A/ PRINCIPES FONDAMENTAUX

A30

LES OUTILS DE BASE DE L'ELECTRONICIEN DE PUISSANCE

LES OUTILS DE BASE DE L'ELECTRONICIEN DE PUISSANCE

Le travail de l'électronicien de puissance consiste à déterminer les conditions d'ouverture et de fermeture d'interrupteurs électroniques en vue d'assurer une fonction donnée de conversion : redresseur, hacheur, onduleur .... etc. Pour étudier le fonctionnement de ces circuits, les outils classiques utilisés en ondes sinusoidales ne sont pas d'un grand secours. Aussi est-il nécessaire de disposer d'outils simples mais efficaces adaptés à ce problème spécifique . Le but de ce chapitre est la justification et la présentation de ces outils.

Pour les introduire, nous ferons appel aux résultats classiques des systèmes linéaires. Nous nous servirons de ces résultats pour en déduire des méthodes simples d'analyse de circuits.

Pour faciliter l'acquisition de ces outils nous allons traiter une série d'exercices simples et progressifs qui sont à la base de l'étude des convertisseurs.

1- RAPPELS SUR LES SYSTEMES LINEAIRES

1-1 : Variables d'état

L'état d'un système est caractérisé par un ensemble de variables qu'il faut connaitre pour pouvoir prédire de façon unique le comportement du système. Les variables caractérisant cette information sont appelées " variables d'état ".

Toutes les autres grandeurs du système peuvent s'exprimer en fonction de ces variables d'état et des entrées du système.

La caractéristique essentielle de ces variables d'état est qu'elles ne peuvent pas varier instantanément ou, ce qui revient au même, qu'elles ne peuvent pas subir de discontinuité.

Dans un montage électrique, les variables d'état sont les courants dans les inductances (ou le flux) et les tensions aux bornes des condensateurs (ou la charge).

Ainsi, *pour effectuer l'analyse du fonctionnement d'un convertisseur statique, il est nécessaire et suffisant de connaitre l'évolution des variables d'état qui le caractérisent.*

1-2 : Réponse d'un système linéaire

L'étude des équations différentielles linéaires qui régissent le fonctionnement des systèmes linéaires conduit au résultat fondamental suivant :

La réponse d'un système $(R)_t$ est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre $(RL)_t$ et de la solution particulière de l'équation avec second membre $(RF)_t$

$$(R)_t = (RL)_t + (RF)_t$$

RL est le régime libre, il correspond à la réponse du système sans excitation.

RF est le régime forcé, on dit aussi régime final ou régime permanent. IL correspond à la réponse du système avec excitation.

1-2-1 : **Régime libre**

Puisqu'il correspond à la solution de l'équation différentielle sans second membre, le régime libre doit posséder les informations contenues dans cette équation. L'équation différentielle est caractérisée par :

- son ordre qui définit l'ordre du système.
- ses coefficients

Quel que soit le système de résolution (équation caractéristique, calcul symbolique) on est amené à considérer un polynome dont le degré est égal à l'ordre de l'équation différentielle et qui se décompose en un produit de termes du premier et du deuxième degré.

Les termes du premier degré correspondent à des réponses élémentaires, de type exponentiel amorti. Ils permettent la définition des constantes de temps.

Les termes du deuxième degré correspondent à des réponses de type oscillatoire amorti. Ils permettent la définition des pulsations et des amortissements.

Ainsi, toutes les grandeurs caractéristiques d'un système linéaire : ordre, constantes de temps, pulsations et amortissements font partie du régime libre.

D'où le résultat fondamental que nous utiliserons abondamment par la suite :

Toutes ces grandeurs peuvent être déterminées à partir du schéma équivalent du régime libre du système. Ce schéma équivalent sera obtenu en rendant le système passif, c'est-à-dire, dans un circuit électrique donné, en remplaçant les sources de tension par un court-circuit et les sources de courant par un circuit ouvert.

Pour déterminer complètement ce régime libre, il faut en outre connaître ses conditions initiales et ses conditions finales. Les grandeurs caractéristiques définies précédemment ne déterminent en fait que la façon de passer de ces conditions initiales à ces conditions finales .

Conditons finales

Le régime libre correspond à un système sans excitation, donc tendant obligatoirement vers des conditions finales nulles. Un système physique passif est toujours dissipatif.

Condition initiales

Les conditons initiales du système sont en général connues : elles correspondent à $(R)_t$ à l'instant 0, soit $(R)_0$.

Les conditions initiales du régime libre sont donc déduites de la relation :

$(R)_0 = (RL)_0 + (RF)_0$, soit

$(RL)_0 = (R)_0 - (RF)_0$

On notera que les conditions initiales du régime libre dépendent du régime forcé.

1-2-2 : Régime forcé

Les études sur les systèmes linéaires conduisent aux résultats suivants :

- Si l'excitation est continue ou en échelon, le régime forcé est continu.
- Si l'excitaton est sinusoidale , de pulsation ω, le régime forcé est sinusoidal de même pulsation ω.
- Toute autre excitation, somme de ces excitations élémentaires, conduira à un régime forcé égal, en vertu du principe de superposition, à la somme des régimes forcés élémentaires correspondant à chaque excitation élémentaire.

Pour déterminer ces régimes forcés on utilisera :

- En continu : le schéma équivalent du système obtenu en remplaçant les inductances par un court-circuit et les condensateurs par un circuit ouvert.
- En sinusoidal : les impédances complexes.

2 : EXEMPLES DE CIRCUITS DU PREMIER ORDRE

2-1 : Circuit RL série alimenté en tension

2-1-1 : Réponse à un échelon de tension

Problème : A l'instant $t = 0^+$ on applique un échelon de tension sur le circuit R L série dont les conditions initiales sont i_{Lo} (figure 1). Quelle est la réponse de ce circuit ?

La variable d'état de ce circuit étant le courant dans l'inductance, analysons i_L. Le schéma équivalent du régime libre (figure 1) permet d'écrire :

$L \, di_L/dt + R \, i_L = 0$ dont la solution générale est :

$i_{Ll} = (i_{Ll})_0 * \exp(-t/\tau)$

Le régime libre de i_L, que nous notons i_{Ll}, est donc une exponentielle décroissante de constante de temps $\tau = L/R$.

La condition initiale de ce régime libre $(i_{Ll})_0$ dépend du régime forcé par la relation :

$(i_{Ll})_0 = (i_L)_0 - (i_{LF})_0 = i_{Lo} - i_{LFo}$ d'où

$i_{Ll} = (i_{Lo} - i_{LFo}) \times \exp(-t/\tau)$

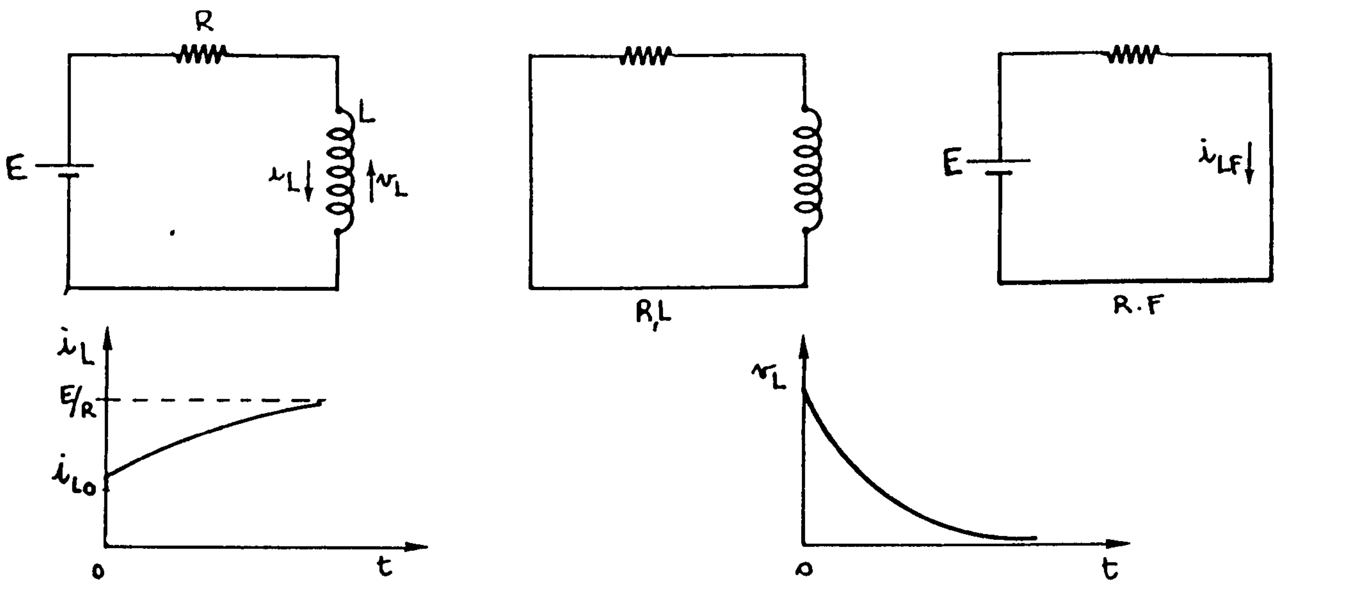


FIG I

Le schéma équivalent du régime forcé donne $i_{LFo} = E/R$, d'où :

$$i_L = (i_{Lo} - (E/R)) \times \exp(-t/\tau) + E/R$$

En conclusion, i_L est une exponentielle de constante de temps L/R partant du point i_{Lo} et ayant pour asymptote le régime forcé E/R.

Ceci est généralisable à la réponse indicielle de tout circuit du premier ordre. Cette réponse sera une exponentielle :

- de constante de temps τ que l'on pourra déduire du schéma équivalent du régime libre

- partant du point défini par la condition initiale du système

- ayant pour asymptote le régime forcé du système que l'on pourra déduire du schéma équivalent continu

La tension aux bornes de l'inductance est

$$v_L = L\, di_L/dt = E \times \exp(-t/\tau)$$

Cet exercice permet aussi de rappeler les propriétés fondamentales suivantes :

- La valeur du courant dans une inductance ne peut pas subir de discontinuité . Soit, en résumé : *Inductance = Inertie de courant* .
- Lorsqu'on applique un échelon de tension aux bornes d'un circuit comprenant une résistance et une inductance en série, on retrouve instantanément cette tension aux bornes de l'inductance .

2-1-2 : Réponse à une impulsion de tension rectangulaire

Problème : entre les instants t_1 et t_2, on applique au circuit R L série de l'exercice précédent une impulsion rectangulaire de tension (figure 2). La condition initiale est $(i_L)_{t1} = 0$. Quelle est la réponse du circuit ? L'exercice précédent nous permet de connaitre le courant i_L entre t_1 et t_2.

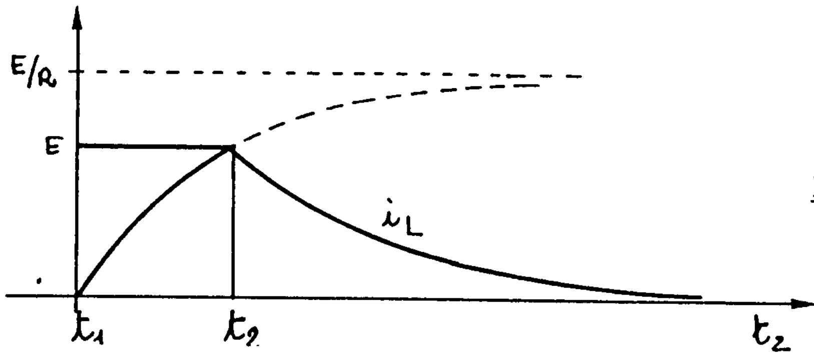


FIG 2

C'est une exponentielle de constante de temps τ=L/R, partant du point $t=t_1, i_L=0$ et d'asymptote E/R . A l'instant $t=t_2$, le système quitte le régime précédent et se retrouve sans excitation, c'est-à-dire avec un régime forcé nul . Le courant i_L est donc représenté par une exponentielle de constante de temps τ = L/R partant de $(i_L)_{t2}$ et d'asymptote $i_L = 0$.

2-1-3 : Réponse à un signal rectangulaire périodique

Problème : On applique une tension rectangulaire périodique de période T et de rapport cyclique $\mathcal{R}$ à un circuit RL série. Etudier la réponse en courant .

2-1-3-1 : *Etude du régime permanent*

Le calcul de la valeur moyenne de i_L est issu du schéma équivalent en continu :

$i_{L\,Moy} = V_{Moy} / R = \mathcal{R}\, E / R$ avec $\mathcal{R} = t_F / T$ (figure 3)

Calculons maintenant les valeurs instantanées :

a/ Pendant la décroissance de i_L:

$i_{LF} = 0$ donc $i = i_M \times \exp(-t/\tau)$

$$i_m = i_M \times \exp \frac{-(1-\mathcal{R})T}{\tau}$$

b/ Pendant la croissance de i_L:

$i_{LF} = E/R$ donc

$i_L = (E/R) + (i_m - E/R) \times \exp(-t/\tau)$

$i_M = (E/R) + (i_m - E/R) \times \exp(-\mathcal{R}\,T/\tau)$

après élimination on obtient :

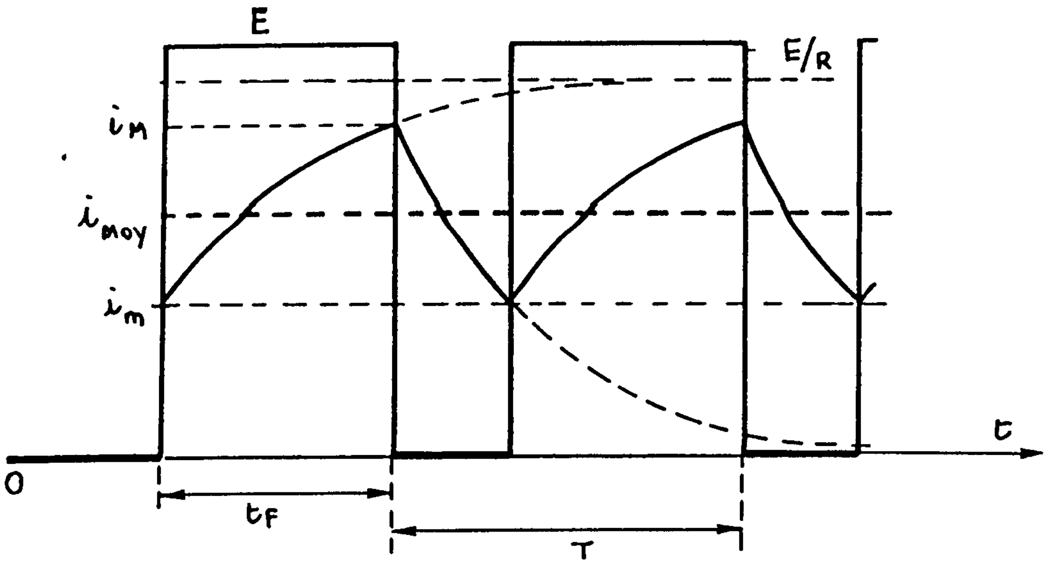


FIG 3

$$i_M = \frac{E}{R} \times \frac{1 - \exp(-\mathcal{R}\ T/\tau)}{1 - \exp(-T/\tau)}$$

$$i_m = i_M \times \exp \frac{-(1-\mathcal{R})T}{\tau}$$

On peut en déduire l'ondulation de courant

$$\Delta I = i_M - i_m = \frac{E}{R} \times \frac{1 - \exp(-\mathcal{R}\ T/\tau)}{1 - \exp(-T/\tau)} \times \left(1 - \exp \frac{-(1-\mathcal{R})T}{\tau}\right)$$

Si $T \ll \tau$, on peu utiliser l'approximation linéaire ; La réponse i_L est alors constituée de segments de droites. Dans ce cas les expressions se simplifient et deviennent :

$$\Delta I = \frac{E}{R} \times \frac{\mathcal{R}\ T/\tau}{T/\tau} \times (1-\mathcal{R}) \frac{T}{\tau}$$

$$\Delta I = \frac{E}{R} \times \mathcal{R}\,(1-\mathcal{R}) \frac{T}{\tau}$$ ou encore

$$\Delta I = \frac{E}{Lf} \times \mathcal{R}\,(1-\mathcal{R})$$ avec $f = 1/T$

2-1-3-2 : *Etude du régime transitoire*

Nous venons de voir la réponse en régime permanent i_{LF}: cette réponse peut être considérée comme étant la somme d'une composante continue i_{Lmoy} et d'une composante alternative i_{Lalt} (figure 4a).

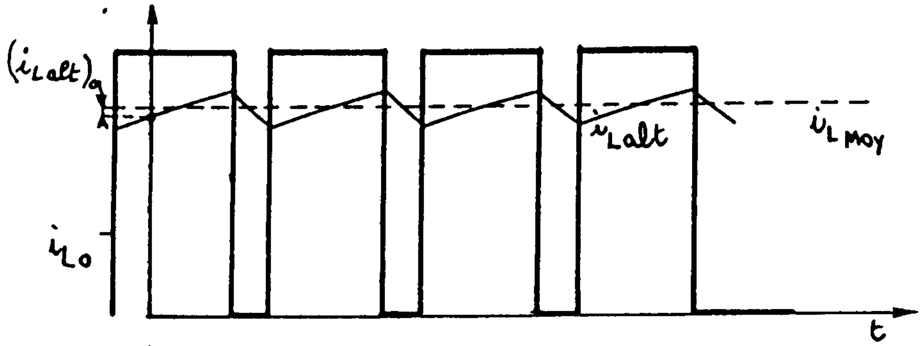


FIG :4a

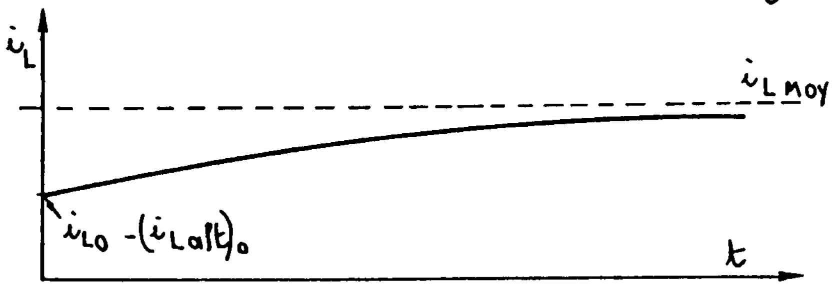


FIG :4b

$$i_{LF} = i_{Lmoy} + i_{Lalt}$$

Par ailleurs, nous savons que la réponse d'un système linéaire est la somme d'un régime libre et d'un régime forcé.

$$i_L = i_{Ll} + i_{Lf}$$

La réponse en courant du circuit excité par un signal rectangulaire périodique de tension sera donc :

$$i_L = (i_{Ll} + i_{Lmoy}) + i_{Lalt}$$

Nous mettons en évidence le signal $(i_{Ll} + i_{Lmoy})$ qui est la somme du régime libre et d'une composante continue. Ce signal correspond à la réponse indicielle du système carctérisée comme suit (figure 4 b) :

- C'est une exponentielle de constante de temps $\tau = L/R$
- la condition finale est i_{Lmoy}
- la condition initiale est déterminée par identification à l'instant zéro :

$$(i_{Ll} + i_{Lmoy})_o = i_{Lo} - (i_{Lalt})_o$$

i_{Lo} est la condition initiale du courant et $(i_{Lalt})_o$ sera déduit de l'étude en régime permanent.

Ainsi le courant i_L est la somme :

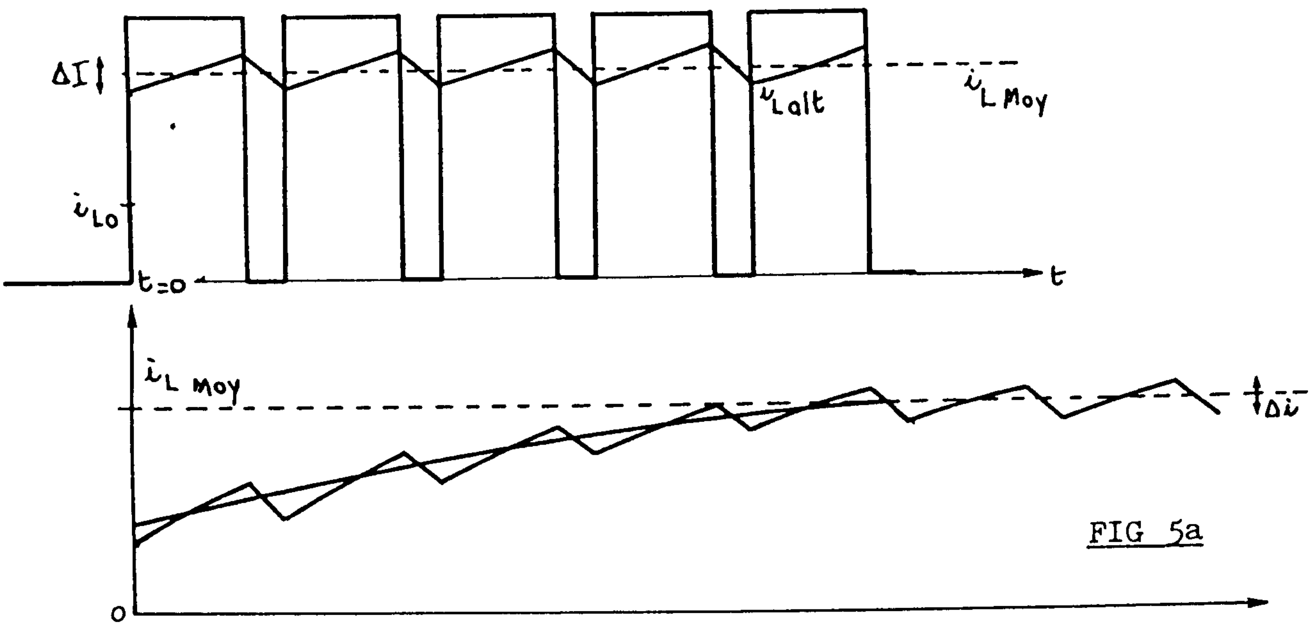


FIG 5a

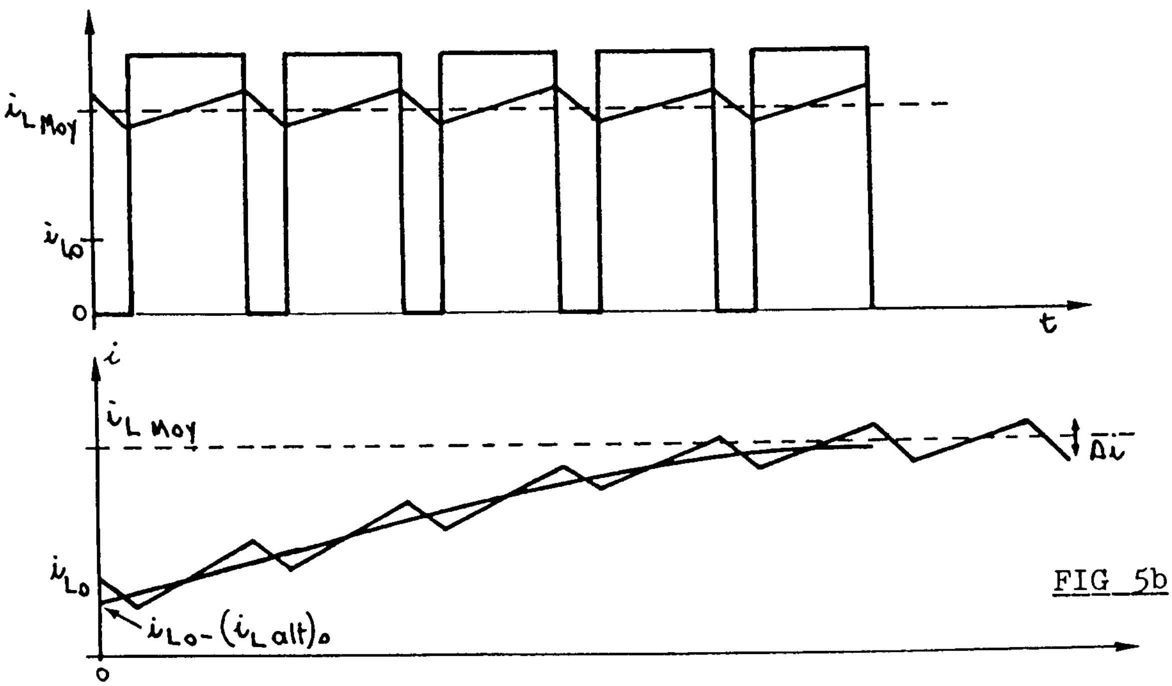


FIG 5b

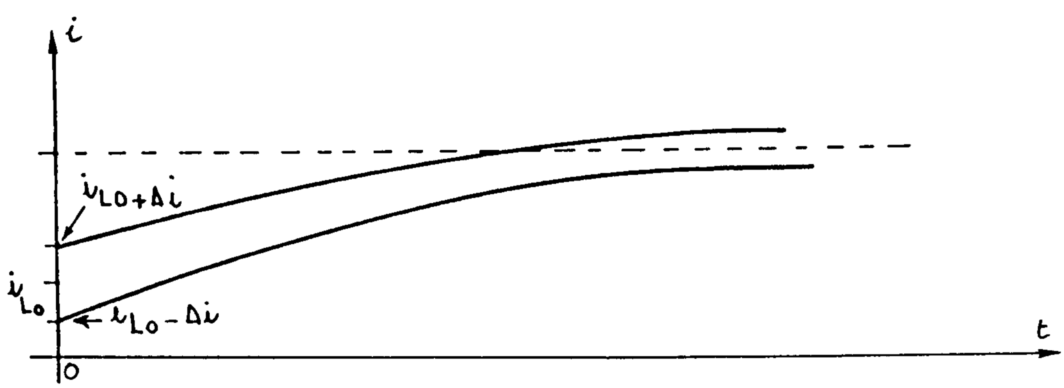


FIG 6

- de la réponse indicielle définie ci-dessus et
- de la composante alternative en régime permanent i_{Lalt}

La réponse transitoire sera donc fonction, comme en alternatif, de l'instant d'enclenchement de la tension.

Puisque, par la suite, nous nous intéresserons à la détermination des pointes de courant dans les composants, analysons les deux cas extrêmes, c'est-à-dire les réponses en transitoire pour :

- un instant d'enclenchement de la tension correspondant à un flanc de montée de la tension (figure 5 a)
- un instant d'enclenchement de la tension correspondant à un flanc descendant de la tension (figure 5 b)

Pour chaque cas, il suffit de construire d'abord la réponse indicielle définie plus haut et de lui ajouter la composante alternative i_{Lalt} correspondante.

De ces deux courbes de réponse, on peut déduire les courbes enveloppes extrêmes représentées sur la figure 6. On peut alors affirmer que, quel que soit l'instant d'enclenchement de la tension. la réponse en courant se situera à l'intérieur de la zone définie par ces deux enveloppes.

2-1-4 : Réponse à une tension sinusoidale

Problème : Réponse d'un circuit RL série à l'application d'une tension sinusoidale v. Condition initiale $i_L = 0$.

Le régime libre de i_L est une exponentielle décroissante vers zéro, de constante de temps $\tau = L/R$ et de valeur initiale $(i_{Ll})_0$ déterminée à partir des conditions initiales du circuit : $i_L = 0$.

Le régime forcé de i_L est un courant sinusoidal déphasé par rapport à v d'un angle ϕ tel que :

$tg\,\phi = L\omega / R$ et d'amplitude $I = V / Z$ aveo $Z = \sqrt{(R^2 + L^2\omega^2)}$

On a toujours : $i_L = i_{Ll} + i_{LF}$

La figure 7 concerne un circuit RL très peu résistif, ce qui nous donne $tg\phi = \pi/2$ et nous supposons que v à l'instant zéro est nul : on enclenche au zéro de tension. On sait que le courant résultant sera la somme d'une sinusoide déphasée de $\pi/2$ en arrière sur v et d'une exponentielle de constante de temps $\tau = L/R$ décroissante vers zéro. Pour tracer ces grandeurs, il suffit de connaitre $(i_{Ll})_0$ qui permettra la mise en place de l'exponentielle. On le déterminera par la relation

$$0 = (i_{Ll})_0 + (i_{LF})_0 \quad \text{c-a-d} \quad (i_{Ll})_0 = -(i_{LF})_0$$

On notera que si l'on enclenche à la tension maximum alors

$$(i_{LF})_0 = 0 \quad \text{d'où} \quad (i_{Ll})_0 = 0$$

Il n'y a donc pas de régime libre et, dès l'enclenchement de la tension, le circuit atteint directement le régime forcé du courant .

Cette étude rapide donne les résultats essentiels pour la déterminaton des régimes transitoires

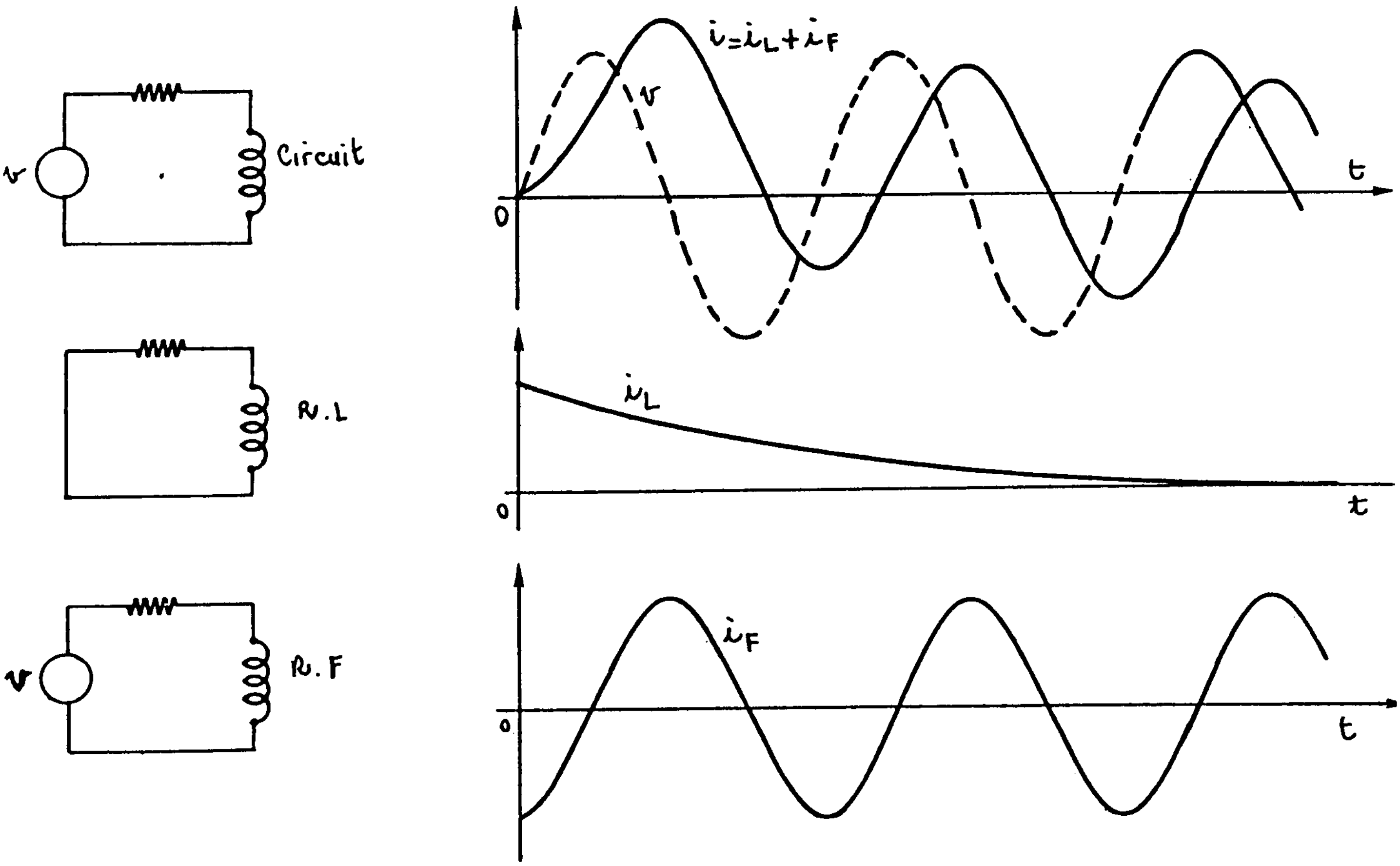

v
Circuit
$i = i_L + i_F$
v
t
0
R.L
i_L
0
t
v
R.F
i_F
0
t

FIG 7

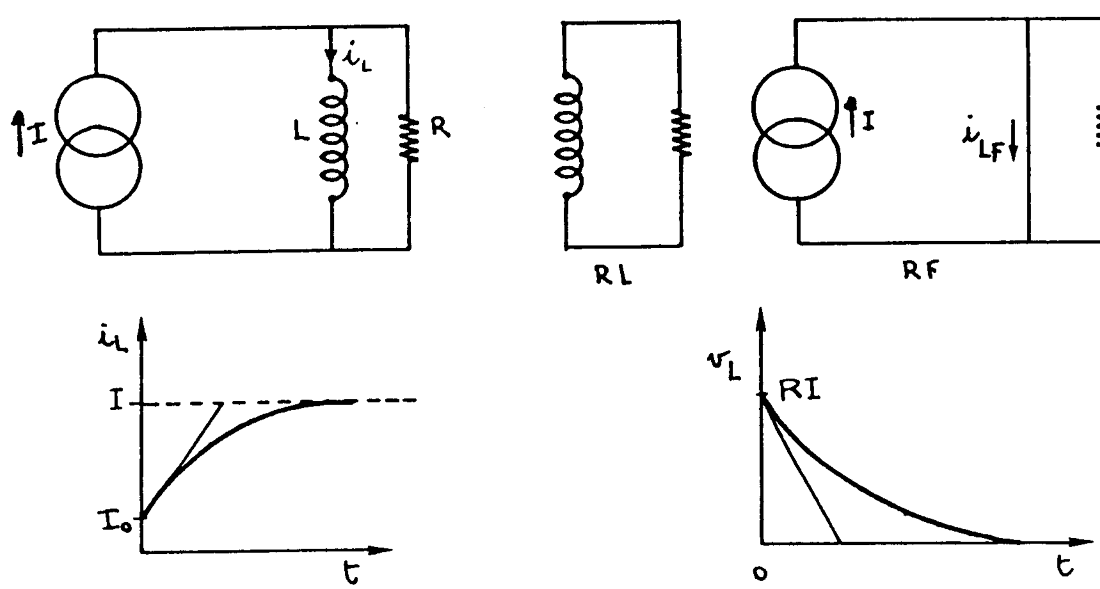

I
i_L
L
R
RL
I
i_{LF}
RF
i_L
I
I_0
t
v_L
RI
0
t

FIG 8

de courant à l'enclenchement d'une tension sur une machine électrique .

2-2 : Circuit RL parallèle alimenté en courant

2-2-1 : Réponse à un échelon de courant

Problème : à l'instant $t = 0^{+}$, on applique un échelon de courant I sur le circuit RL parallèle dont les conditions initiales sont : $i_L = I_0$ (figure 8) . Quelle est la réponse de ce circuit ?

La variable d'état étant le courant dans l'inductance, c'est i_L que nous allons analyser.

Le régime libre de i_L est une exponentielle décroissante vers zéro de constante de temps τ=L/R.

Le régime forcé est $i_L = I$ comme on le voit sur le schéma équivalent .

La réponse de i_L est donc une exponentielle de constante de temps τ=L/R partant de I_0 et d'asymptote $i_L = I$.

Le courant dans la résistance est $i_R = I - i_L$

On notera que ce circuit élémentaire correspond au schéma équivalent d'un transformateur de courant.

2-2-2 : Réponse à une impulsion de courant rectangulaire

On envoie une impulsion de courant sur le circuit de la figure 9. La condition initiale est $i_L(t_1)=0$

De t_1 à t_2 nous venons de voir que i_L est une exponentielle de constante de temps τ=L/R, passant par le point $i_L(t_1)=0$ et d'asymptote $i_L=I$. A l'instant t_2, on quitte ce régime de fonctionnement et on se retrouve avec un système sans excitation, c'est-à-dire un régime forcé nul. Le courant I_L est donc une exponentielle de constante de temps τ, partant de $i_L(t_2)$ et d'asymptote $i_L=0$.

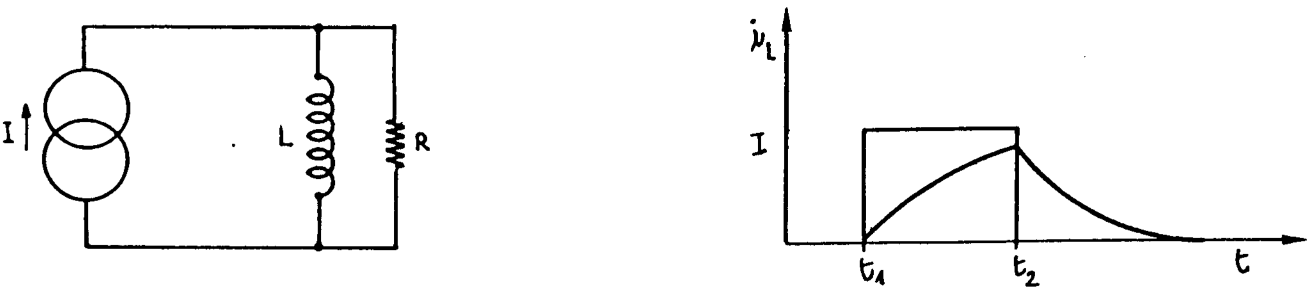


FIG 9

2-2-3 : Réponse à un courant rectangulaire périodique

On conduira l'étude par une méthode analogue à celle utilisée en 2-1-3

2-3 : Circuits RC série et parallèle

2-3-1 : Réponse d'un circuit RC série

Problème : à l'instant $t = 0^+$, on applique un échelon de tension E sur le circuit RC de la figure 10 . Conditions initiales : $v_c(0) = v_0$. Quelle est la réponse du circuit ?

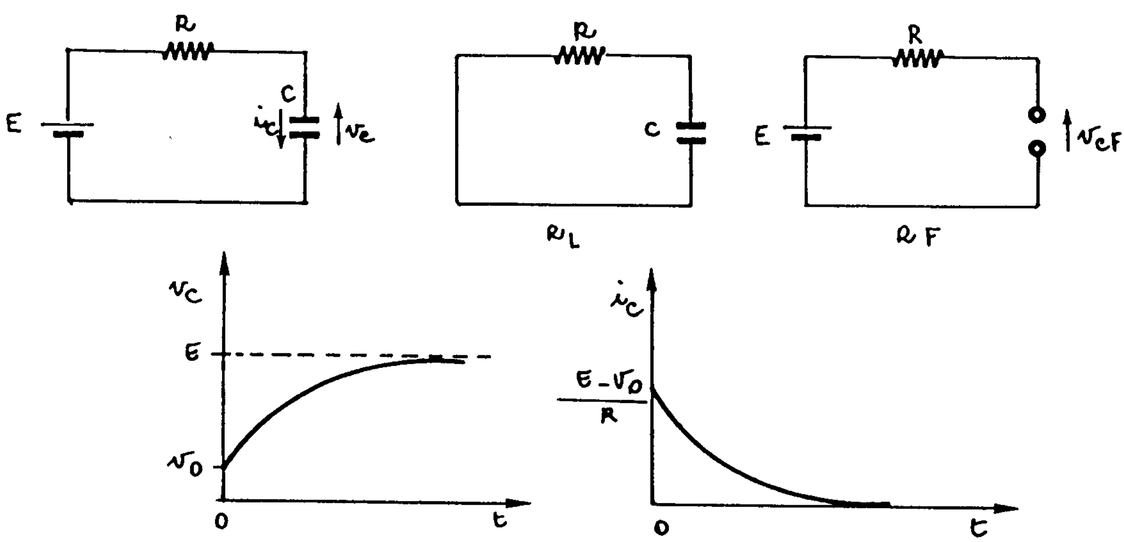


FIG:IO.

La variable d'état du circuit étant la tension du condensateur, c'est v_c que nous allons étudier.

Le schéma équivalent du régime libre de la figure 10 permet de dire que le régime libre de v_c est une exponentielle décroissante vers zéro et de constante de temps $\tau = R \times C$

Le schéma équivalent du régime forcé nous donne $v_{cF} = E$

Ainsi, v_c est une exponentielle de constante de temps $\tau = R \times C$ partant de v_0 et d'asymptote $v_c = E$ (figure 10). On peut écrire :

$v_c = E + A \exp(-t/\tau)$

Pour $t = 0$ $v_c = v_0$ donc $A = v_0 - E$ c'est-à-dire :

$v_c = E + (v_0 - E) \exp(-t/\tau)$

La valeur du courant à l'instant $t = 0$ étant $i_0 = (E - v_0)/R$, le courant i_c est une exponentielle partant de i_0, de constante de temps τ et d'asymptote $i_{cL} = 0$.

Cet exercice permet de rappeler la propriété fondamentale suivante :

La valeur de la tension aux bornes d'un condensateur ne peut pas subir de discontinuité . Soit : *condensateur = inertie de tension.*

2-3-1 : Réponse d'un circuit R + R // C

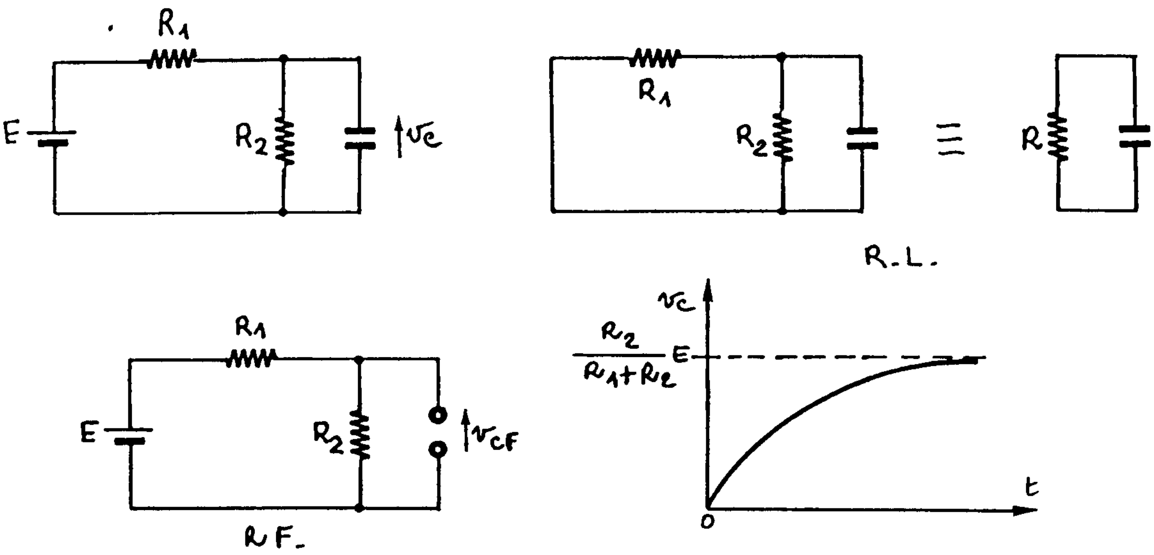


FIG:II

Le schéma équivalent du régime libre donné sur la figure 11 permet de voir que le régime libre est une exponentielle de constante de temps $\tau = R \times C$ avec $R = (R_1 \times R_2)/ (R_1 + R_2)$.

Le schéma équivalent du régime forcé nous donne : $v_{cF} = E \times R_2 / (R_1 + R_2)$

On peut donc écrire :

$$v_c = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \times E + A \times \exp (- t / \tau)$$

Puisque $v_c (0) = 0$, il vient :

$$v_c = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \times E \left(1 - \exp (- t / \tau) \right)$$

Le courant i_c est une exponentielle tendant vers zéro de constante de temps $\tau = R \times C$ et dont la valeur à l'instant $t = 0$ est E / R_1 .

3 - EXEMPLES DE CIRCUITS DU DEUXIEME ORDRE

3-1 : Etude des configurations obtenues avec une source de tension, une source de courant et un circit LC

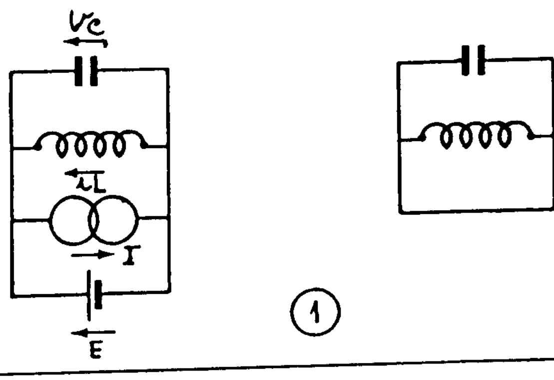
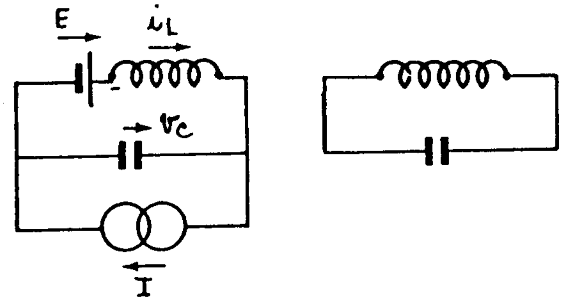
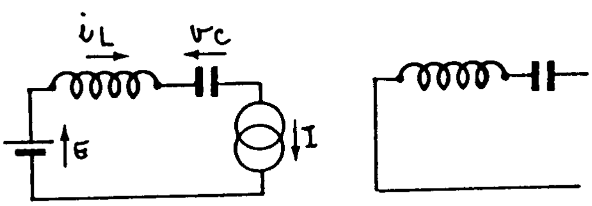
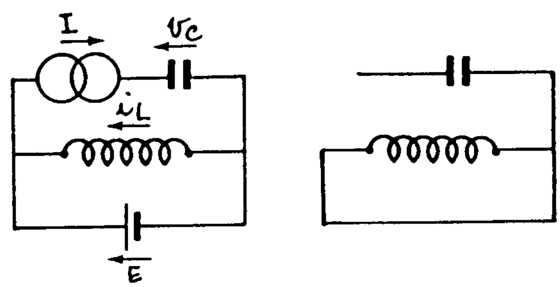
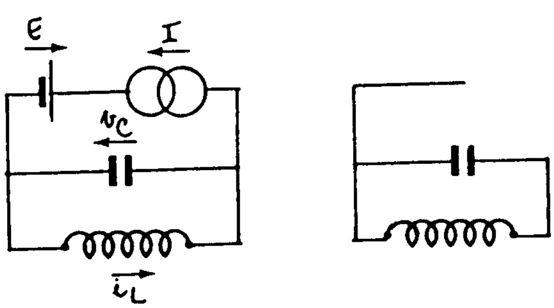
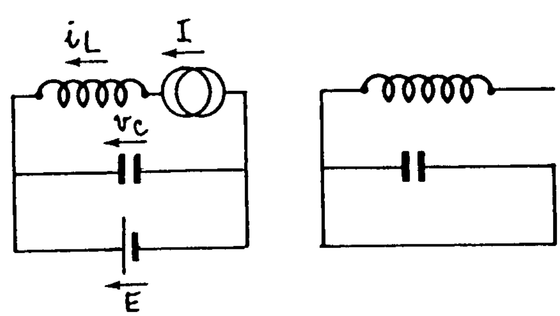
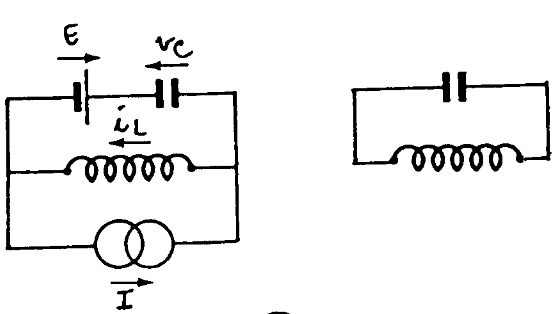
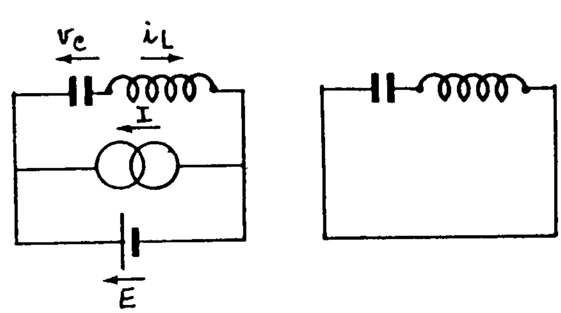
CIRCUIT . REGIME LIBRE	CIRCUIT . REGIME LIBRE
 (1)	 (5)
 (2)	 (6)
 (3)	 (7)
 (4)	 (8)

FIG:I2.

Dans le cas le plus général, il peut y avoir des excitations en tension (E) et en courant (I) . On dispose alors de quatre éléments: L - C - E - I . Or, dans le cadre des convertisseurs statiques, ces quatre éléments peuvent être reliés entre eux par des semiconducteurs fonctionnant en commutation.

Si les semiconducteurs sont considérés comme des interrupteurs parfaits (équivalents à un circuit ouvert ou à un court-circuit), ces quatre éléments peuvent se trouver à priori dans n'importe quelle configuration . Pour trouver toutes les configurations possibles, on peut considérer que les quatre éléments E, I, C et L peuvent être:

- tous en parallèle
- tous en série
- 2 à 2 en série , les deux autres éléments étant en parallèle . Cette 3ème possibilité conduit à 6 configurations différentes. La figure 12, colonne " circuit ", donne les 8 configurations possibles.

La réponse de certains de ces circuits peut ne pas être oscillatoire comme on pourrait le supposer à priori . Il s'agit là d'une difficulté que l'on rencontre souvent dans l'étude des convertisseurs, aussi cela mérite que l'on s'y attarde.

Pour qu'un circuit LC soumis à des excitations E et I corresponde effectivement à un circuit oscillant, il faut que les éléments L et C puissent échanger librement leur énergie . Sur le schéma équivalent du régime libre, cela se traduit simplement par les deux éléments L et C reliés entre eux.

Sachant que le type de réponse d'un système est entièrement défini par son régime libre, on peut affirmer que toute configuration dont le schéma équivalent du régime libre est différent de celui-ci ne correspond pas à un circuit oscillant .

La figure 12, colonne "régime libre", donne les 8 régimes libres des configurations corespondantes. On peut constater que seules les configurations 3, 4,5 et 8 correspondent effectivement à un circuit oscillant . Pour les autres configurations le schéma équivalent du régime libre fait apparaître des singularités :

- condensateur en court-circuit, configuration 1
- inductance en circuit ouvert, configuration 2
- condensateur en circuit ouvert et inductance en court-circuit, configuration 6
- condensateur en court-circuit et inductance en circuit ouvert, configuration 7

Chacune de ces singularités correspond à une relation sur une (ou plusieurs) variable(s) . Dans le système avec excitation, cela signifie qu'il existe aussi une relation entre cette (ou ces) variable(s) et les sources. La réponse est alors très simple à trouver .

Etude des cas singuliers :

- configuration 1 → $v_C = E$

$$v_L = E \quad \text{qui donne } i_L = i_{Lo} - E\,t / L$$

On notera que l'expression de i_L correspond à un cas théorique car il existe obligatoirement une valeur de régime forcé $i_L = E / R$ avec R résistance série de l'inductance. Si la constante de temps L / R est très grande devant le temps que durera cette configuration, l'approximation linéaire est parfaitement justifiée   Cette remarque est valable pour les autres cas singuliers.

- configuration 2 → $i_C = I$ qui donne $v_C = v_{CO} + It/C$

  $i_L = I$

- configuration 6 → $i_C = I$ qui donne $v_C = v_{CO} + It/C$

  $v_L = -E$ qui donne $i_L = i_{Lo} - Et/L$

- configuration 7 → $v_C = E$

  $i_L = I$

Etude des cas où l'on a un circuit oscillant :

Pour les analyser, il faut rechercher les schémas équivalents des régimes forcés théoriques (figure 13). Ils sont obtenus lorsque v_C et i_L sont devenus continus, ce qui suppose que le système

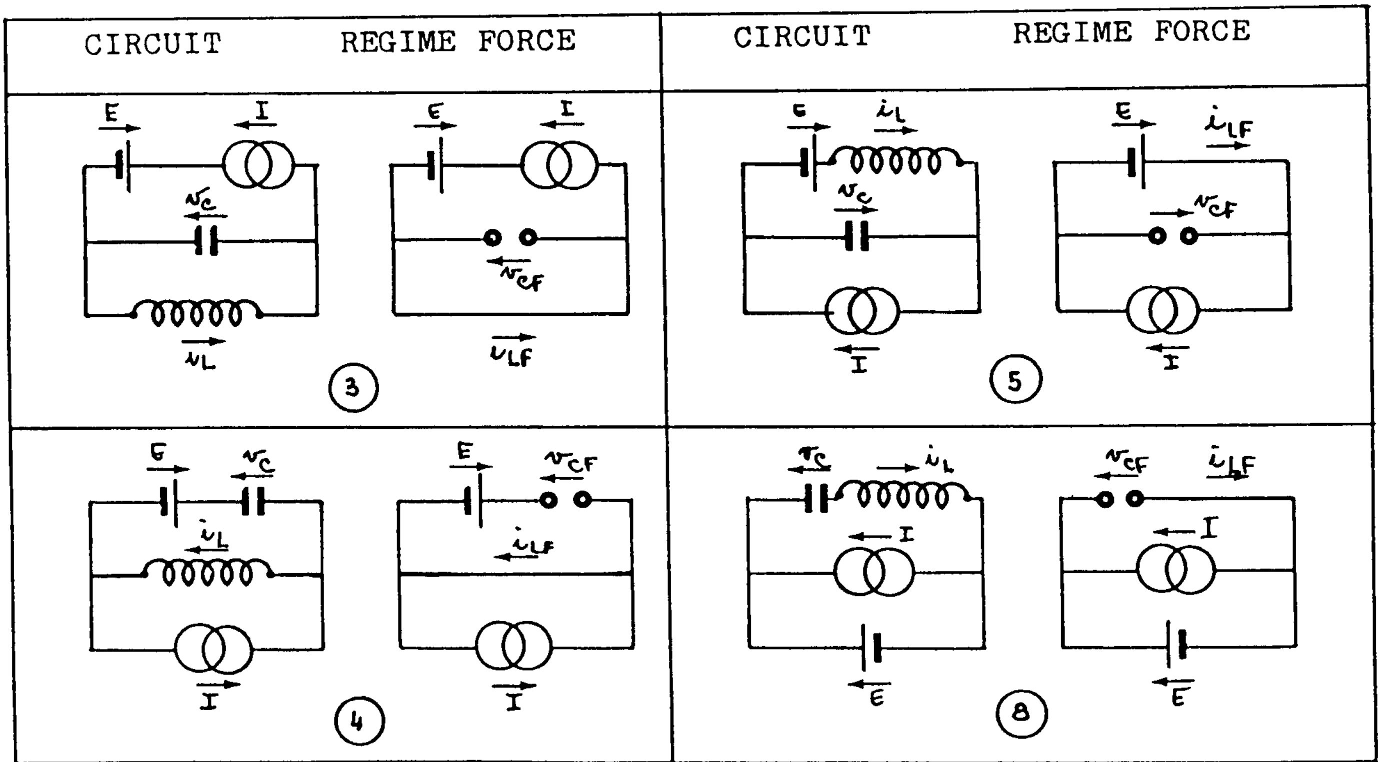


FIG:I3.

- configuration 3 → $v_{cF} = 0$ et $i_{LF} = I$
- configuration 4 → $v_{cF} = E$ et $i_{LF} = I$
- configuration 5 → $v_{cF} = E$ et $i_{LF} = I$
- configuration 8 → $v_{cF} = E$ et $i_{LF} = 0$

Il est facile de constater que :

- les configurations 4 et 5 sont identiques puisqu'elles correspondent à un même régime libre et à un même régime forcé.

- Les configurations 3 et 8 sont des cas particuliers des précédentes $v_{CF} = 0$ pour l'une, $i_{LF} = 0$ pour l'autre.

En conclusion, il suffit d'étudier une seule configuration . Nous choisirons d'étudier la configuration 4 .

3-2 : Réponse d'un circuit LC à un échelon de tension et de courant. Méthode du plan de phase

3-2-1 : Cas général

Problème : Etudier la réponse du circuit LC de la figure 14a à deux excitations, l'une en courant, l'autre en tension et avec les conditions initiales i_{L0} et v_{C0}. Cela correspond à la configuration 4 du paragraphe précédent.

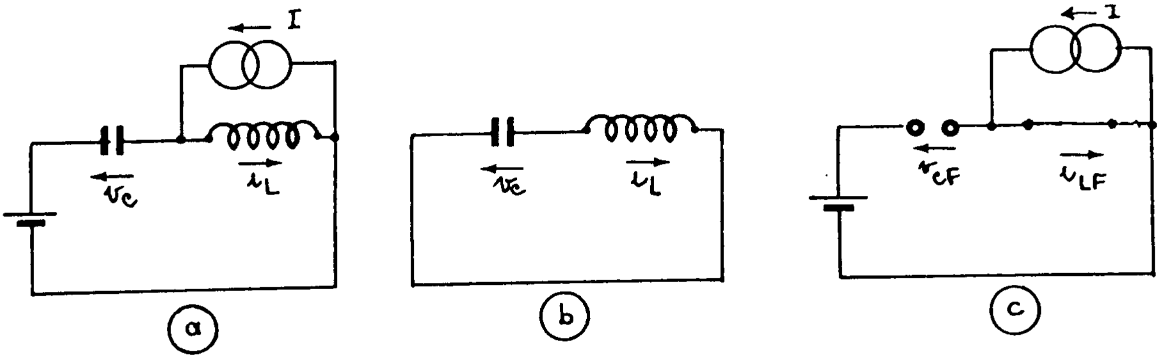


FIG: 14

Etude du régime libre :

Le schéma équivalent de ce régime libre est donné sur la figure 14b . Pour ce régime, nous prendrons comme condition initiale i_0 et v_0.

L'équation différentielle du régime libre est donc :

$$LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + i_L = 0$$

Les racines de l'équation caractéristique sont $\pm j\omega$ avec $\omega^2 = 1/LC$

La solution de cette équation est donc de la forme :

$i_{Ll} = A \cos \omega t + B \sin \omega t$

Pour déterminer les constantes A et B on écrira $(i_{Ll})_0 = 0$ et puisque

$v_{cl} = -L\, di_{Ll}/dt$, $(di_{Ll}/dt)_0 = -v_0/L$

Cela donne $A = i_0$ et $B = -v_0\sqrt{C/L}$

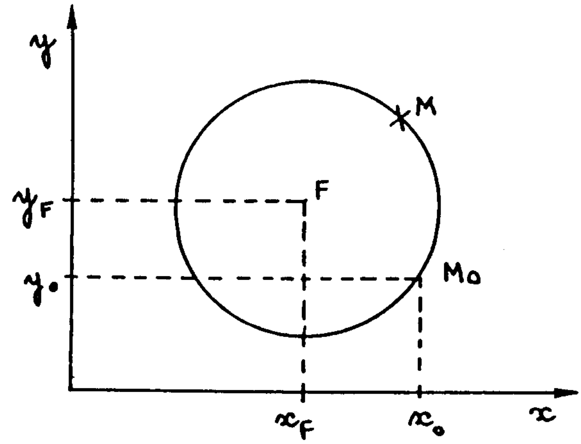


FIG:I5.

En identifiant parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$(x - x_F) = (x_0 - x_F) \times \cos\theta - (y_0 - y_F) \times \sin\theta$$

$$(y - y_F) = (x_0 - x_F) \times \sin\theta + (y_0 - y_F) \times \cos\theta$$

Si θ est un angle fonction du temps, le point M décrit le cercle.

Les équations de i_L et v_C peuvent aussi se mettre sous la forme :

$$v_C - E = (v_{CO} - E)\cos\omega t + (i_{Lo} - I) * \sqrt{L/C} * \sin\omega t$$

$$(i_L - I)\sqrt{L/C} = -(v_{CO} - E)\sin\omega t + (i_{Lo} - I)\sqrt{L/C} * \cos\omega t$$

On voit que ces équations représentent dans le plan v_C , $i_L \times \sqrt{L/C}$ un cercle (figure 16)

- de centre E , $I\sqrt{L/C}$, point représentatif du régime forcé
- passant par le point v_{CO} , $i_{Lo}\sqrt{L/C}$, point représentatif des conditions initiales
- décrit dans le sens inverse du sens trigonométrique à partir du point de condition initiale v_{CO} , $i_{Lo}\sqrt{L/C}$

Ce résultat, particulièrement important, peut ête généralisé de la manière suivante :

Tout circuit L C soumis à des échelons de tension et de courant et dont le schéma équivalent du régime libre est celui d'un circuit L C série, aura une réponse qui pourra être représentée dans le plan (v_C $i_L\sqrt{L/C}$) par un cercle :

- centré au point caractéristique du régime forcé du système

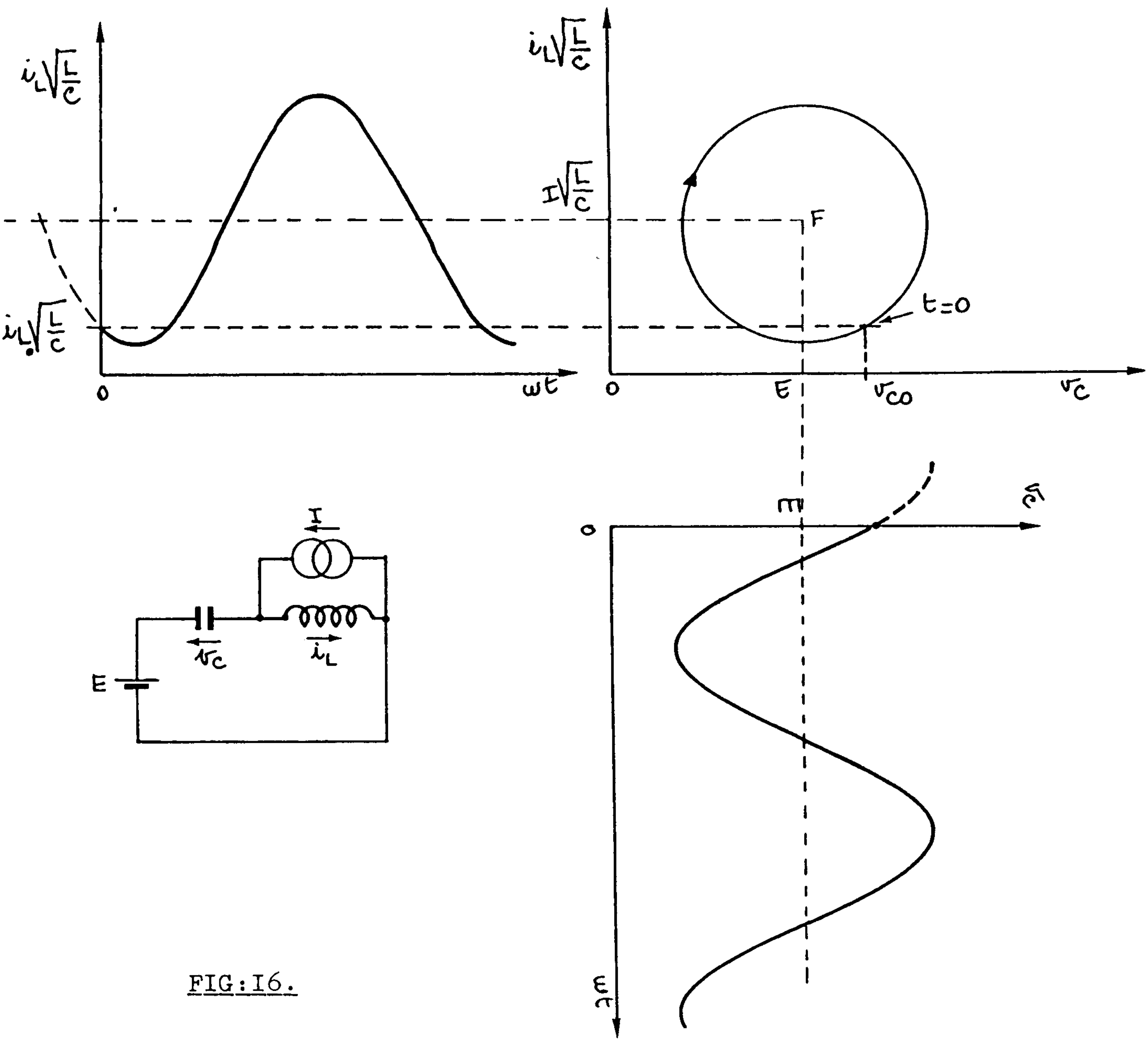


FIG:I6.

-passant par le point v_{co}, $i_{Lo}\sqrt{L/C}$, point représentatif des conditions initiales

- décrit dans le sens inverse du sens trigonométrique à partir du point de condition initiale v_{co}, $i_{Lo}\sqrt{L/C}$ si l'on a choisi un sens positif de i_L tel que le le courant i_L rentre par l'armature positive du condensateur.

Ce cercle tracé, il suffit alors de suivre le déplacement du point M sur le cercle pour en déduire l'allure de $i_L(t)$ et $v_c(t)$. Pour être efficace, cet exercice simple nécessite cependant d'avoir présent à l'esprit un certain nombre de résultats élémentaires que nous allons énumérer.

- Les grandeurs v_c et i_L oscillent autour de leur régime forcé avec une amplitude crête à crête égale au diamètre du cercle.

- Les grandeurs v_c et i_L sont en quadrature. Quand l'une atteint sa valeur égale à celle du régime forcé, l'autre présente une valeur extrémale.

- Pour suivre l'évolution du point courant sur le cercle, il est recommandé de travailler par demi-cercle complet correspondant à une demi-période.

La figure 16 illustre ces propos.

Remarques :

1/ Pour tracer les diagrammes temporels $i_L(t)$ et $v_C(t)$ correspondant à l'évolution du point M dans le plan (v_C , $i_L\sqrt{L/C}$), le sens de parcours du point M sur le cercle dépend des conventions choisies pour v_C et i_L.

- Si le courant i_L rentre par l'armature positive du condensateur, le cercle est décrit dans le sens inverse du sens trigonométrique.

- Si le courant i_L sort par l'armature positive, le cercle est décrit dans le sens trigonométrique.

2/ Le circuit que nous avons étudié est tout à fait théorique puisque le système oscille indéfiniment autour du régime forcé . Ceci n'a physiquement aucun sens et, pratiquement, il y aura toujours un élément résistif, donc un amortissement, c'est-à-dire un système qui évolue vers le régime forcé . Cependant, cette étude théorique sans amortissement est tout à fait utile dans le domaine de l'électronique de puissance car, à l'échelle d'une commutation (inférieure à la période), l'amortissement peut être négligé . Nous verrons plus loin comment l'on peut conduire l'étude dans le cas d'un amortissement faible .

3-2-2 : Exemples

Application d'un échelon de tension sur un circuit LC :

A l'aide du thyristor Th, on applique une tension E au circuit LC de condition initiale

$v_C(0) = 0$ et $i_L(0) = 0$ (figure 17a)

Le schéma équivalent du régime libre est celui de la figure 17b. C' est donc un cercle dans le plan v_C , $i_L \times \sqrt{L/C}$

Le schéma équivalent du régime forcé est celui de la figure 17c. On en déduit

$i_{LF} = 0$ et $v_{CF} = E$

Dans le plan de phase v_C , $i_L \times \sqrt{L/C}$ la réponse de ce circuit est donc un cercle centré en (O, E) et passant par le point (O , O) représentant les conditions initiales (figure 17 d) .

On en déduit les courbes $v_C(t)$ et $i_L(t)$ de la figure 17e.

Le thyristor se bloque lorsque le courant i_L s'annule, c'est-à-dire au bout d'une demi-période.

On notera qu'alors le condensateur est chargé à 2 E .

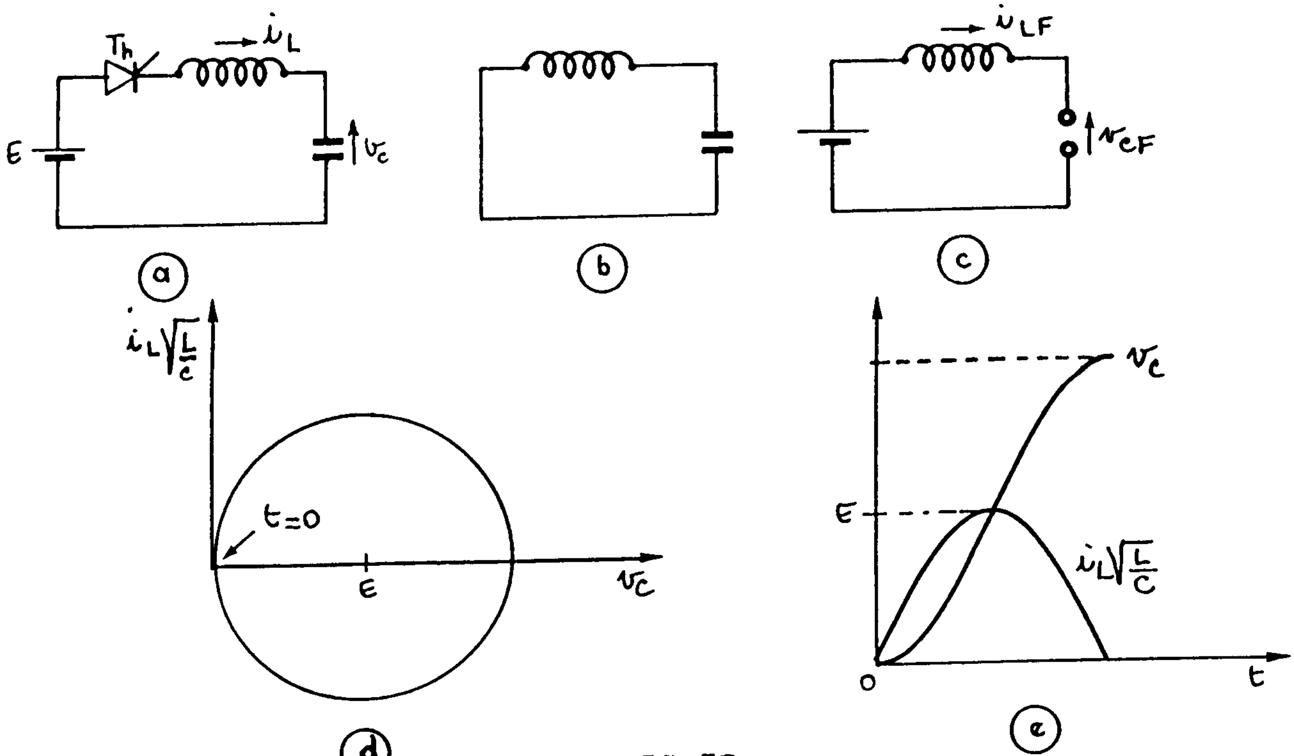


FIG:I7.

Inversion de la polarité d'un condensateur

Dans les convertisseurs statiques à thyristors, en particulier les hacheurs, on a souvent besoin d'un dispositif simple permettant l'inversion de la polarité d'un condensateur. Pour cela on utilise le circuit de la figure 18a avec les conditions initiales :

$$v_c(0) = v_0 < 0 \quad \text{et} \quad i_L(0) = 0$$

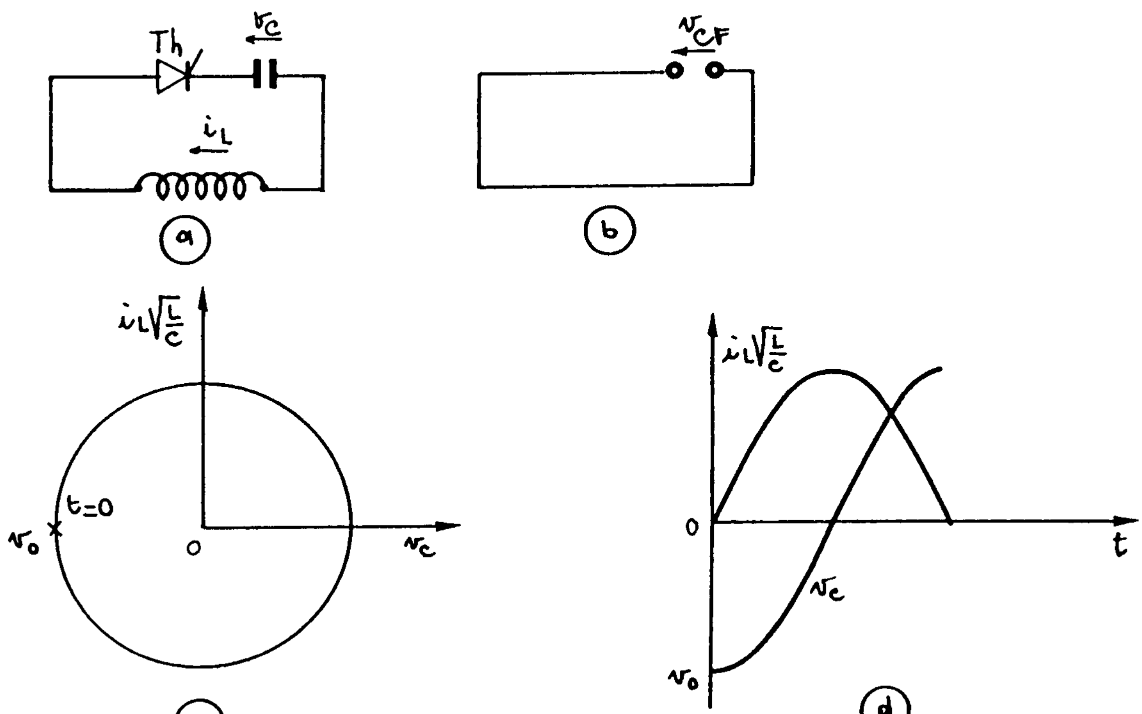


FIG:I8.

A l'instant $t = 0$ on amorce le thyristor Th , ce qui est possible puisque la tension à ses bornes est positive.

Dans le plan v_C , $i_L \times \sqrt{L/C}$ le régime libre de ce circuit est un cercle.

Le schéma équivalent du régime forcé de la figure 18b donne $i_{LF} = 0$, $v_{CF} = 0$.

Dans le plan de phase v_C , $i_L \times \sqrt{L/C}$ la réponse du circuit est donc un cercle (figure 18c) centré en (0, 0) et passant par le point (v_0 , 0) représentant les conditions initiales .

On déduit de ce cercle les courbes $i_L(t)$ et $v_C(t)$ de la figure 18d .

Le courant dans le thyristor s'annule au bout d'une demi-période et, à partir de cet instant, le système n'évolue plus . On a donc réalisé l'inversion de la polarité du condensateur .

La valeur maximale de i_L est tirée de la relation $i_L \times \sqrt{L/C} = -v_0$, soit :

$i_L = -v_0 \times \sqrt{C/L}$

3-3 : Réponse d'un circuit LC avec prise en compte d'un amortissement

Problème : Etudier le régime libre d'un circuit R L C avec faible amortissement. Nous prendrons, par exemple, comme conditions initiales : $v_C(0) = v_0$ et $i_L(0) = 0$

Nous pouvons écrire les relations :

$$v_C = -R\, i_L - L\, di_L / dt \quad \text{et} \quad i_L = C\, d v_C / dt$$

D'où l'équation différentielle :

$$LC \frac{d^2 v_C}{d t^2} + RC \frac{d v_C}{d t} + v_C = 0$$

Les circuits R, L, C que nous considérons sont toujours oscillants et faiblement amortis. La solution générale de l'équation différentielle est donc dans ce cas :

$$v_C = [\exp(-\alpha t)]\,(C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t)$$

avec $\alpha = R/2L$, $\omega = \sqrt{(\omega_0^2 - \alpha^2)}$ et $\omega_0^2 = 1/LC$

Les conditions initiales $v_C(0) = v_0$ et $i_L(0) = 0$ permettent de déterminer les constantes C_1 et C_2 . On trouve :

$C_1 = v_0$ et $C_2 = [\alpha/\omega]\, v_0$ d'où :

$v_C(t) = v_0 [\exp(-\alpha t)] (\cos \omega t + [\alpha/\omega] \sin \omega]$

$i_L(t) = - C v_0 [\omega_0^2 / \omega] \ [\exp(-\alpha t)] \sin \omega t$

Dans le cas où l'amortissement est faible on peut écrire :

$\alpha \ll \omega$ dono $[\alpha / \omega] \ll 1$ et $\omega \approx \omega_0$

Les équations x et y s'écrivent alors :

$v_C(t) = v_0 [\exp[-\alpha t]] \cos \omega t$

$i_L(t) = - C v_0 \omega_0 [\exp(-\alpha t)] \sin \omega t$

On peut aussi les mettre sous la forme :

$v_C(t) = v_0 [\exp[-\alpha t]] \cos \omega t$

$i_L(t) \sqrt{L/C} = - v_0 [\exp(-\alpha t)] \sin \omega t$

Dans le plan $v_C(t)$, $i_L(t) * \sqrt{L/C}$ ces équations sont représentées par une spirale logarithmique (figure 19) .

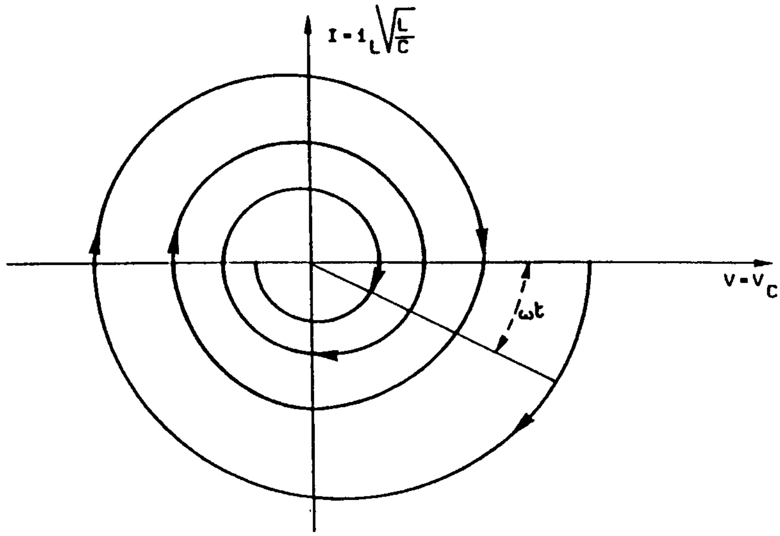


FIG : 19

Cherchons une expression approchée de cette spirale .

En écrivant $\exp(1 - \alpha t) \approx 1 - \alpha t$, il vient :

$v_C(t) = v_0 (1 - \alpha t) \cos \omega t$

$i_L(t) \sqrt{L/C} = - v_0 (1 - \alpha t) \sin \omega t$

Cherchons l'influence de l'amortissement en regardant quelle est la valeur de v_c au bout d'une demi-période ($\omega t = \pi$) .

$\alpha T / 2 = R \pi / 2 L \omega = \pi / 2 Q$

Avec $Q = L \omega / R$ facteur de qualité du circuit oscillant .

$v_c (T/2) = v_f = - v_0 (1 - \pi / 2 Q)$

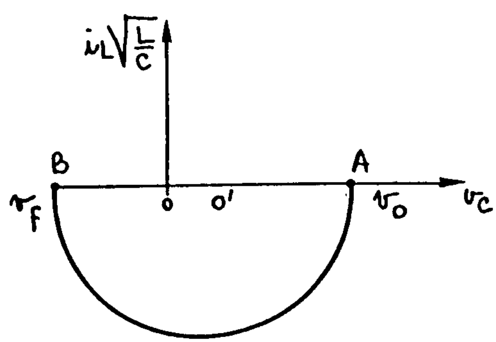
La chute de tension relative de v_c pour une demi-période est donc $\pi / 2 Q$.

Au bout d'un quart de période ($\omega t = \pi / 2$) :

$i_L \sqrt{L/C} = - v_0 (1 - \pi / 4 Q)$

Pratiquement nous considèrerons que sur une demi-période, cette spirale est très proche d'un cercle :

- de centre O' milieu de AB (figure 20) ayant pour coordonnées ($0 , v_0 \pi / 4 Q$)
- de rayon $v_0 \ (1 - \pi / 4 Q)$



avec o' centre du cercle

et $oo' = v_o \dfrac{\pi}{4Q}$

FIG:20.