :

- **Durant la première phase** ($3 \text{ s} > t \geq 1 \text{ s}$), le système est accéléré, et la liaison hélicoïdale transmet des efforts du fait des effets d'inertie liés à l'écrou. Ainsi, lorsque le coefficient de frottement augmente, le couple moteur étant constant, l'accélération diminue, et donc la vitesse atteinte à $t = 3 \text{ s}$ diminue également.

- **Durant la deuxième phase** ($4 \text{ s} > t \geq 3 \text{ s}$), aucun effort extérieur n'est imposé au système. Lorsque le coefficient de frottement est nul, il n'y a aucune source de dissipation, et la vitesse reste constante. Lorsque le coefficient de frottement est non nul, le système décélère du fait des dissipations dans la liaison hélicoïdale, et ce de façon de plus en plus prononcée lorsque le coefficient de frottement augmente.

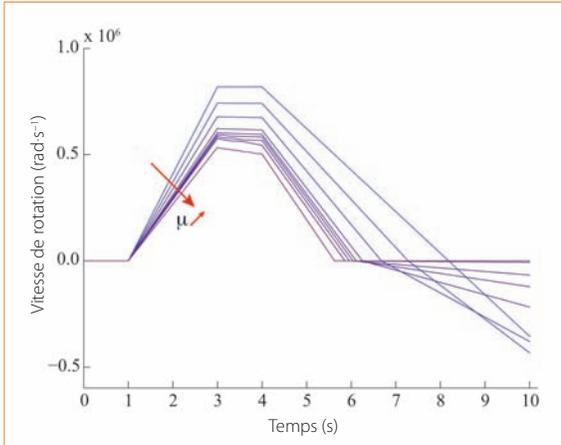
- **Durant la dernière phase** ($t \geq 4 \text{ s}$), un effort axial s'opposant au mouvement existant est imposé. Cela a pour effet de ralentir le système, mais, comme la liaison transmet un effort et donc dissipe de l'énergie, l'accroissement du coefficient de frottement conduit à un accroissement de la décélération. Dans tous les cas, la vitesse de rotation finit par s'annuler et changer de signe. Toutefois, lorsque le système est irréversible (μ suffisamment élevé), la vitesse reste nulle (aux approximations numériques réalisées près), comme dans le premier cas test.

Troisième cas test

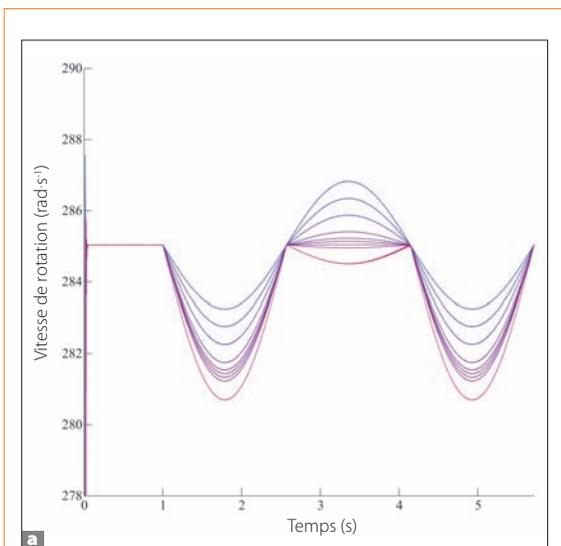
Dans une troisième et dernière étude, on considère le système asservi en vitesse. Pour cela, un moteur à courant continu est accouplé à la vis, et sa tension d'alimentation est régulée en fonction de l'écart à la vitesse réelle du système via un correcteur proportionnel simple. Le système est initialement à l'arrêt, et à partir de $t = 0 \text{ s}$ un échelon de vitesse à $\omega_{1,c} = 300 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ est entrée comme consigne. À partir de $t = 1 \text{ s}$, un effort sinusoïdal de norme $F_2 = 50 \text{ N}$ est imposé à l'écrou. Cet effort est donc tantôt moteur, tantôt résistant. Comme précédemment, la figure 17 présente les évolutions du couple moteur et de la vitesse de rotation de la vis pour différents coefficients de frottement.

On constate différents phénomènes 17 :

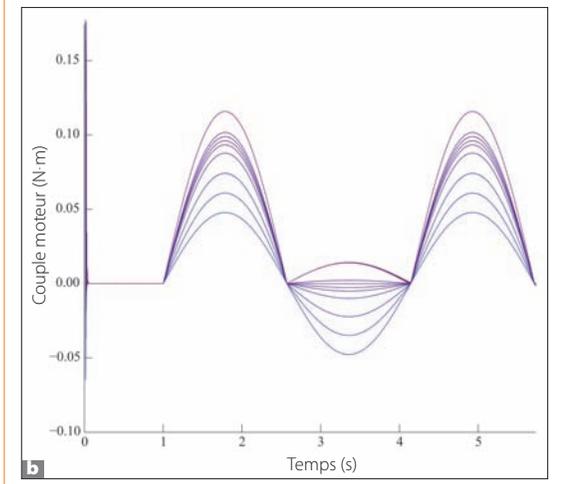
- **Durant la première phase** ($1 \text{ s} > t \geq 0 \text{ s}$), le système est asservi en vitesse, et aucun effort extérieur n'est imposé au système. La vitesse de rotation est très rapidement stable, du fait de la faible inertie du système considéré, mais on constate qu'elle n'est pas égale à la vitesse consigne même en l'absence de frottement (présence d'une erreur statique), ce qui peut s'expliquer par les équations du système complet :



16 Deuxième cas test : l'évolution de la vitesse de rotation de la vis pour différents coefficients de frottement



a



b

17 Troisième cas test : l'évolution de la vitesse de rotation et du couple moteur pour différents coefficients de frottement dans le cas d'un système asservi en vitesse

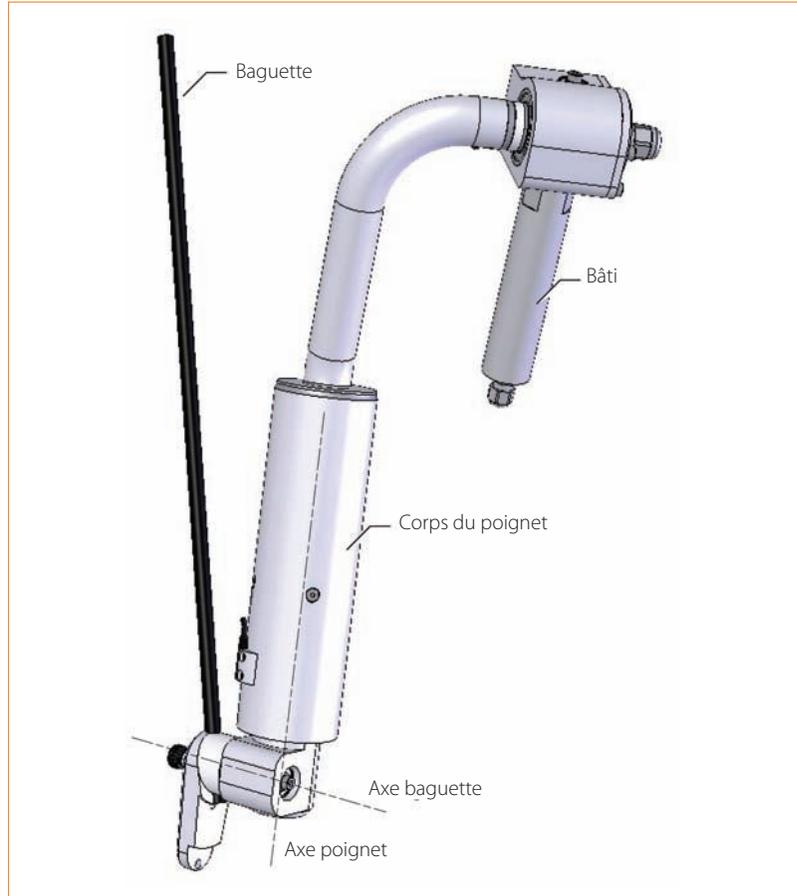
a Évolution de la vitesse rotation de la vis

b Évolution du couple moteur

$$U_m = e + Ri + L \frac{di}{dt}$$

$$e = K\dot{\theta}_1, C_m = Ki, J_{eq}\ddot{\theta}_1 = C_m, U_m = K_p(\dot{\theta}_{1,c} - \dot{\theta}_1)$$

Ce que l'on peut simplifier ainsi dans le cas d'un régime permanent :



18 Représentation CAO du bras de robot Jockey

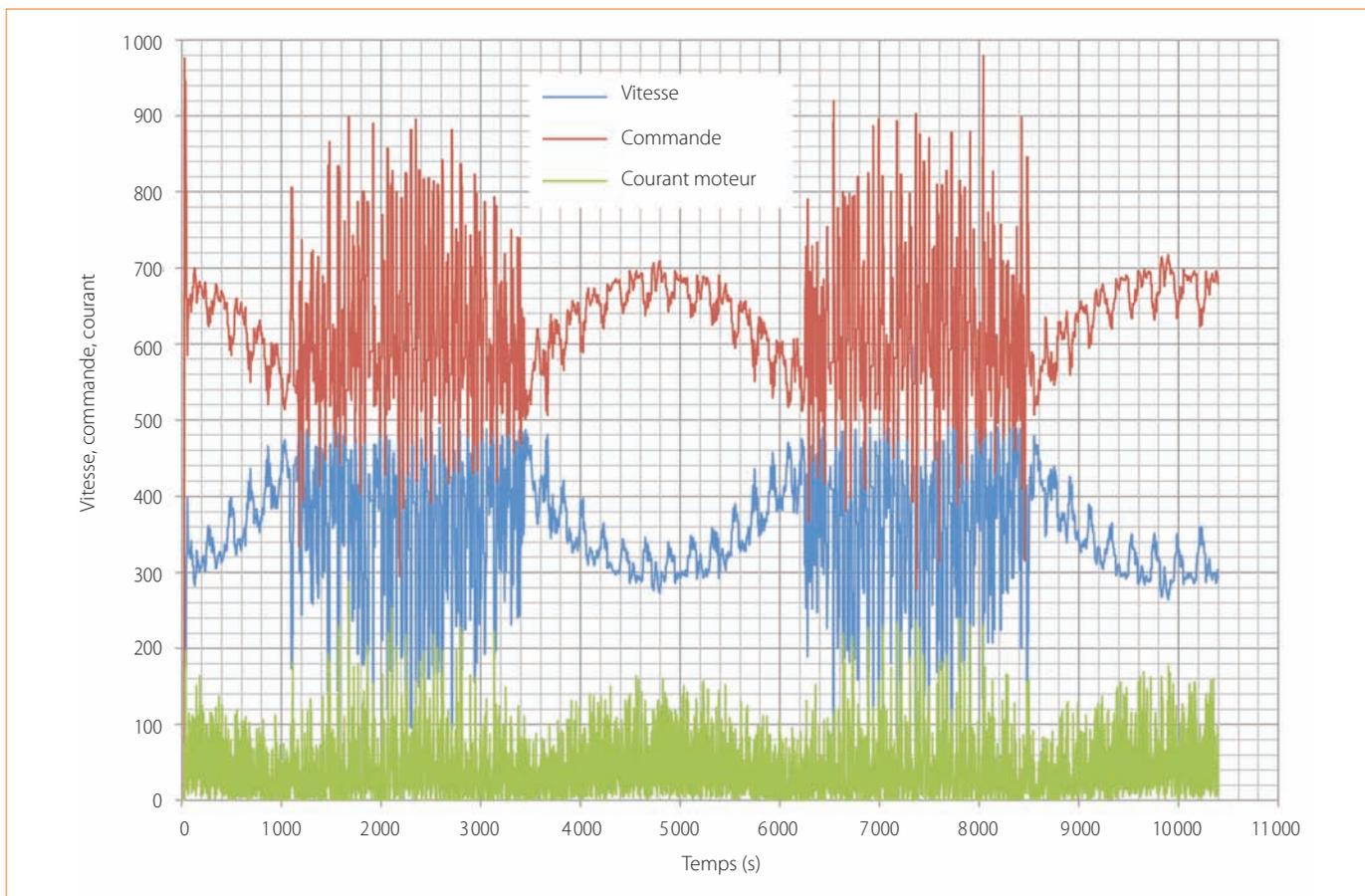
$$U_m = e + Ri \quad e = K\dot{\theta}_1 \quad i = 0 \quad C_m = 0 \quad U_m = K_p(\dot{\theta}_{1,c} - \dot{\theta}_1)$$

Cela permet de déterminer l'expression de la vitesse de rotation en régime permanent en fonction de la consigne. Ces deux vitesses sont différentes, et leur écart est fonction de la valeur du gain K_p :

$$\dot{\theta}_1 = \frac{K_p}{K_p + K} \dot{\theta}_{1,c}$$

• À partir de $t = 1$ s, et durant la première demi-période de l'effort appliqué ($t < 2,5$ s), cet effort est résistant car positif ; le frottement tout comme l'effort extérieur tendent à ralentir le système. On constate que la vitesse de rotation diminue, du fait que le K_p retenu est assez faible, et que le couple moteur augmente pour limiter l'influence de l'effort sur l'écart à la consigne de vitesse. L'augmentation du coefficient de frottement accentue ces effets.

• À partir de $t = 2,5$ s, et durant la seconde demi-période de l'effort appliqué, cet effort est moteur car négatif. L'effort extérieur tend à accélérer le système, tandis que le frottement tend à le ralentir ; on a donc deux phénomènes en compétition, contrairement à la phase précédente, ce qui explique la non-symétrie, excepté dans le cas $\mu = 0$. Lorsque $\tan(\mu) = i$, le couple moteur à fournir devient nul, et il devient positif, du fait de frottements très importants, au-delà de cette valeur particulière. Cette dernière illustration montre la complexité du comportement d'un système asservi alors qu'il est irréversible.



19 Cas du robot Jockey : l'évolution des images (en unités non SI) des vitesses de rotation de la baguette, de la commande et du courant moteur

Illustration sur un système réel

Il existe différents systèmes didactisés asservis dans nos salles de travaux pratiques sur lesquels le mécanisme de transmission est irréversible. Parmi ceux-là, le robot Jockey possède un axe (baguette) dont il est possible d'asservir la vitesse de rotation 18. Cet axe est mû par un moteur à courant continu logé dans le corps du poignet associé à un système roue-vis irréversible. À titre de comparaison qualitative, la réponse en vitesse de rotation et en couple moteur est tracée en 19 pour cet axe avec les paramètres suivants :

Baguette en aluminium équipée d'une masselotte en bout afin d'augmenter l'effort oscillant

Correcteur proportionnel uniquement

Vitesse de rotation consigne de $12 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$

On constate que le comportement, dans la phase où le poids de la masselotte dont est équipée la baguette est résistant, est très proche de celui observé numériquement. Le correcteur choisi étant volontairement peu performant, la vitesse chute, la commande augmente pour compenser autant que possible, et le couple moteur, donc le courant, augmente également. Dans la phase où le poids est moteur, le comportement est extrêmement bruité, du fait de la présence de jeux dans la transmission et de vibrations au niveau de la baguette. On distingue néanmoins que, malgré l'effort moteur, et du fait de l'irréversibilité du système, les trois quantités évoluent dans le même sens que dans la phase où le poids était résistant.

Cette forte dissymétrie dans le comportement explique qu'il est préférable d'asservir des axes réversibles.

Pour conclure

Dans ce travail, nous avons réalisé deux modèles numériques de systèmes asservis perturbés par des frottements secs. Sur le premier exemple (MaxPID), nous avons montré comment modéliser un couple de frottement dans la liaison entre le bras et le bâti. Ce modèle simplifié a permis d'obtenir une réponse temporelle typique de celle obtenue expérimentalement lorsque le correcteur utilisé est peu performant, et de mettre en évidence les effets des frottements secs.

Fort de ce premier résultat, nous avons montré comment modéliser le comportement complexe, en dynamique, d'un système éventuellement irréversible. Les résultats obtenus dans le cas d'un axe irréversible asservi en vitesse concordent qualitativement avec ceux obtenus sur l'axe baguette du robot Jockey. Ils permettent de montrer qu'il est déraisonnable d'asservir un axe irréversible tant le comportement obtenu est complexe. ■

► Bibliographie

SPINLER (G.), *Conception des machines : Principes et applications*, tome 2 : *Dynamique*, Presses polytechniques et universitaires romandes

AUBLIN (M.), BONCOMPAIN (R.), BOULATON (M.) et al., *Systèmes mécaniques : Théorie et dimensionnement*, 1992, Dunod