

Une démarche de cotation fonctionnelle^[1]

LUC CHEVALIER

Depuis cinq ans que l'auteur anime la filière Génie mécanique de l'école Ingénieurs 2000 à l'université de Marne-la-Vallée, une activité pédagogique originale de conception, initialement mise en place par Luc Mathieu^[2], s'est développée en collaboration entre l'UMLV et l'ESCPI du Cnam : il s'agit de travailler par équipes sur la conception et l'industrialisation d'un composant, ce qui nécessite d'effectuer une cotation dimensionnelle et spatiale. C'est la première partie de cette démarche, qui en compte trois, que nous allons suivre.

Durant trois semaines, les étudiants de troisième année travaillent par équipes de la manière suivante :

→ La première semaine est consacrée à la préconception du composant : situation, environnement, fonction, mise en place des surfaces fonctionnelles, modélisation surfacique sous Catia V5 de ces surfaces et cotation fonctionnelle associée **1**.

→ La deuxième, à la conception du produit : mise en volume du composant sous les contraintes de fonctionnement, d'usinage, d'environnement et en relation avec le choix matériau-procédé (utilisation du logiciel CES), modélisation volumique sous Catia et prototypage par frittage laser de poudre polymère **2**.

→ La troisième, à la validation par le calcul de structure (modélisation des sollicitations des composants, mise au point d'un modèle éléments finis, calcul et analyse des résultats) en parallèle d'une approche expérimentale

[1] Le texte présenté ici, notamment « L'analyse fonctionnelle du composant mécanique », doit beaucoup à la collaboration avec les collègues qui co-encadrent cette activité ; notamment Luc Mathieu, Frédéric Charpentier, Olivier Bélingard, François Mollet, Stéphane Zimmer et Emmanuelle Silve. Un grand nombre d'illustrations est extrait des comptes rendus que les apprentis en formation d'ingénieur rédigent à l'issue de cette activité : qu'ils soient ici remerciés.

[2] Luc Mathieu est maître de conférences au Cnam, responsable de la filière Génie mécanique de l'ESCPI et auteur de nombreux articles sur la spécification des produits, notamment : « Méthode de choix des spécifications fonctionnelles par des graphes », A. Ballu, L. Mathieu, *Technologie et formation* n° 84, 12-19 (1999) ; « Cotation à l'aide des graphes le long du cycle de conception », A. Ballu, D. Teissandier, L. Mathieu, *Actes de la journée thématique AIP-Primeca sur le tolérancement*, 23 sept. 2005 à l'ENS de Cachan ; « Analyse fonctionnelle, une solution pour la recherche des conditions géométriques », F. Charpentier, L. Mathieu, *Actes de la journée thématique AIP-Primeca sur le tolérancement*, 23 sept. 2005 à l'ENS de Cachan.



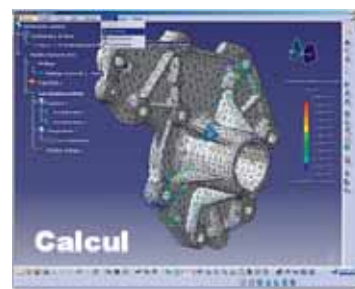
1 Un corps de pompe à eau : composant mécanique et pièces adjacentes (à gauche), modélisation Catia des surfaces fonctionnelles (à droite)



2 Un corps de pompe à eau : modélisation Catia du produit industrialisé (à gauche), composant prototypé (à droite)



3 Un corps de pompe à eau : test de sollicitation mécanique (à gauche), calcul par éléments finis sous Catia (à droite)



(mise au point d'un test caractéristique de la sollicitation principale du composant et mesures extensométriques) **3**.

Deux autres semaines sont dédiées à la conception des processus d'usinage, toujours sous Catia, et en fin d'année les étudiants sont une semaine au Certa de Flins pour assurer la mise en production des composants étudiés. Ces activités de synthèse mobilisent les connaissances que les étudiants ont acquises durant les deux premières années de formation **4**.

En s'appuyant sur les exemples développés lors de ces activités, notre objectif est de faire le point sur les techniques de cotation dimensionnelle et spatiale qui permettent de spécifier les produits.

(première partie)

De la fonction aux conditions géométriques Une activité pédagogique de conception intégrée

Dans chaque entreprise, parallèlement à la démarche de conception originelle, c'est-à-dire de création, d'un produit industriel, l'analyse des produits existants de l'entreprise, ou d'une entreprise concurrente, a pour but de les améliorer, ou de les plagier, en y intégrant des données nouvelles : évolution des technologies, des besoins, de la mode donc du design...

L'objectif de cette démarche est donc de reconcevoir un produit en fonction d'un besoin évoluant, de nouvelles contraintes ou de solutions technologiques plus économiques. De plus, les outils d'ingénierie assistée par ordinateur (CAO, FAO...) et les moyens associés (prototypage rapide) facilitent cette reconception en permettant un mode d'existence virtuelle du produit ou la réalisation de sa maquette. La validation de la conception est ainsi rendue plus facile par l'utilisation de modules de simulation cinématique et dynamique ou de calcul par éléments finis.

Le travail demandé aux apprentis ne sera pas aussi ambitieux. L'objectif de l'activité, c'est qu'ils utilisent et s'approprient les méthodes et les outils nécessaires à cette démarche de reconception. Pour la première partie de ce travail (préconception), ils devront :

- Analyser un produit industriel.
- Modéliser partiellement la géométrie de l'un de ses composants par une approche surfacique.
- Définir de façon univoque la géométrie spécifiée des surfaces fonctionnelles.

L'analyse fonctionnelle du composant mécanique

Nous ne chercherons pas à redéfinir toutes les étapes de l'analyse fonctionnelle — nous renvoyons pour cela le lecteur au *Guide de la compétitivité industrielle* [3], par exemple. La démarche est décomposée en six étapes, dont le support sera ici un composant Renault : le microcarter de direction (μ CD) [5].

L'expression du besoin

Cette première étape permet de conclure quant à la nécessité de conserver le système dans l'état. Pour cela, il faut :

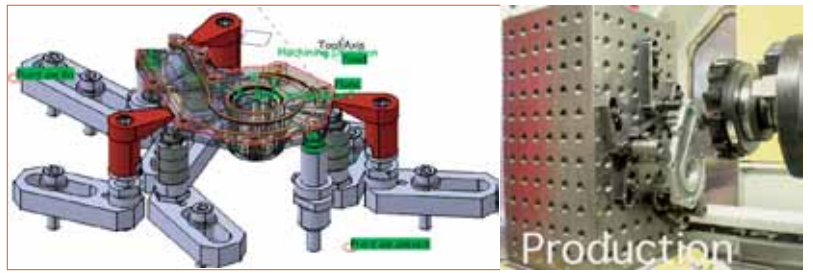
- Délimiter le périmètre de l'étude.
- Énoncer et valider le besoin.

La délimitation du périmètre est importante, car elle conditionne le volume de travail à faire par la suite : un

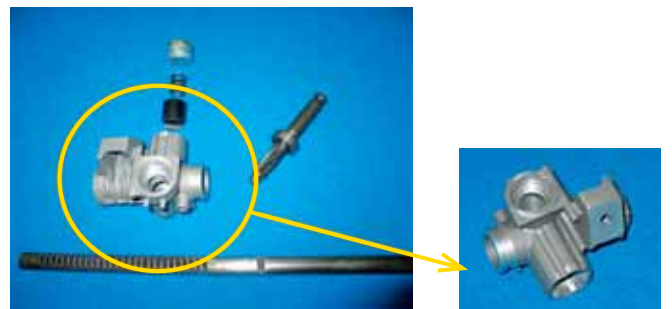
Mots-clés

lycée technologique,
mécanique,
multimédia,
prébac

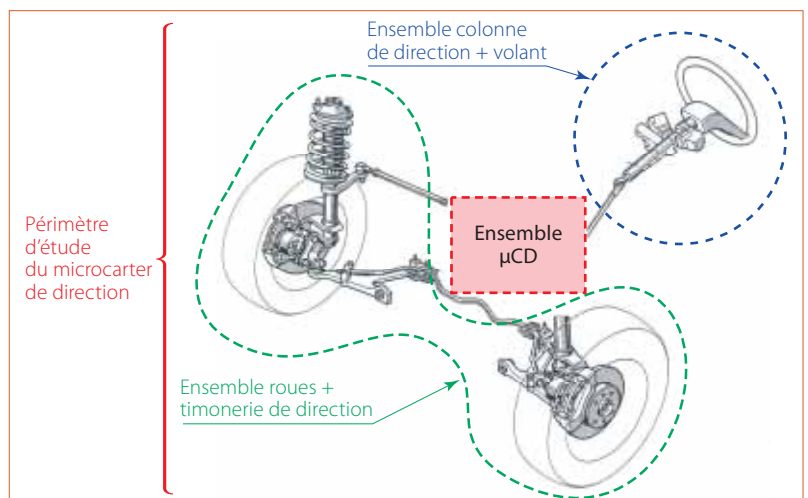
périmètre trop large [6] n'est pas réaliste dans le cadre d'une activité pédagogique ; à l'inverse, un périmètre limité au composant étudié restreint le nombre des fonctions du système et ne permet pas une étude ultérieure pertinente. Il s'agit de définir précisément l'environnement et la ou les fonctions de la pièce dans son ensemble, de comprendre sur quel élément l'objet agit et à qui il rend service.



4 Un corps de pompe à eau : CAO et production

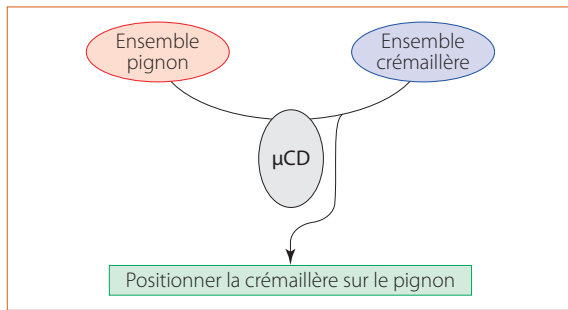


5 Le microcarter de direction et les pièces adjacentes



6 Le microcarter de direction dans son environnement

[3] Les chiffres dans les losanges renvoient à la bibliographie p. 39.



7 Le schéma «bête à cornes»

L'énoncé et la validation du besoin s'effectuent en posant traditionnellement trois questions :

- À qui ou à quoi le système rend-t-il service ? Le système μCD rend service au pignon.
- Sur qui ou quoi le système agit ? Le système μCD agit sur la crémaillère.
- Pour quel but ? Le système μCD est utilisé afin d'assurer le positionnement du pignon par rapport à la crémaillère par l'intermédiaire du berceau (bâti).

Les réponses, améliorables, sont celles des apprentis qui ont travaillé sur le composant. L'outil graphique associé à cette étape est appelé «bête à cornes» et synthétise les réponses aux questions ci-dessus **7**.

Les réponses, améliorables, sont celles des apprentis qui ont travaillé sur le composant. L'outil graphique associé à cette étape est appelé «bête à cornes» et synthétise les réponses aux questions ci-dessus **7**.

L'analyse fonctionnelle du besoin

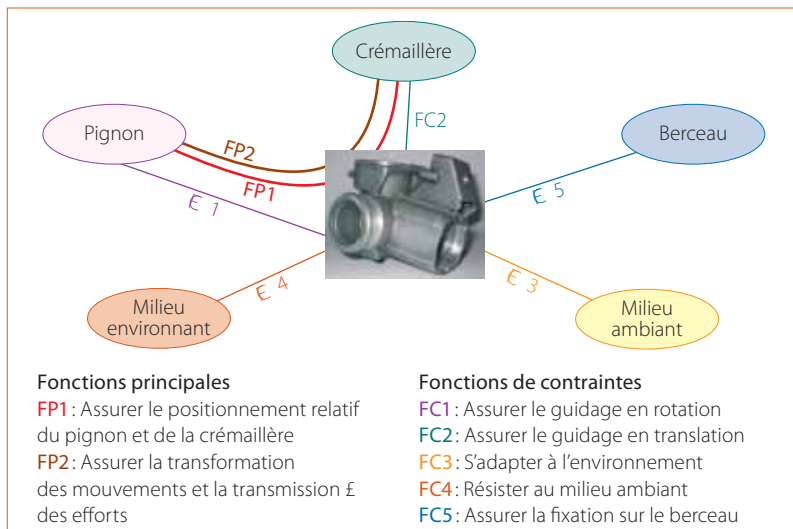
L'objectif de cette deuxième étape est de rédiger le cahier des charges fonctionnel. Pour cela, il faut :

- Établir le profil de vie du produit.
- Recenser les éléments constitutifs de son environnement.
- Identifier et valider les fonctions de service.
- Caractériser ces fonctions de service.

Le diagramme «pieuvre» synthétise les composants annexes et permet de visualiser les fonctions principales et de service sous forme de liens **8**.

La recherche des principes de fonctionnement du système

À l'issue de cette étape, il faut être en mesure de proposer une solution technique pour satisfaire chaque fonction de service. La démarche consiste à rechercher



8 Le diagramme «pieuvre»

le maximum de solutions (brainstorming), à sélectionner les solutions et à les présenter sous forme schématique.

Par exemple, pour la fonction de service FC1, lors du brainstorming, on passe en revue toutes les solutions technologiques connues. On les présente sous la forme d'un Fast **9** et on critique leur pertinence en fonction du contexte.

Le choix des solutions techniques va permettre d'affiner la description de la géométrie du composant et de réaliser l'analyse fonctionnelle technique.

L'analyse fonctionnelle technique

Lors de cette étape, on doit être en mesure de décrire en détail comment fonctionne le mécanisme, de déterminer et formaliser les relations entre les composants. Pour cela, il faut :

- Énoncer et structurer les fonctions techniques nécessaires à la réalisation des fonctions de service.
- Énumérer les solutions technologiques associées.
- Déterminer les flux entre les composants.

Cette étape permet d'ébaucher la construction du tableau d'analyse fonctionnelle (TAF) qui sera complété à l'issue de la suivante.

L'expression des exigences fonctionnelles

Pour compléter le TAF, il faut être en mesure de proposer une cotation qui exprime le bon fonctionnement du système. Pour cela, il faut :

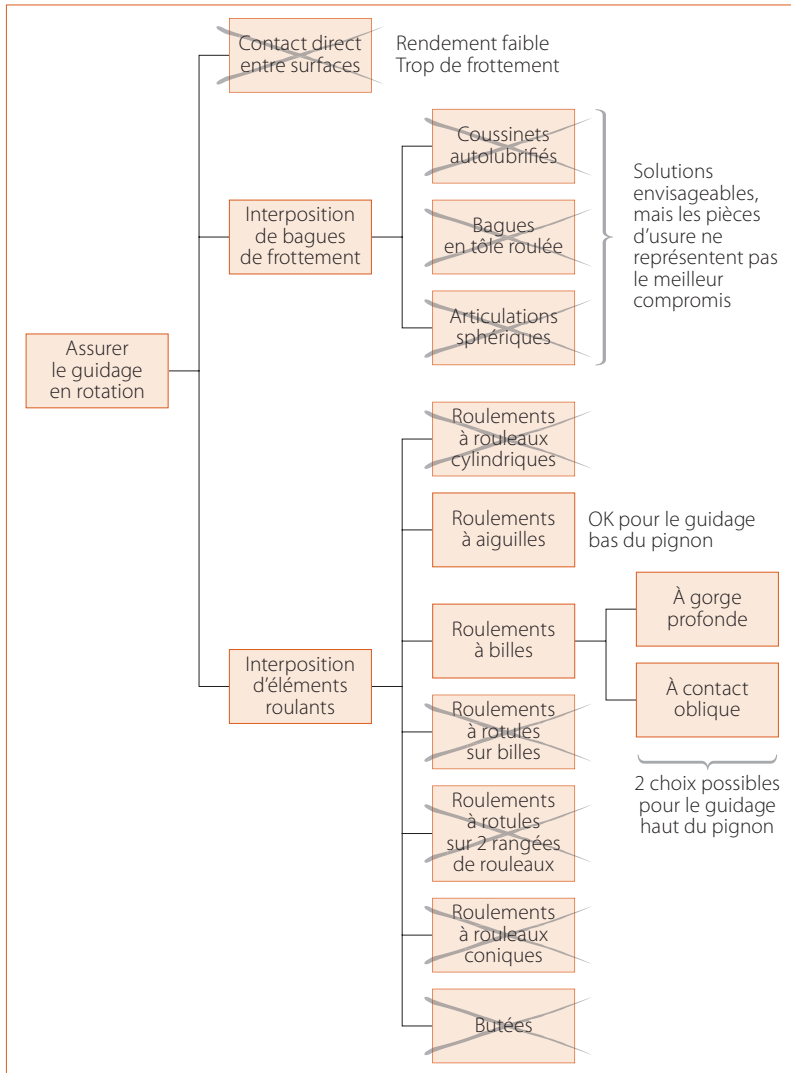
- Schématiser la solution technique pour faire apparaître la géométrie des surfaces fonctionnelles.
- Analyser les liaisons et les relations géométriques entre les surfaces des pièces.
- Exprimer les exigences fonctionnelles géométriques pour chaque fonction technique élémentaire.
- Identifier les groupes de surfaces fonctionnelles.
- Exprimer, pour le composant étudié, le dimensionnement et le tolérancement dans un langage univoque normalisé (Iso).

Si toutes les étapes précédentes relèvent de la rigueur, du bon sens et de la culture technologique, il y a ici une méthodologie technique à développer pour être certain de ne pas passer à côté de conditions fonctionnelles importantes. C'est essentiellement ce point qui sera développé dans la suite de cet article.

La création du modèle virtuel et du dossier technique de définition du composant

C'est l'étape de «mise au propre» dans un environnement numérique (Catia, SolidWorks, Solid Edge...) de l'ensemble des résultats des précédentes : il s'agit de proposer un modèle numérique surfacique partiel s'appuyant sur les contraintes d'environnement du système. Pour cela, il faut :

- Modéliser les surfaces fonctionnelles du composant par une approche surfacique.
- Analyser l'arbre de construction du modèle et le critiquer.



9 Le Fast de créativité relatif à FC1

- Valider la structure du modèle.
- Définir les spécifications géométriques liées aux surfaces fonctionnelles du composant sur le modèle 3D.
- Définir les spécifications géométriques liées aux surfaces fonctionnelles du composant sur la mise en plan.

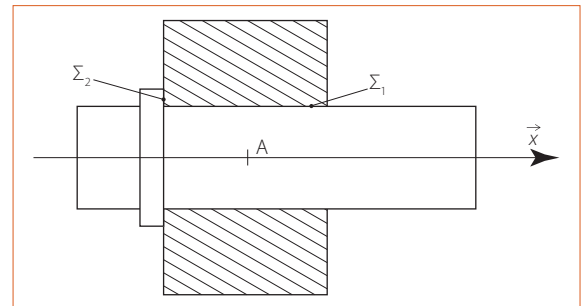
L'expression des conditions fonctionnelles en conditions géométriques

Nous allons revenir plus en détail sur la partie qui nous intéresse plus particulièrement : l'étape 5, l'expression des exigences fonctionnelles, dans laquelle on développe le passage des conditions fonctionnelles aux spécifications.

Dans un premier temps, nous nous limiterons à la mise en évidence des conditions géométriques par l'analyse de l'hyperstatisme. Nous invitons le lecteur à se rafraîchir la mémoire sur la détermination du degré d'hyperstatisme en annexe. En s'appuyant sur la théorie des graphes et en décomposant les surfaces qui interviennent dans la réalisation de la fonction étudiée, nous mettrons en évidence le lien entre le degré d'hyperstatisme et les conditions géométriques.

Cette étape permet de faire le bilan sur la cotation à installer au niveau du composant étudié, mais non de chiffrer cette spécification. Dans une seconde partie,

nous détaillerons la démarche qui permet de passer de la condition fonctionnelle quantifiée aux valeurs numériques des cotes ou spécifications.



10 Le guidage cylindrique élémentaire

Un exemple élémentaire : le guidage lisse en rotation

Il n'est pas rare dans un dessin technique de rencontrer la configuration suivante : guidage en rotation réalisée par un centrage long (surface cylindrique Σ1) et un arrêt axial (surface plane Σ2).

Dans un premier temps, si on suppose que les cylindres sont parfaitement cylindriques et de mêmes diamètres (surface de contact Σ1) et les deux surfaces planes (surface Σ2), il ne subsiste qu'une rotation relative autour de l'axe Ax. En effet, si on se limite à l'influence de la surface cylindrique Σ1, le mouvement relatif entre l'alésage et l'arbre est caractérisé par :

$$\{V(2/1)\} = \begin{Bmatrix} \omega_{21} \vec{X} \\ u_{21} \vec{X} \end{Bmatrix}_A$$

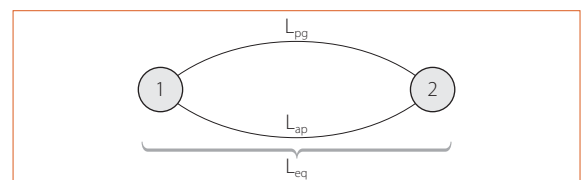
C'est le torseur cinématique caractéristique d'une liaison pivot glissant. Si on considère maintenant la surface M seule, le torseur caractéristique du mouvement relatif entre les deux pièces vaut :

$$\{V(2/1)\} = \begin{Bmatrix} \omega_{21} \vec{X} \\ v_{21} \vec{Y} + w_{21} \vec{Z} \end{Bmatrix}_A$$

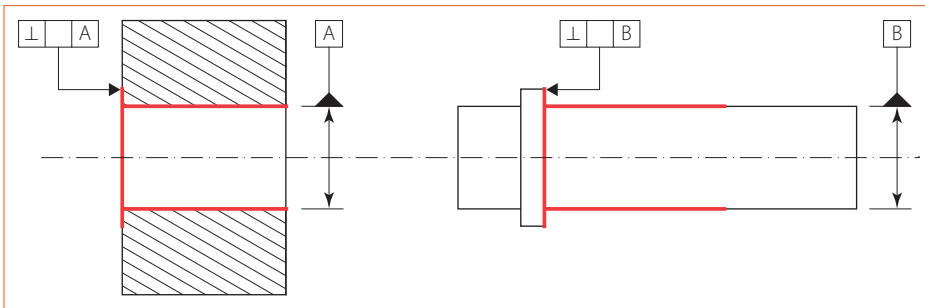
Ce torseur correspond à la liaison appui plan. L'association des deux surfaces limite les seuls mouvements autorisés à ceux qui sont communs aux deux torseurs précédents :

$$\{V(2/1)\} = \begin{Bmatrix} \omega_{21} \vec{X} \\ u_{21} \vec{X} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \omega_{21} \vec{X} \\ v_{21} \vec{Y} + w_{21} \vec{Z} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \omega_{21} \vec{X} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$$

Ce qui correspond à une liaison pivot. L'association en parallèle de ces deux liaisons élémentaires donne donc une liaison équivalente, ici la liaison pivot.



11 Le graphe des liaisons



12 La spécification de perpendicularité qui traduit les 2 conditions angulaires

En général, en phase de modélisation, on saute cette étape pour schématiser directement l'association comme une liaison pivot. Dans le cadre de la cotation des surfaces Σ_i , il faut au contraire « éclater » les liaisons en surfaces élémentaires Σ_1 et Σ_2 . Il est intéressant de noter que le graphe des liaisons donne un degré d'hyperstatisme de 2. En effet :

$$\nu = 1 \quad I_c = 2 + 3 = 5 \quad m = 1$$

$$\uparrow \quad r_c = 4 \quad h = 2$$

Grâce aux torseurs cinématiques précédents, on peut « voir » que le degré de 2 correspond aux deux équations triviales du système cinématique élémentaire suivant :

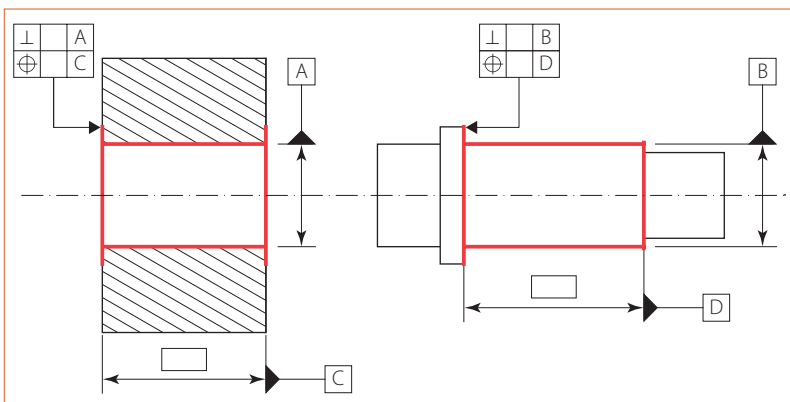
$$\omega_{21}^{ap} = \omega_{21}^{pg} \quad u_{21}^{pg} = 0$$

$$0 = 0 \quad v_{21}^{ap} = 0$$

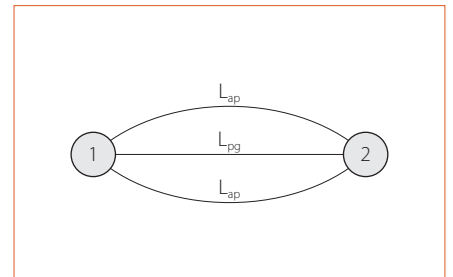
$$0 = 0 \quad w_{21}^{ap} = 0$$

Les équations impliquées sont celles de la fermeture des rotations, le degré d'hyperstatisme est donc associé à deux conditions angulaires autour des axes Y et Z : l'axe du cylindre Σ_1 doit être parallèle à la normale au plan Σ_2 .

Il est assez remarquable de constater qu'une analyse théorique menée sur un modèle (parfait) conduit à une information sur la spécification, c'est-à-dire la gestion des défauts. Pour gérer l'hyperstatisme de cette liaison, il faut imposer deux conditions angulaires entre les surfaces Σ_1 et Σ_2 de chacune des pièces de la boucle. La spécification de perpendicularité englobe ces deux conditions angulaires 12.



14 Les spécifications de perpendicularité et de localisation



13 Le graphe des liaisons associé à la solution avec arrêt axial bilatéral

Pour affiner un peu l'exemple proposé, introduisons l'arrêt axial opposé (en général une liaison pivot est constituée de deux arrêts axiaux). Cet arrêt est réalisé par une seconde surface plane (notée Σ_3) parallèle à Σ_2 . Le graphe des liaisons est donc un peu plus complexe, et on distingue maintenant deux boucles indépendantes 13.

Le degré d'hyperstatisme augmente de manière significative, et le nombre de spécifications augmente en proportion. En effet, pour ce graphe, on a :

$$\psi = 2 \quad I_c = 2 + 3 + 3 = 8 \quad m = 1$$

$$\uparrow \quad r_c = 8 - 1 = 7 \quad h = 6 \exists 2 - 7 = 5$$

Pour chacune des deux boucles « L_{ap} - L_{pg} », on a un degré élémentaire de 2 par boucle associé à deux conditions angulaires (voir résolution précédente) ; mais si on considère la boucle extérieure « L_{ap} - L_{ap} » apparaît une condition dimensionnelle. En effet, la fermeture cinématique de cette boucle donne :

$$\omega_{21}^{ap1} = \omega_{21}^{pg2} \quad 0 = 0$$

$$0 = 0 \quad v_{21}^{ap1} = v_{21}^{ap2}$$

$$0 = 0 \quad w_{21}^{ap1} = w_{21}^{ap2}$$

Les deux conditions angulaires sont déjà prises en compte dans les boucles élémentaires « L_{pg} - L_{ap} », mais la condition dimensionnelle (car associée à une équation de vitesse) sur l'axe x n'y est pas mise en évidence. Dans ce cas, une spécification de positionnement entre les plans Σ_2 et Σ_3 engloberait le parallélisme, qui représente la condition angulaire et la distance imposée suivant x 14.

Au total, il y a donc bien un degré d'hyperstatisme de 5, somme de $2 \exists 2$ conditions angulaires + 1 condition dimensionnelle.

En résumé, pour déterminer sans ambiguïté les spécifications qui découlent des conditions fonctionnelles, il suffit de faire le graphe des liaisons élémentaires : chaque surface identifiée dans le TAF est représentée par une liaison élémentaire (rappelons que les liaisons élémentaires sont celles obtenues à partir des surfaces géométriques élémentaires, qui sont : le plan, le cylindre de révolution et la sphère).

L'analyse de l'hyperstatisme de ce graphe permet de dénombrer et de localiser les conditions géométriques (angulaires et dimensionnelles) permettant d'assurer les contacts au niveau des surfaces de liaison. La traduction

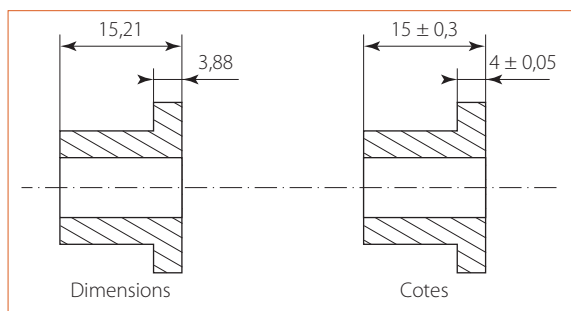
de ces conditions en langage normalisé Iso conduit à l'écriture des spécifications telle que représentée sur l'exemple élémentaire précédent.

Dans la réalité, les surfaces ne respectant pas parfaitement ces conditions, il faut spécifier une amplitude de défaut tolérable. À ce niveau, il convient de faire quelques rappels sur les « défauts » et la notion de qualité avant d'aller plus loin dans la démarche de spécification.

Quelques rappels sur les surfaces réelles et la notion de « qualité »

Une surface réelle est définie par l'ensemble des points qui la constituent. Par rapport à la surface mathématique (plan, cylindre...), où la position de chaque point est déterminée par une équation caractéristique, la surface réelle présente un aspect très irrégulier. L'écart entre le modèle et la surface réelle peut être appelé « défaut ». Les défauts sont traditionnellement classés en rubriques.

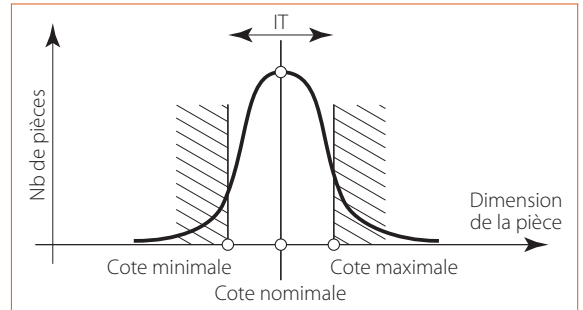
Au premier niveau intervient l'intervalle de tolérance. Précisons le vocabulaire d'usage. Une pièce fabriquée peut être mesurée de façon précise, à l'aide d'un calibre à coulisse, d'un micromètre ou d'un autre instrument de mesure. On a alors accès à la dimension de la pièce. Sur un dessin technique, les pièces sont modélisées. On y indique les dimensions admissibles pour le bon fonctionnement à l'aide de cotes. Une cote est constituée d'une cote nominale et d'un intervalle de tolérance (IT) autour de cette cote nominale 15.



15 Les dimensions d'un palier ou cotes d'un palier

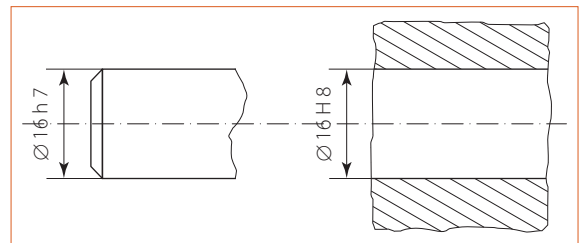
Le problème de la cotation est lié au problème de la fabrication des pièces mécaniques. La dispersion des dimensions d'une pièce exécutée en série suit une distribution proche d'une gaussienne 16. Cette dispersion varie suivant le procédé utilisé. Les pièces se trouvant hors de l'intervalle de tolérance iront au rebut. La réduction de l'IT a pour conséquence d'augmenter considérablement le coût d'une pièce.

L'amplitude de l'IT n'est pas suffisante pour caractériser la classe de qualité d'un produit, et une précision du centième de millimètre sera plus compliquée à obtenir sur un cylindre de 100 mm de diamètre que sur un cylindre de 10 mm. Il existe un système de cotation normalisé Iso qui permet de gérer ce type de correspondance.



16 La distribution des dimensions associées à une cote sur un lot des pièces usinées

Le principe retenu pour le système Iso est simple. On affecte à la cote une dimension nominale de préférence « ronde », puis on définit l'intervalle de tolérance (qui n'est pas forcément centré autour de cette cote nominale) par deux symboles. Une lettre caractérise la position de l'IT par rapport à la cote nominale, et un chiffre l'amplitude de l'IT. En ce qui concerne les lettres, les minuscules seront réservées aux pièces contenues (par exemple les arbres), les majuscules servant aux pièces contenant (par exemple les alésages) 17.

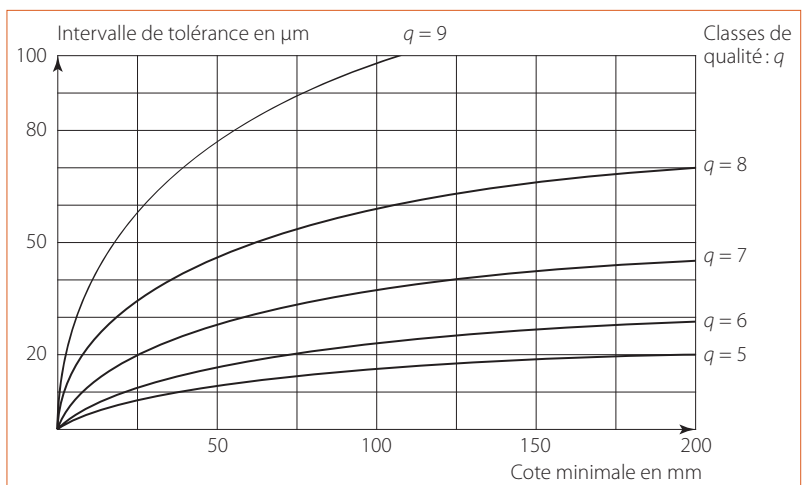


17 La cotation Iso

La classe de qualité d'une tolérance (symbolisée par un chiffre) caractérise la valeur de l'IT. Cet intervalle varie de façon discrète en fonction de la cote nominale φ2. La relation liant la valeur moyenne de l'IT en fonction de la cote nominale est du type :

$$IT = k^3 \sqrt{\phi} \quad 18$$

k: facteur de qualité (µm/mm^{1/3})



18 Le lissage des IT en fonction de la cote nominale pour différentes classes de qualité

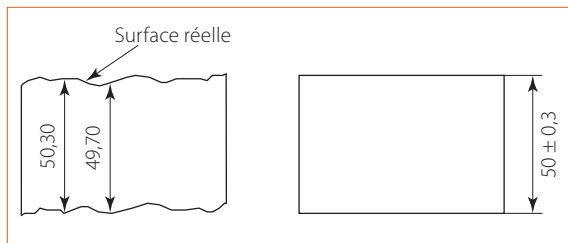
19 La correspondance entre l'indice de classe q et le facteur de qualité k

q	4	5	6	7	8	9	10	11	12
k	2	3,3	4,6	7,5	11,5	18,5	30,5	47	74

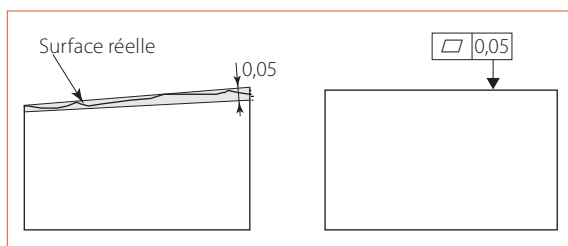
Le tableau 19 donne la corrélation entre les valeurs de k et l'indice de la classe de qualité q . La valeur de l'IT est de plus en plus grande pour des indices de classe de plus en plus grands :

- Indices 4 et 5 : qualité d'usinage exceptionnelle
- Indices 6, 7 et 8 : usinages précis
- Indices 10, 11 et 12 : précision moyenne

Certaines conditions géométriques ne peuvent pas être spécifiées sous forme d'intervalle de tolérance. Par exemple, la hauteur d'un bloc parallélépipédique peut être cotée $50 \pm 0,3$ et sera considérée comme satisfaisante tant que la dimension mesurée en tous points de la paire de surfaces cotées ne dépasse pas $50,3$ mm et n'est pas inférieure à $49,7$. Cela ne préjuge absolument pas de la forme globale de la surface réelle 20. Si cette pièce intervient dans la réalisation d'une liaison glissière, par exemple, la répartition des pressions de contact présentera des variations importantes d'un point à un autre. La dégradation se fera rapidement. Il est alors nécessaire de préciser une **tolérance de planéité** dont l'amplitude limitera les défauts de la surface 21.

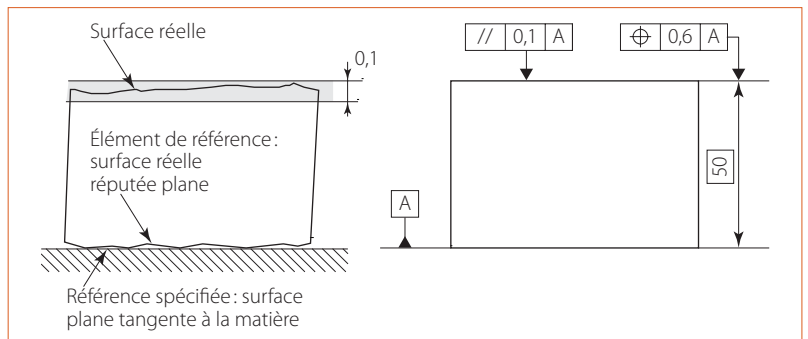


20 Un exemple de cotation dimensionnelle



21 La spécification de planéité

Cette fois, la surface réelle devra se situer entre deux plans distants de $0,05$ mm tout en se trouvant dans un intervalle de $0,6$ mm. Dans le cas le plus défavorable, notre surface se trouve totalement en travers de la zone de tolérance $0,6$ 21. Si cette surface intervient dans une glissière bilatérale, il faut imposer une condition de parallélisme supplémentaire par rapport à une surface référence. Cette tolérance doit être plus faible que les



22 La spécificité de parallélisme

$0,6$ de l'IT mais plus lâche que les $0,05$ de la planéité. On indique donc une **tolérance de parallélisme**, de $0,1$ par exemple 22.

Les différentes **tolérances de forme et de position** sont définies dans la norme NF E 04-552 et sont récapitulées dans tous les ouvrages de construction mécanique 4 4.

Dans la dernière partie, nous allons faire le point sur l'influence de ces défauts sur le fonctionnement des liaisons élémentaires. Cette analyse nous permettra de mettre en place une démarche pour chiffrer l'amplitude des spécifications pour un fonctionnement donné et une qualité souhaitée.

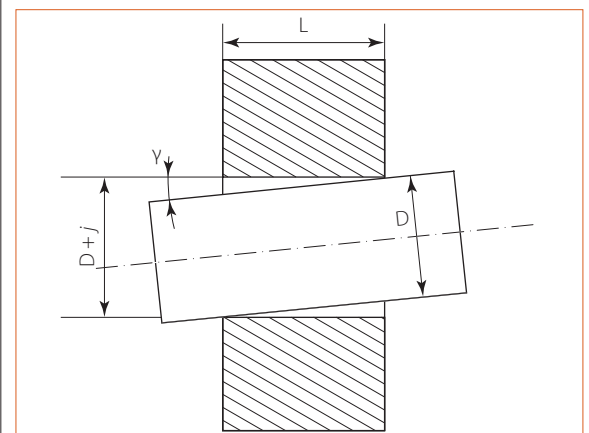
L'influence des défauts de dimension : le guidage cylindrique glissant

Soit l'assemblage 23 où les pièces sont supposées indéformables.

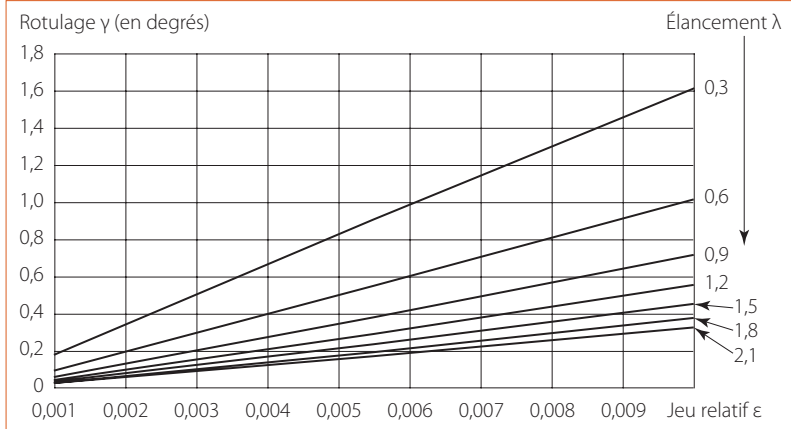
Pour autoriser le mouvement de rotation, les deux diamètres (arbre et alésage) ne sont pas égaux. Si on prend en compte le jeu j qui existe entre les deux cylindres, on introduit une possibilité de translation radiale d'amplitude directement égale à j , ainsi qu'une rotation γ (rotulage) qui dépend de j et L .

Le jeu est faible, et par conséquent l'angle de rotulage γ reste petit. On peut montrer qu'il vaut pratiquement :

$$\gamma = j/L$$



23 Le guidage cylindrique glissant



24 L'angle de rotulage en fonction du jeu pour différents élargissements

Pour analyser de façon plus générale les conséquences de cette relation, nous introduisons les grandeurs sans dimensions suivantes :

- Élargissement de la liaison : $\lambda = L/D$
- Jeu relatif de l'assemblage : $\epsilon = j/D$

Par analogie avec la relation entre IT et la cote nominale, on peut considérer que ϵ donne une indication sur la qualité de l'ajustement. Ce qui donne cette nouvelle expression de l'angle de rotulage dans laquelle on constate que le rotulage dépend de la qualité (coût) et de l'élargissement :

$$\gamma = \epsilon / \lambda$$

On peut remarquer que, pour des élargissements inférieurs à 1, les droites sont très éloignées les unes des autres et le rotulage γ peut atteindre de grandes valeurs **24**. Le rotulage est donc assez fort et ne pourra être évité qu'en choisissant une valeur faible pour ϵ .

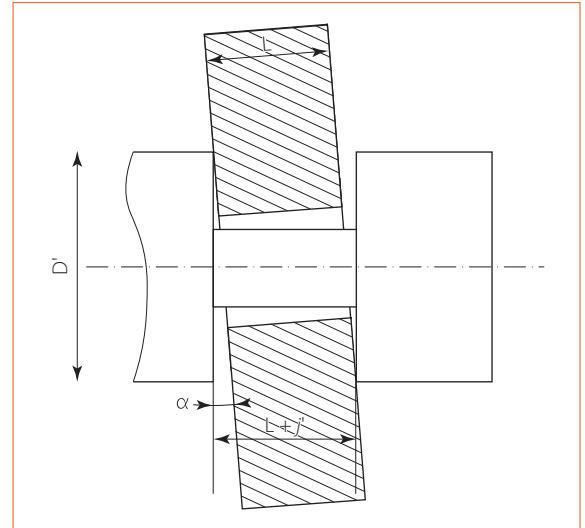
À l'inverse, le graphe montre que pour un élargissement supérieur à 1,5 les droites sont très proches les unes des autres ($\lambda = 1,5$ ou $1,8$ ou $2,1$). L'influence de l'élargissement diminue donc, et une valeur classique de ϵ ($\Pi 1/1\ 000$) réduit considérablement l'amplitude du rotulage.

Ce sont ces remarques qui sont à l'origine des « règles » empiriques bien connues :

- Dans le cas d'un guidage long ($\lambda > 1,5$), on pourra modéliser sans problème un assemblage cylindrique par une liaison **pivot glissant**.
- Dans le cas où l'élargissement est faible ($\lambda < 0,5$), le rotulage ne pourra être évité qu'au prix d'une réalisation très précise ; on modélise donc cet assemblage par une liaison **linéaire annulaire**.

Introduisons maintenant les arrêts axiaux. Le graphe **25** illustre simplement la géométrie de l'assemblage, qui ne peut pas, bien sûr, être effectué si l'arbre est réalisé en une seule pièce : un des deux arrêts axiaux est évidemment rapporté.

Si on considère l'épaulement de diamètre $D' > D$ qui permet l'arrêt en translation, on voit que l'angle de rotulage α sera fonction de la tolérance j' . La relation est du même type que celle obtenue dans l'analyse



25 Le guidage cylindrique

précédente. D' joue le rôle du L précédent et L joue le rôle du D précédent.

On pose :

$$\epsilon = j'/L \quad \text{et} \quad \nu = D'/L$$

Dans ces conditions, la valeur du rotulage est donnée par le même graphe **25**. Les mêmes conclusions s'appliquent alors :

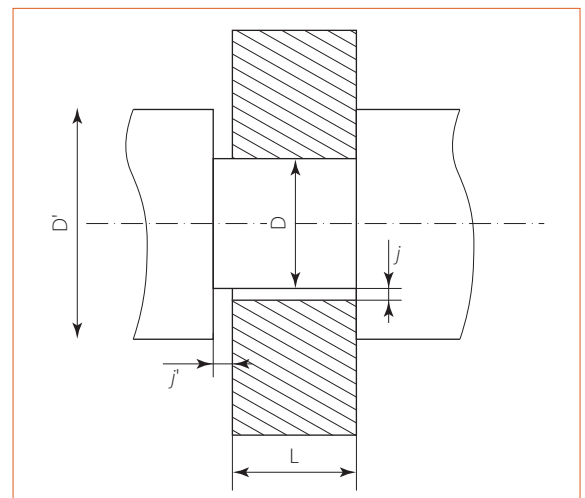
- Quand $\nu < 1$, le rotulage peut être important et la liaison peut être assimilée à une liaison **rotule**.
- Quand $\nu > 1,5$, le rotulage est très faible et la liaison peut être assimilée à une liaison **pivot**.

Par homogénéité de fabrication, une qualité ϵ similaire est requise pour toutes les cotes intervenant dans une liaison **26** :

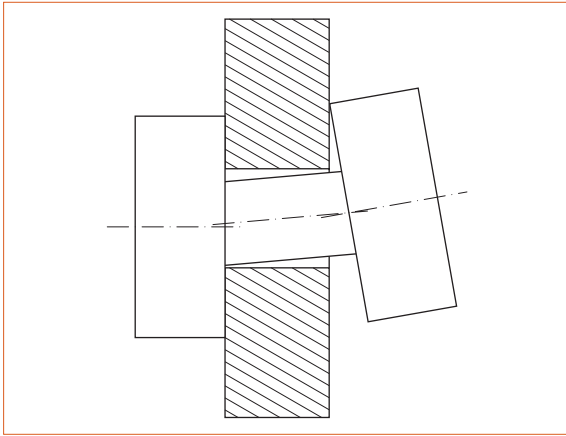
$$\epsilon = j'/L = j/D = \text{cte.}$$

Dans l'assemblage des appuis plans et du guidage cylindrique, on peut raisonner sur la position relative des droites $\lambda = \text{cte}$ et $\nu = \text{cte}$ sur la même verticale ϵ . Le rotulage est limité par l'appui plan dès que :

$$\lambda < \nu \quad \text{ou} \quad L^2 \ll D \cdot D' \quad \text{avec} \quad \nu > 1,5$$



26 La liaison pivot avec jeux



27 Les défauts amplifiés

On appelle cette liaison une liaison pivot à **appui plan prépondérant**. À l'inverse, le rotulage est limité par le guidage cylindrique dès que :

$$\lambda > \nu \text{ ou } L^2 \gg D \cdot D' \text{ avec } \lambda > 1,5$$

Dans ce cas, on parle de pivot à **centrage long prépondérant**.

Dans les deux cas, si on veut que le guidage assure sa fonction, il est nécessaire que les conditions géométriques de perpendicularité, de parallélisme et dimensionnelles mises en évidence par l'étude de l'hyperstatisme autorisent le mouvement de rotation principal, c'est-à-dire que l'amplitude des défauts soit plus faible que le débattement autorisé par les jeux pour éviter les phénomènes de coincement **27**.

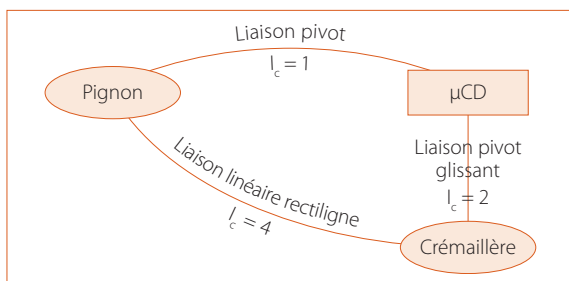
Nous reviendrons plus en détail sur la résolution de cette condition dans un prochain numéro. Pour conclure cette première partie, revenons sur l'exemple plus industriel du microcarter de direction (μ CD).

L'application au composant μ CD

Les fonctions principales du μ CD mises en évidence par l'analyse fonctionnelle sont :

- FP1: Positionner le pignon par rapport à la crémaillère.
- FP2: Transformer le mouvement de rotation du pignon en translation de la crémaillère.

Le graphe de liaisons **28** permet de visualiser les liaisons et les surfaces de contact entre les éléments intervenant dans ces fonctions. On considère l'ensemble μ CD défini comme le microcarter de direction, le carter cylindrique, les roulements, le lubrifiant et les soufflets. Une première analyse globale du degré d'hyperstatisme permet de déterminer les conditions



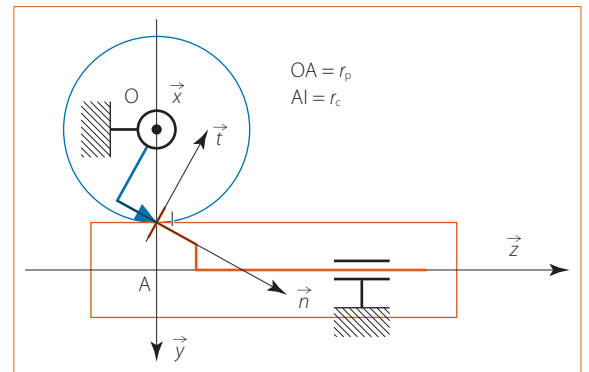
28 Le graphe des liaisons global du domaine d'étude retenu

géométriques globales, l'engrènement étant assimilé à une liaison linéaire rectiligne.

$$r_c = I_c - m = 2 \exists 4 + 2 + 1 - 1 = 10$$

$$h = 6 \nu - r_c = 2 \exists 6 - 10 = 2$$

En considérant le système global, le modèle s'avère isostatique : il n'y a pas de condition géométrique globale. Cela peut paraître surprenant dans le cas d'une transmission pignon-crémaillère où l'on s'attend à une perpendicularité entre l'axe de rotation du pignon et la direction de la crémaillère, mais une étude plus complète de la cinématique confirme ce résultat. Les « petits » mouvements autorisés par la liaison linéaire rectiligne compensent les défauts de mise en position de la liaison pivot par rapport à la liaison pivot glissant.



29 Le schéma de la transmission de mouvement du μ CD

Les torseurs cinématiques de chacune des liaisons peuvent être exprimés en I **29** :

$$\{V_{p/0}\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega} = \omega_{p/0} \vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega} = \omega_{p/0} \vec{x} \\ \vec{V} = r_p \omega_{p/0} \vec{z} \end{Bmatrix}$$

$$\{V_{c/p}\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega} = p \vec{x} + q \vec{n} \\ \vec{V} = u \vec{x} + w \vec{t} \end{Bmatrix}$$

$$\{V_{c/0}\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega} = \omega_{c/0} \vec{z} \\ \vec{V} = u_{c/0} \vec{z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega} = \omega_{c/0} \vec{z} \\ \vec{V} = u_{c/0} \vec{z} + r_c \omega_{c/0} \vec{x} \end{Bmatrix}$$

La fermeture de la boucle cinématique donne les relations suivantes en projection dans la base $(\vec{x}, \vec{n}, \vec{t})$:

$$\omega_{p/0} + p = 0 \quad (1) \quad (4) \quad u = r_c \omega_{c/0}$$

$$\omega_{c/0} \cos \alpha \quad q \quad (2) \quad (5) \quad r_p \omega_{p/0} \cos \alpha = u_{c/0} \cos \alpha$$

$$\omega_{c/0} \sin \alpha = 0 \quad (3) \quad (6) \quad r_p \omega_{p/0} \sin \alpha - w = u_{c/0} \sin \alpha$$

α : angle de pression du pignon

Après résolution, on trouve que :

$$p = -\omega_{p/0} \quad 0 \quad u = 0$$

$$q = 0 \quad u_{c/0} = r_p \omega_{p/0}$$

$$\omega_{c/0} = 0 \quad w = 0$$

Ce système d'équations est effectivement de rang 6 : il n'y a donc pas d'hyperstatisme et pas de condition géométrique globale si l'on considère l'engrènement comme un seul appui rectiligne. En réalité, les dents

du pignon et de la crémaillère peuvent être en contact sur leurs deux flancs ; il y a donc deux liaisons linéaires rectilignes, et le graphe des liaisons présentes deux boucles. La détermination de h est donc modifiée :

$$r_c = I_c - m = 2 \exists 4 + 2 + 1 - 1 = 10$$

$$h = 6v - r_c = 2 \exists 6 - 10 = 2$$

Si on développe les équations de la seconde boucle dans la base $(\vec{x}, \vec{n}, \vec{t})$, qui est symétrique au repère $(\vec{x}, \vec{n}, \vec{t})$, on obtient deux relations identiques aux relations (3) et (5) : le rang du système vaut donc 10, et les équations concernées permettent de conclure sur la nature des conditions géométriques.

La condition associée à l'équation (5) est dimensionnelle suivant la direction : elle exprime que pour assurer le contact sur les deux flancs, il doit y avoir compatibilité entre l'épaisseur et le creux des dents qui engrènent au niveau du primitif. Dans le domaine des engrenages, cette condition est connue sous le nom de condition de fonctionnement sans jeu. Elle induit la cotation de l'entraxe sur le carter du μ CD.

La condition associée à l'équation (3) est angulaire autour de l'axe \vec{t} : elle impose que la ligne de contact du second flanc soit parallèle au plan tangent au contact du premier flanc. Cette condition ne concerne que le pignon et la crémaillère ; le μ CD n'est pas impliqué.

On s'intéresse ensuite à chaque fonction de contrainte, par exemple au guidage en rotation.

FC1: Assurer le guidage de rotation

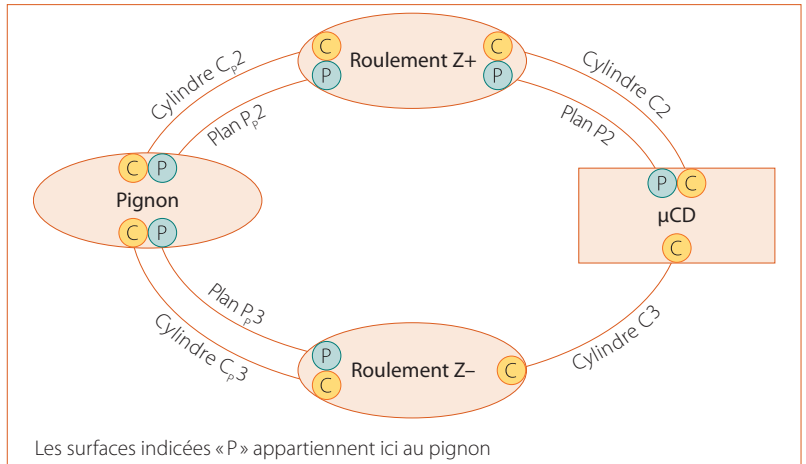
Pour réaliser le guidage en rotation du pignon, la solution retenue a été de mettre en place des roulements à billes. Par conséquent, les surfaces en contact entre le μ CD et chacun des deux roulements sont un cylindre et un plan (pour l'arrêt en translation) 30.

Pour déterminer l'ensemble des spécifications, il faut traiter l'ensemble des boucles. La boucle « pignon - roulement Z+ » met en relation un contact de type cylindrique et un contact plan ; la spécification géométrique qui découle de ces contacts est une perpendicularité. Cette spécification était intuitive, puisqu'il est normal que le plan permettant d'arrêter le roulement en translation soit perpendiculaire à l'axe du cylindre.

Par ce même raisonnement, nous pouvons déterminer les relations entre les plans et les cylindres des boucles « μ CD - roulement Z+ » et « pignon - roulement Z- ». Il s'agit également d'une perpendicularité pour les mêmes raisons que précédemment.

Bibliographie

- ◆ BRISSARD (J.-L.), DARDY (F.), POLIZZI (M.), TEIXIDO (C.), *Guide de la compétitivité industrielle, tome I, « Démarche de conception »*, Delagrave, 2003
- ◆ CHEVALIER (A.), *Guide du dessinateur industriel*, Hachette Technique, 2003
- ◆ DEJANS (M.), LEHU (H.), QUATREMER (R.), TROTIGNON (J.-P.), *Précis de construction mécanique*, Afnor/Nathan, 2006



30 Le graphe de liaisons impliquant les surfaces qui réalisent la FC1

Les surfaces prépondérantes dans ce cas précis sont les cylindres, c'est pourquoi nous cherchons à étudier uniquement les relations entre les différents cylindres. La spécification répondant le mieux à un système cylindre-cylindre est la coaxialité.

Pour résumé, nous obtenons pour ce premier schéma les spécifications suivantes :

- ⊥ Cp2/Pp2 ⊙ Cp2/Cp3 ⊙ Cp3/C3
- ⊥ C2/P2 ⊙ Cp2/C2 ⊙ C2/C3

FC2: Assurer le guidage en translation

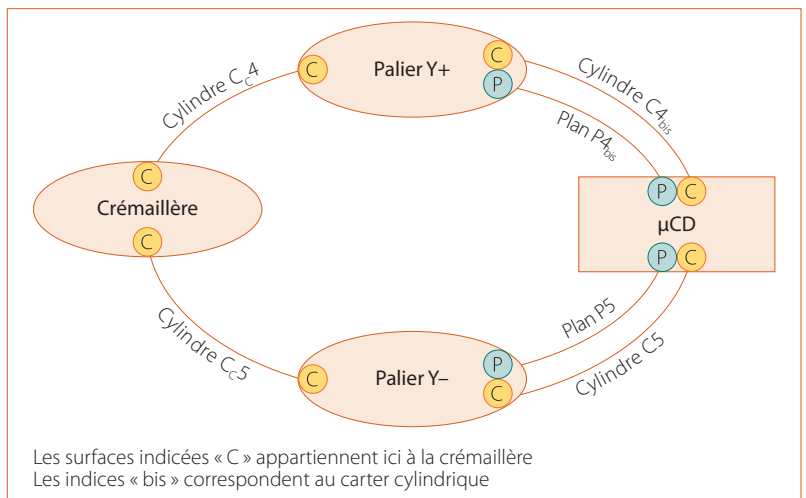
La solution retenue pour assurer le mouvement de translation a été de mettre en place des paliers de part et d'autre de la crémaillère. Les surfaces en contact entre la crémaillère et le μ CD via les deux paliers mis en place sont décrites dans le schéma 31.

Comme dans bien des cas que nous allons traiter, nous sommes en présence de boucles mettant en relation un plan et un cylindre. La spécification retenue est :

- ⊥ C4bis/P4bis ⊥ C5/P5

Les surfaces cylindriques étant supérieures à celles des plans, nous nous intéressons aux relations entre les différents cylindres. Les spécifications sont alors :

- ⊥ C4bis/C5 ⊙ Cc4/C4bis ⊙ Cc4/Cc5 ⊥ Cc5/C5



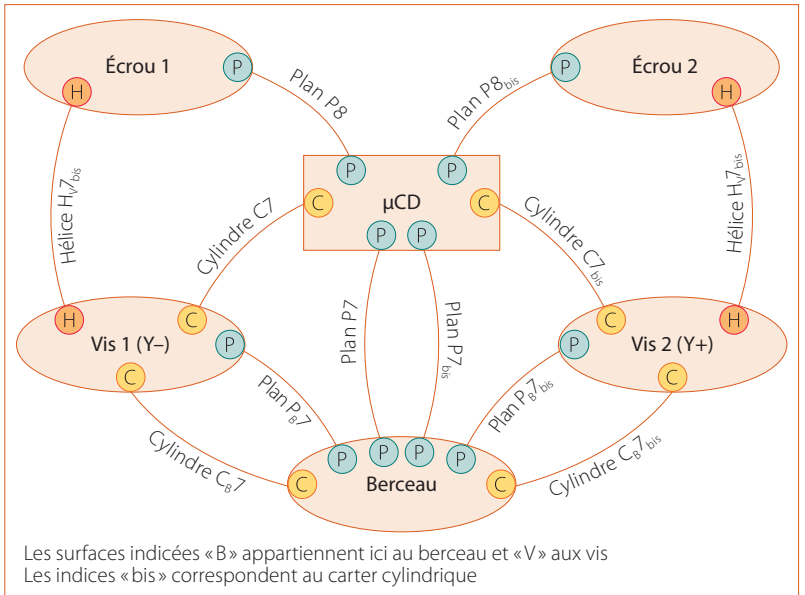
31 Le graphe des liaisons limité aux surfaces impliquées dans la FC2

FC5: Être fixé sur le berceau

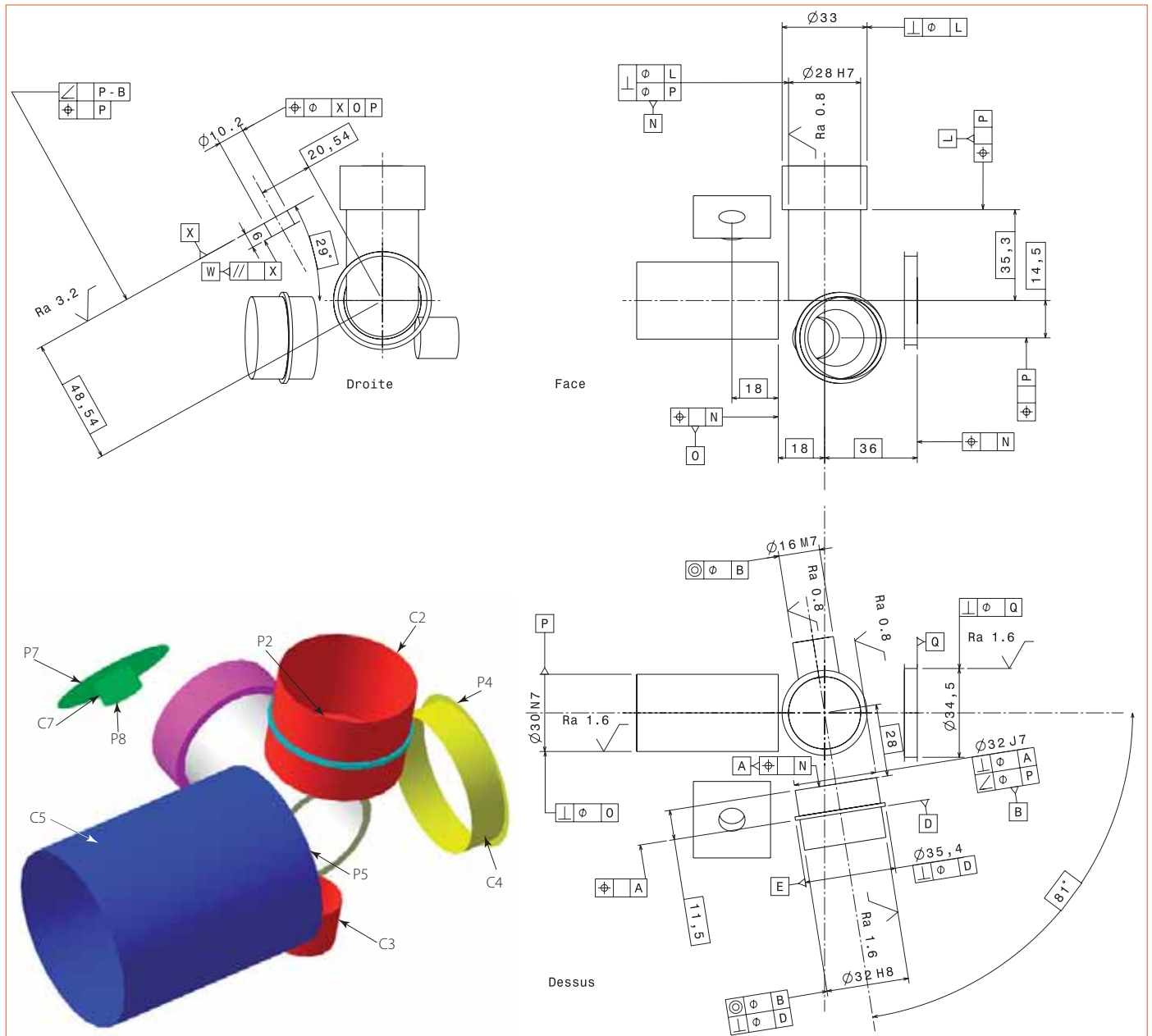
Cette fonction fait intervenir de nombreux éléments (deux systèmes vis-écrou, le berceau et bien entendu le μ CD), ce qui a pour conséquence de rendre le schéma complexe **E2**.

Ces éléments étant tous en relation les uns avec les autres, ils forment un nombre important de boucles. Afin de faciliter l'étude, nous allons toutes les décomposer et les traiter indépendamment les unes des autres.

Par la suite, nous ne présenterons que la construction de cinq spécifications suivant la norme Iso. Dans un souci de simplification, certains types de spécifications étant redondants, nous avons choisi d'étudier en détail une spécification de chaque. Les spécifications détaillées sont repérées en rouge sur la mise en plan 2D **E3**.



E2 Le graphe des liaisons limité aux surfaces impliquées dans FC5



E3 La mise en plan coté du μ CD

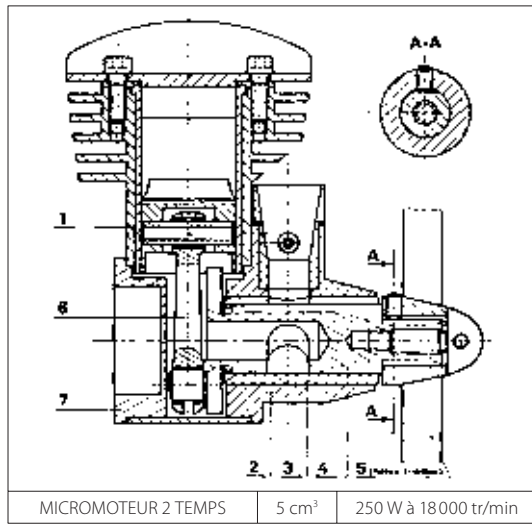
ANNEXE

Schématisme, mobilité, hyperstatisme

Les forces appliquées, les vitesses et propriétés géométriques souhaitées pour le bon fonctionnement du mécanisme conditionnent la taille des pièces (problèmes de résistance, d'inertie, etc.). Le passage de la réalité aux outils mathématiques permettant ces calculs est la modélisation. Dans ce qui va suivre, nous retenons une modélisation par solides indéformables. Dès lors, on peut se limiter, pour chaque ensemble S_i de solides en liaison complète, à une représentation filaire. Si l'on respecte les positions et propriétés géométriques des points et droites qui caractérisent les liaisons entre les ensembles S_i , et si l'on représente chaque liaison par sa schématisation normalisée, le dessin obtenu est un schéma cinématique. Nous allons illustrer les différentes définitions sur l'exemple classique d'un système bielle-manivelle.

Le schéma cinématique : quelques éléments de tracé

Le schéma cinématique doit faire apparaître clairement toutes les liaisons internes du mécanisme et les liaisons entre le mécanisme et l'extérieur (bâti, carter...). Le schéma cinématique doit refléter les particularités géométriques comme la concourance, le parallélisme, la perpendicularité ou la coaxialité des axes de ces liaisons. Ce schéma sans échelle respecte la schématisation normalisée des liaisons. Dans certains cas, il pourra être nécessaire d'inventer un symbole pour mettre en évidence certains composants dont la représentation n'est pas normalisée (ressort, courroie, came...). Lorsque toutes les liaisons ont leur axe dans le même plan, une seule vue géométrale suffit, mais dans le cas de mécanismes plus complexes il sera nécessaire de faire un schéma cinématique perspectif.



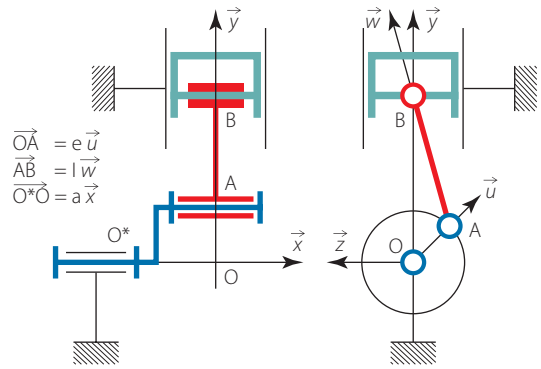
a Le microbloc moteur

Considérons le très classique exemple de transformation de mouvement de rotation en translation rectiligne alternative représenté sur le dessin **a**. Le mécanisme est un microbloc moteur pour aéromodéliste. La cinématique est obtenue par un système bielle-manivelle dont une représentation schématique est donnée en **b**. Notons que la liaison pivot glissant entre le piston et la chemise n'est pas représentée de façon normalisée.

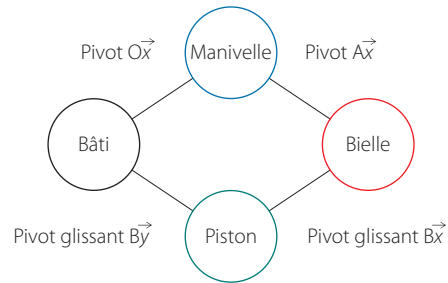
Le graphe des liaisons

Il est possible, de façon à rendre plus claire encore la lecture des chaînes de liaisons, d'effectuer un graphe des liaisons tel qu'il est présenté en **c** pour le micromoteur. Un premier coup d'œil permet de dénombrer le nombre de liaisons K , le nombre de boucles fermées indépendantes u . On détecte aussi les chaînes ouvertes (bras de robot...), les liaisons en série, en parallèle. La théorie des graphes permet de montrer que dans le cas de mécanismes constitués de u chaînes fermées on a l'égalité :

$$u = K - N + 1$$



b Le schéma cinématique



c Le graphe des liaisons

La fermeture cinématique

Le graphe de liaisons permet de mettre en évidence toutes les liaisons intervenant dans le mécanisme (ici une boucle fermée $u = 1$), et on peut donc écrire une fermeture cinématique. Chaque boucle cinématique permet d'écrire 6 relations scalaires. Sachant que les inconnues cinématiques (degrés de liberté des liaisons) sont au nombre de 6, on obtient : 2 pivot glissant (4 inconnues) + 2 pivots (2 inconnues). La fermeture cinématique s'écrit :

$$\begin{aligned} \{V_{1/0}\} &= \begin{Bmatrix} \theta_{10} \vec{x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_O \\ \{V_{2/1}\} &= \begin{Bmatrix} \theta_{21} \vec{x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_A \Rightarrow \{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \theta_{21} \vec{x} \\ e\vec{u} \wedge \theta_{21} \vec{x} \end{Bmatrix}_O \\ \{V_{3/2}\} &= \begin{Bmatrix} \theta_{32} \vec{x} \\ x_{32} \vec{x} \\ x_{32} \vec{x} \end{Bmatrix}_B \Rightarrow \{V_{3/2}\} = \begin{Bmatrix} \theta_{32} \vec{x} \\ x_{32} \vec{x} + (e\vec{u} + l\vec{w}) \wedge \theta_{32} \vec{x} \end{Bmatrix}_O \\ \{V_{3/0}\} &= \begin{Bmatrix} \theta_{30} \vec{y} \\ y_{30} \vec{y} \end{Bmatrix}_O \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_{10} + \theta_{21} + \theta_{32} &= 0 \\ \theta_{30} &= 0 \\ 0 &= 0 \\ x_{32} &= 0 \\ x_{30} &= e(\theta_{21} + \theta_{32}) \sin \theta_{10} + l \theta_{32} \sin \theta_{20} \\ 0 &= e(\theta_{21} + \theta_{32}) \cos \theta_{10} + l \theta_{32} \cos \theta_{20} \end{aligned}$$

En vis-à-vis des 6 inconnues cinématiques il n'y a que 5 équations indépendantes, puisque la projection sur \vec{z} de l'équation en taux de rotation donne $0 = 0$. On dit que le rang r_c du système cinématique est égal à 5.

ANNEXE (SUITE)

Schématisme, mobilité, hyperstatisme

L'indice de mobilité

Pour généraliser les notions précédemment introduites, appelons u le nombre de boucles indépendantes du mécanisme étudié et l_c le nombre d'inconnues cinématiques. Le nombre de relations cinématiques que permettent d'écrire ces boucles est au plus égal à E_c avec :

$$E_c = 6u$$

Lorsque toutes les équations de la cinématique sont indépendantes, on dispose de $6u$ équations ; dans le cas contraire (si certaines équations sont des combinaisons linéaires des autres ou donnent $0=0$), le nombre d'équations de la cinématique est égal au rang du système d'équations noté r_c . Nécessairement, le rang du système est inférieur ou égal à 6 fois le nombre de boucles :

$$r_c \leq E_c = 6u$$

L'indice de mobilité m du mécanisme est défini par la différence entre les inconnues cinématiques et les équations indépendantes :

$$m = l_c - r_c$$

m doit valoir 1 pour qu'il existe une valeur à chaque paramètre pour une valeur du paramètre d'entrée. La relation entre le paramètre d'entrée et le paramètre de sortie du mécanisme est appelée loi entrée-sortie. Le nombre « $m - 1$ » correspond aux mobilités internes. Ces mobilités peuvent être tolérées si elles n'introduisent pas d'effets d'inertie parasites. Dans le cas du système bielle-manivelle tel qu'il est schématisé en 1, on a :

$$m = 6 - 5 = 1$$

Ce mécanisme est conçu de telle sorte qu'il n'y a pas de mobilité interne. La valeur « $m = 1$ » traduit la loi entrée-sortie. Les équations de la dynamique que l'on pourra écrire sur ce mécanisme devront aussi gérer cette mobilité. S'il y a n équations du principe fondamental de la dynamique (PFD), il n'y en aura que $n - m$ pour déterminer les inconnues d'effort de liaison.

La détermination des efforts et les équations de mouvement

On peut déterminer les efforts dans les liaisons du système mécanique en isolant chacun des solides du mécanisme (sauf le bâti de référence) et en écrivant le PFD pour le solide isolé. Le PFD donne 6 équations pour chaque solide isolé, soit $6 \exists (4 - 1) = 18$ équations dans le cas du système bielle-manivelle.

Chaque fois qu'il existe une mobilité dans un mécanisme, une des relations issues du principe fondamental de la dynamique donne une équation différentielle de mouvement. Les conditions initiales permettent alors de connaître l'évolution de cette mobilité (éventuellement en fonction des efforts extérieurs dans le cas des lois entrée-sortie). Par exemple, dans le cas du système bielle-manivelle, si on impose un effort F sur le piston (provenant de l'explosion) et si le couple résistant C_r est connu au niveau de la manivelle (entraînement de l'hélice, résistance de l'air...), alors une des relations servira à déterminer le mouvement du mécanisme. Les autres équations du PFD permettront de calculer les efforts de liaison.

Parmi les n équations de la dynamique, m d'entre elles ne permettent pas de déterminer les efforts inconnus dans les liaisons. Pour un système de N solides dont le bâti :

$$n = 6(N - 1)$$

On en déduit que le nombre d'équations E_s disponibles pour déterminer les efforts vaut :

$$E_s = 6(N - 1) - m$$

Rappelons que dans une liaison parfaite, le nombre d'inconnues d'effort l_e et le nombre d'inconnues cinématiques l_c sont complémentaires à 6. Si le mécanisme possède K liaisons, alors :

$$l_e + l_c = 6K$$

Le degré d'hyperstatisme

Dans le cas du système bielle-manivelle, on peut écrire directement :

$$l_e = 6 \exists 4 \text{ liaisons} - 6 = 18$$

$$l_e - E_s = 18 - 17 = 1$$

Ce qui veut dire que si l'on considère le problème global (cinématique et dynamique), on n'a pas égalité entre le nombre d'équations et le nombre d'inconnues. C'est le cas des systèmes dit hyperstatiques.

Le degré d'hyperstatisme h d'un système correspond au nombre d'efforts de liaison non déterminés par le PFD. Pour déterminer ce degré d'hyperstatisme, on cherche le nombre d'équations E_s disponibles pour déterminer les efforts de liaison. E_s est égal au nombre d'équations obtenues par le PFD moins le nombre de mobilités m du système étudié. Pour un système de N solides (dont le bâti), on a :

$$E_s = 6(N - 1) - m$$

$$h = l_e - E_s$$

Dans le cas du système bielle-manivelle, nous avons 4 liaisons, 4 solides et une mobilité. E_s est donc égal à :

$$E_s = 6 \exists (4 - 1) - 1 = 17$$

$$l_e = 6 \exists 4 - 6 = 18$$

Ce qui donne un degré d'hyperstatisme égal à $18 - 17 = 1$.

Lorsque le degré d'hyperstatisme est différent de 0, la résolution du système passe par la prise en compte de la déformation de la structure ou par la gestion des jeux. C'est cette façon de procéder que nous allons développer dans la perspective de mettre en place les conditions géométriques fonctionnelles.

Le cas particulier des liaisons parfaites : la détermination de h par la cinématique

Dans le cas particulier où toutes les liaisons sont parfaites, le degré d'hyperstatisme peut être directement obtenu par l'étude cinématique, puisque :

$$h = l_e - E_s$$

$$l_e = 6K - l_c \quad \text{et} \quad E_s = 6(N - 1) - m$$

$$\blacktriangle h = 6(K - N + 1) - l_c + m$$

$$= 6(K - N + 1) - r_c$$

$$\blacktriangle h = 6u - r_c$$

Si l'on sait déterminer le rang r_c du système cinématique, on obtient directement la valeur du degré d'hyperstatisme h . Dans le cas du système bielle-manivelle, nous avons vu que le rang du système est égal à 5 ; comme il n'y a qu'une boucle fermée, le degré d'hyperstatisme de ce système vaut donc 1.

Il est intéressant de déterminer le degré d'hyperstatisme, mais aussi de savoir identifier la condition géométrique associée de façon à adapter la cotation. On autorise ainsi, grâce aux jeux, des mobilités interdites par les liaisons parfaites, et on rend le mécanisme isostatique.

Dans la dernière relation ci-dessus, on voit que h provient de la différence entre le rang du système cinématique et $6u$. Or $6u$ est justement le nombre d'équations E_c maximal que le graphe des liaisons permet d'écrire. On peut donc localiser la condition géométrique en étudiant le système d'équations cinématique :

$$\theta_{10} + \theta_{21} + \theta_{32} = 0$$

$$\theta_{30} = 0$$

$$0 = 0$$

$$x_{32} = 0$$

$$y_{30} = e(\theta_{21} + \theta_{32}) \sin \theta_{10} + l\theta_{32} \sin \theta_{32}$$

$$0 = e(\theta_{21} + \theta_{32}) \cos \theta_{10} + l\theta_{32} \sin \theta_{20}$$

Dans notre cas, on voit que l'équation inutile $0 = 0$ est à l'origine de $h = 1$. Il y a donc une contrainte géométrique angulaire autour de l'axe z . Pour lever l'hyperstatisme, il est alors nécessaire d'introduire une rotation autour de l'axe z dans le système, ce qui peut être fait simplement en diminuant la longueur des guidages et en introduisant un peu de jeu radial. ➔