

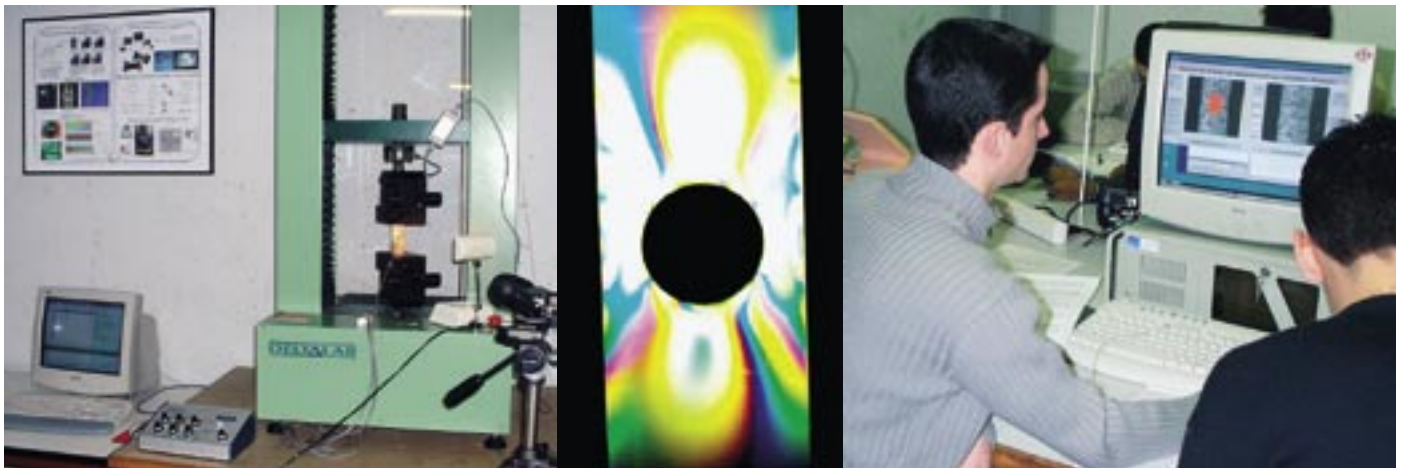
Concentration de contraintes : différentes techniques de mesure (première partie)

LUC CHEVALIER, ANISSA EDDHAHAK, YAMEN MAALEJ¹

La formation en mécanique au sein de l'école Ingénieurs 2000 de l'université de Marne-la-Vallée est ouverte aux étudiants de DUT GMP ou de BTS MP, CPI ou MAI. C'est une formation par alternance, et la séquence académique est résolument tournée vers les applications. En mécanique des solides déformables, qui est une discipline théorique

considérée comme difficile par les étudiants, les travaux dirigés sont bâtis autour d'applications concrètes, de problèmes industriels, et s'attachent autant à illustrer les concepts théoriques qu'à présenter les moyens numériques et expérimentaux associés.

MOTS-CLÉS élasticité, résistance des matériaux, postbac, travaux pratiques



▲ Sites expérimentaux : machine de traction et caméra CCD, polariscope, analyse d'images

Pour illustrer les différentes techniques de mesure de concentration de contraintes, comparer leurs avantages et inconvénients et chiffrer leur précision, on propose lors de travaux pratiques de se focaliser sur le cas de la plaque trouée en traction, qui présente le double avantage de faire apparaître des contraintes et des déformations non homogènes (ce qui rend le problème non trivial) et d'avoir une solution analytique dans le cas où le trou est petit devant la largeur de la plaque.

Ce cas d'école, très classique, trouve néanmoins beaucoup d'applications concrètes pour l'étude des assemblages boulonnés ou rivetés, l'allègement des pièces de structure par ajourage, l'arrêt des fissures, etc. Suivant la même organisation que celle présentée dans l'article « Confrontation RdM-MMC : une démarche expérimentale de validation » du numéro 129 de *Technologie*, les étudiants sont amenés à mettre en œuvre les techniques suivantes et à en faire la synthèse dans un compte rendu :

- Site 1 : analyse de la solution analytique (Matlab est à la disposition des étudiants)
- Site 2 : machine de traction et mesure par rosettes (plaque d'alliage d'aluminium en A-U4G)
- Site 3 : mesure par camera CCD (plaque en élastomère chargé Smactane)
- Site 4 : banc de photoélasticité (plaque polymère translucide et biréfringente, PMMA)

- Site 5 : poste informatique avec logiciel (RDM6 ou Cosmos-Works)

Dans cette première partie, les trois premiers sites sont développés. L'analyse du même problème par photoélasticité et par l'intermédiaire des éléments finis sera exposée par la suite.

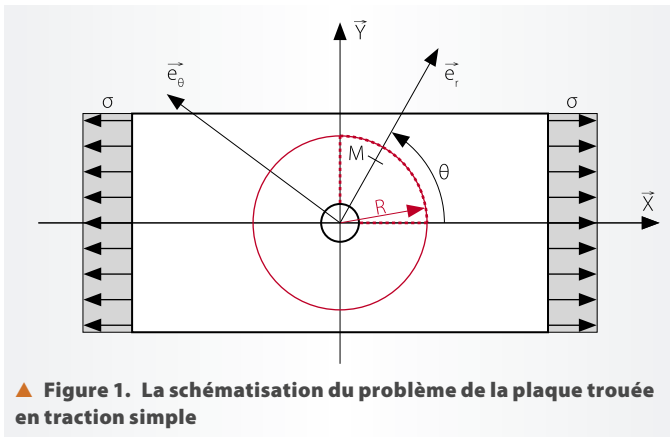
En préalable à toute activité, on relève les géométries des trois plaques étudiées :

- plaque en alliage d'aluminium : $200 \times 40 \times 5$, trou de rayon 5
- plaque en élastomère : $150 \times 30 \times 5$, trou de rayon 3
- plaque en polymère : $300 \times 50 \times 6$, trou de rayon 15

SITE 1 - LA SOLUTION ANALYTIQUE : LA PLAQUE TROUÉE SOLLICITÉE EN TRACTION

Une plaque de largeur $2b$, percée d'un trou circulaire de rayon a (figure 1) est soumise à un état de tension de densité surfacique uniforme σ suivant l'axe X. La plaque est en état de contraintes planes. Le rayon du trou est supposé petit devant les dimensions de la plaque. On peut donc négliger l'influence du trou sur l'état

¹. Respectivement : professeur à l'université de Marne-la-Vallée, responsable de la formation en génie mécanique Ingénieurs 2000 ; doctorante au laboratoire de mécanique de l'université de Marne-la-Vallée, chargée des travaux pratiques de mécanique des solides déformables ; doctorant en mécanique et structures au LMSGC de l'École nationale des ponts et chaussées, chargé des travaux pratiques de mécanique des solides déformables.



des contraintes dès que le point courant M se trouve à une distance $r > R$ où R est une limite grande devant le rayon a du trou. La matrice des contraintes est de la forme :

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & 0 \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{Z})}$$

On superpose à l'état de contrainte de traction loin du trou un champ complémentaire qui assure les conditions limites de bord libre sur le rayon a , et on détermine (par une méthode détaillée dans beaucoup d'ouvrages de mécanique, notamment dans *Mécanique des systèmes et des milieux déformables* de Luc Chevalier aux éditions Ellipses, voir rubrique « Média ») les expressions des trois composantes adimensionnées, c'est-à-dire :

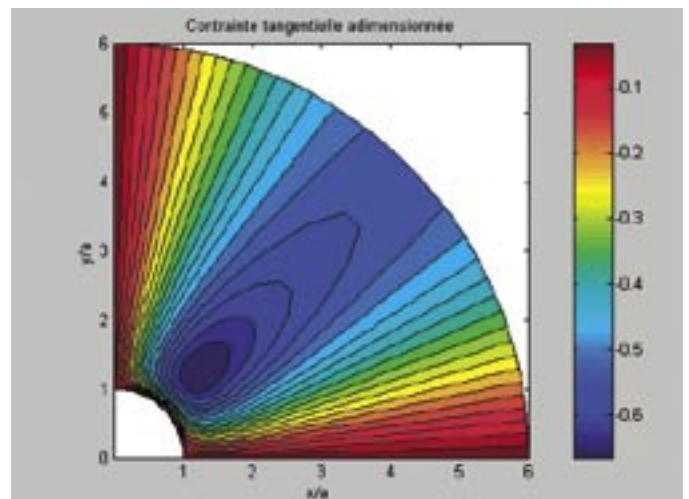
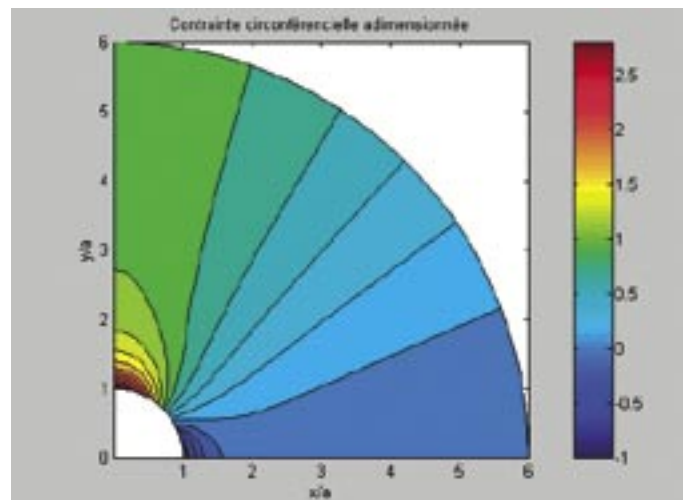
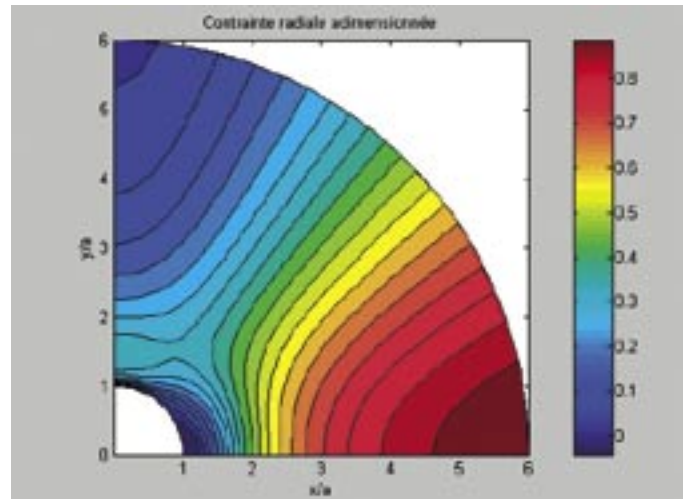
$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{rr}}{\sigma} &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{4}{\rho^2} + \frac{3}{\rho^4} \right) \cos 2\theta + 1 - \frac{1}{\rho^2} \right] \\ \frac{\sigma_{\theta\theta}}{\sigma} &= \frac{1}{2} \left[- \left(1 + \frac{3}{\rho^4} \right) \cos 2\theta + 1 + \frac{1}{\rho^2} \right] \\ \frac{\sigma_{r\theta}}{\sigma} &= - \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{2}{\rho^2} - \frac{3}{\rho^4} \right) \sin 2\theta \right] \end{aligned} \quad \text{avec : } \rho = \frac{r}{a}$$

Compte tenu des symétries, on ne représente les composantes de la matrice des contraintes que dans le quart de la pièce et jusqu'à un rayon R (ici : $R/a = 6$). Sur la figure 2, on observe que les contraintes σ_{rr} et $\sigma_{r\theta}$ sont nulles sur le bord du trou. La contrainte $\sigma_{r\theta}$ est nulle aussi le long des axes de symétrie OX et OY . σ_{rr} tend vers 1 lorsqu'on suit l'axe des X , alors qu'elle tend vers 0 suivant Y . La contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ varie assez fortement le long du bord du trou.

1.1. Commenter l'allure de $\sigma_{\theta\theta}$ le long du bord libre. En déduire comment se déforme le trou circulaire.

$\sigma_{\theta\theta}$ est la contrainte circonférentielle ; le graphique de la figure 2 montre qu'elle varie d'une valeur négative égale à $-\sigma$ jusqu'à une valeur positive de $+3\sigma$. Puisque les contraintes σ_{rr} et $\sigma_{r\theta}$ sont nulles sur le bord du trou, cela correspond à un état de traction ou compression simple suivant la direction e_θ . Lorsque la contrainte est positive, la circonférence soumise à de la traction s'allonge, et lorsque la contrainte est négative elle se contracte. Au final, le cercle initial devient une ellipse allongée dans le sens de la traction σ .

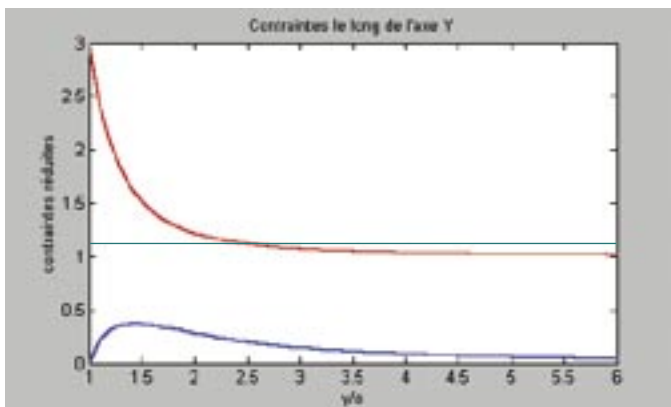
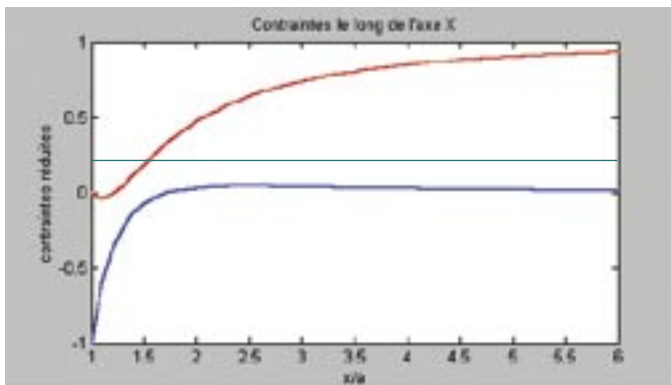
1.2. On définit le coefficient de concentration de contrainte par $K_T = \sigma_{max}/\sigma$, où σ_{max} est la plus grande valeur de $\sigma_{\theta\theta}$ sur le bord du trou. Que vaut le coefficient de concentration de contrainte K_T ?



▲ **Figure 2. Les isocontraintes σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ et $\sigma_{r\theta}$ réduites (c'est-à-dire divisées par σ)**

Compte tenu des résultats précédents, il est clair que $K_T = 3$. La présence d'un trou, aussi petit soit-il, génère une concentration de contrainte de 3. Ce coefficient peut être plus grand si la taille du trou augmente par rapport aux dimensions de la plaque.

1.3. Quel est l'état de contrainte sur chacun des deux axes de symétrie de la plaque ? Tracer l'allure de σ_{xx} le long de l'axe de symétrie Y , ainsi que l'allure de σ_{yy} le long de l'axe X . Sur les axes de symétrie, la contrainte tangentielle $\sigma_{r\theta}$ est nulle. Les deux autres composantes évoluent suivant les graphiques de la figure 3. Il faut noter que, pour les points de l'axe X , l'angle θ



▲ **Figure 3. Les contraintes le long de l'axe des X (en haut) et de l'axe des Y (en bas).** La courbe rouge correspond à la contrainte σ_{xx} : elle tend vers la contrainte de traction loin du trou. La courbe bleue correspond à la contrainte σ_{yy} : elle tend vers 0 loin du trou.

vaut 0, et donc : $\sigma_{rr} = \sigma_{xx}$ et $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{yy}$. Sur l'axe Y, l'angle θ vaut $\pi/2$, et cette fois on a : $\sigma_{rr} = \sigma_{yy}$ et $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{xx}$. On constate que σ_{xx} tend vers σ alors que σ_{yy} tend vers 0 lorsqu'on s'éloigne du trou. Ce qui correspond à un état de traction simple suivant X loin du trou.

1.4. En comparant l'état de contrainte avec celui correspondant à une traction simple, déterminer à partir de quel rayon R l'influence du trou est inférieure à 10 % de l'état de contrainte σ . Quelles doivent être la largeur $2b$ et la longueur $2L$ minimales pour vérifier cette condition ? On commentera les proportions des plaques proposées dans les méthodes expérimentales.

Plutôt que de comparer l'état de contrainte terme à terme pour les six composantes de la matrice, nous comparons la valeur de σ en traction simple avec une norme de la matrice des contraintes : la contrainte équivalente de von Mises. Pour ce problème plan, la contrainte de von Mises est déterminée par l'expression suivante :

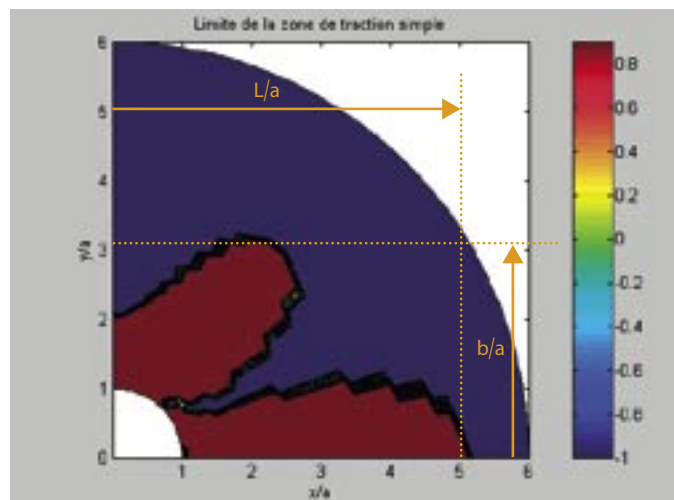
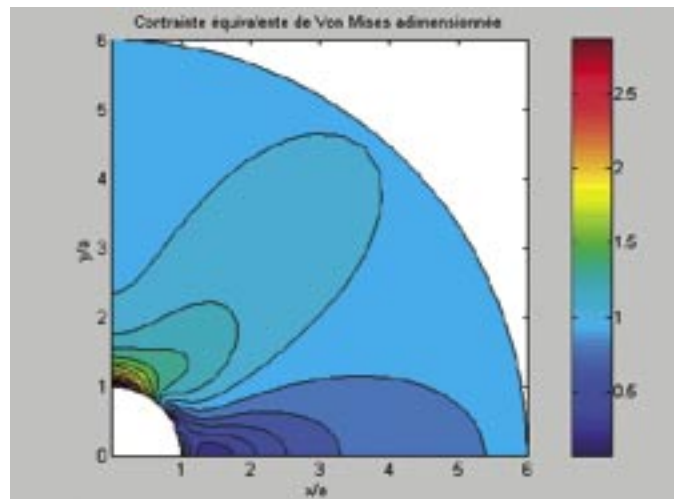
$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_{rr}^2 + \sigma_{\theta\theta}^2 + \sigma_{r\theta}^2 + 3\sigma_{r\theta}^2}$$

Le graphe du haut de la figure 4 donne l'allure de cette contrainte rapportée à la valeur de σ . On constate qu'elle tend vers 1 lorsqu'on s'éloigne du trou. On peut quantifier l'écart relatif entre σ_{VM} et σ par la relation :

$$\text{écart} = \left| \frac{\sigma_{VM} - \sigma}{\sigma} \right|$$

Sur le graphe du bas de la figure 4, on a délimité la zone rouge où l'écart est supérieur à 10 % de la zone de « traction simple » où l'écart est inférieur à cette limite.

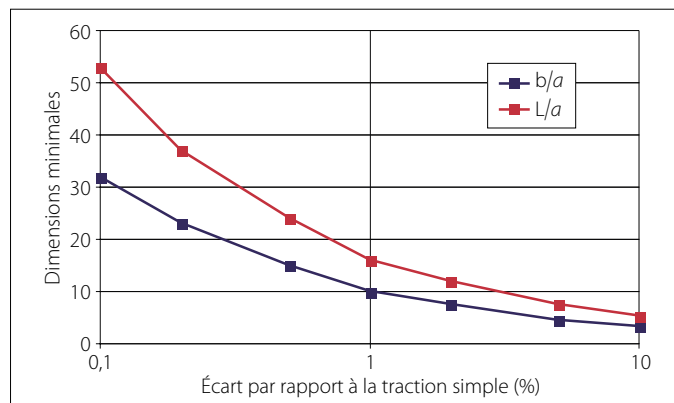
On constate qu'il faut aller jusqu'à $b/a = 3$ pour que l'effet du trou disparaisse dans la direction Y, alors que dans la direction X



▲ **Figure 4. Les isocontraintes de von Mises adimensionnées (en haut), limite entre la zone affectée par la présence du trou et la zone de « traction simple » (en bas)**

la longueur L/a requise est de 5 pour que l'état de contrainte soit une traction simple à 10 % près. Bien sûr, ces dimensions augmentent si on souhaite un écart plus faible. La figure 5 montre qu'il faut aller jusqu'à $L/a = 7$ pour 5 % d'écart et jusqu'à 16 pour 1 %.

Dans le cas de la plaque d'aluminium, le rapport b/a vaut 4. Pour la plaque en élastomère, il vaut 5. Dans les deux cas, nous sommes à la limite de la notion de « petit trou », et il faut s'attendre à des divergences de l'ordre de 5 à 10 % par rapport à la solution



▲ **Figure 5. Les dimensions relatives minimales de la plaque trouée pour que l'influence du trou de rayon a soit négligeable sur les bords**

analytique. Pour la plaque photoélastique, le rapport b/a est de 2,5, et le trou n'est clairement plus petit: la solution analytique ne sera plus une référence.

SITE 2 – LA MESURE PAR JAUGES EXTENSOMÉTRIQUES

L'activité du site 2 se fait sur une plaque percée en alliage d'aluminium (ancienne désignation A-U4G). Cette plaque est étirée sur la machine de traction Deltalab: plusieurs niveaux de charge sont conseillés pour lisser les résultats expérimentaux et valider le comportement linéaire élastique dans le domaine de sollicitation.

2.1. Le module de Young, le coefficient de Poisson et la limite élastique de l'alliage d'aluminium sont estimés respectivement à $E = 76\,000$ MPa, $\nu = 0,35$ et $\sigma_e = 100$ MPa. Déterminer la charge maximale à ne pas dépasser pour éviter la plastification de la plaque. Quel est l'ordre de grandeur de la déformation longitudinale correspondante ?

La plaque d'aluminium possède des dimensions transversales de $40 \times 5 = 200$ mm². Pour que la contrainte ne dépasse pas 100 MPa au voisinage du trou, il faut que la contrainte loin du trou ne dépasse pas $100/3 = 33$ MPa. La force maximale à appliquer doit donc être inférieure à :

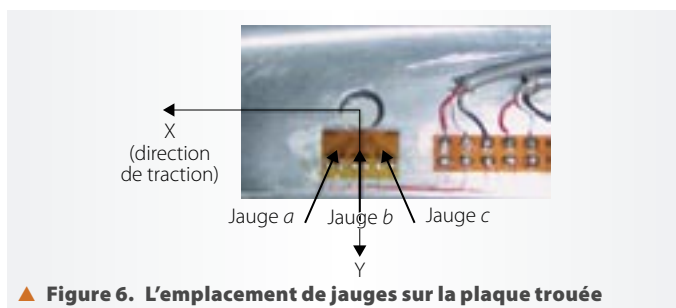
$$F_{\max} = 33 \times 200 = 6\,600 \text{ N.}$$

Dans la suite, on limite l'effort appliqué à 5 000 N (soit $\sigma = 75$ MPa au bord du trou). Compte tenu du module de Young, la déformation au bord du trou sera de :

$$\epsilon = 75/76\,000 = 960 \text{ } \mu\text{m/m.}$$

2.2. Effectuer le montage en demi-pont des trois jauges de la rosette à 45° collée au voisinage du trou. On relèvera les positions et orientations de ces jauges en perspective de la comparaison avec les autres techniques de mesure ou de calcul.

Les montages en demi-pont sont réalisés en associant à la rosette une seconde rosette de compensation thermique pour éviter l'influence d'éventuelles variations de température durant l'essai. La photo de la figure 6 indique la position et la direction des trois jauges a , b et c . La jauge intermédiaire b , orientée à 0° par rapport à l'axe Y , n'est pas collée exactement sur le bord du trou. C'est aussi le cas pour les deux autres jauges, orientées à 45° de part et d'autre de la jauge b . Les coordonnées des points délimitant la zone de mesure pour chacune des trois jauges sont fournies dans le tableau 1.



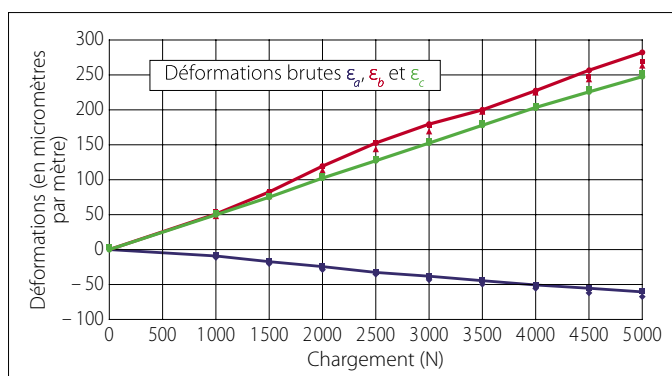
▲ Figure 6. L'emplacement de jauges sur la plaque trouée

Tableau 1. La position des jauges

Jauge	X (mm)		Y (mm)	
	x-début	x-fin	y-début	y-fin
Jauge a	1,41	4,7	7	9,4
Jauge b	0	0	6,5	10,3
Jauge c	-1,41	-4,7	7	9,4

2.3. Programmer un chargement entre l'effort nul et l'effort maximal estimé au 2.1. Relever les déformations des trois jauges et en déduire la matrice des déformations dans la base X, Y, Z . On précisera notamment la méthode de calcul permettant d'accéder à ϵ_{zz} .

Un chargement en neuf étapes est effectué, partant de 1 000 N à 5 000 N par pas de 500 N. Le programme d'essai est répété trois fois pour pouvoir évaluer les dispersions expérimentales. Nous relevons pour chaque valeur de charge les déformations correspondantes des jauges a , b et c . Les relevés bruts des jauges a , b et c sont fournis sur la figure 7. La dispersion (qui est maximale pour les relevés de la jauge b) est inférieure à 4,8 %.



▲ Figure 7. Les résultats expérimentaux bruts

La déformation de la jauge intermédiaire b est toujours négative: la plaque se contracte dans la direction transversale à celle de la traction. Les déformations des jauges a et c sont positives et correspondent à des allongements. Elles sont pratiquement égales, ce qui est dû à la symétrie du problème par rapport à l'axe OY – symétrie géométrique mais aussi de chargement induisant le même état de déformation de part et d'autre de l'axe. Ces déformations sont quasi linéaires (à quelques dispersions expérimentales près), et les droites sont reproduites au cours des trois chargements successifs, ce qui montre que la plaque demeure toujours dans son domaine élastique et rend légitime l'emploi des lois de Hooke.

Ces résultats permettent de calculer les composantes de la matrice des déformations dans la base (X, Y, Z) . Les déformations de la jauge b donnent directement ϵ_{yy} . Celles des jauges a et c nous permettent, moyennant un petit calcul, de déterminer les autres composantes. En effet :

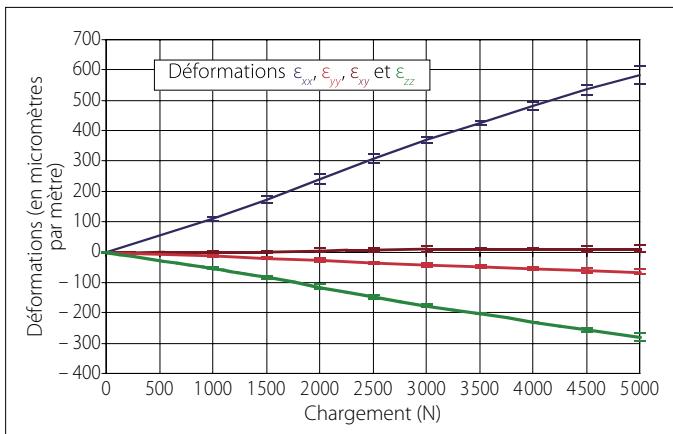
$$\left\{ \begin{aligned} \epsilon_a &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + 2\epsilon_{xy}) \\ \epsilon_c &= \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} - 2\epsilon_{xy}) \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \epsilon_a + \epsilon_c - \epsilon_b \\ \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2}(\epsilon_a - \epsilon_c) \end{aligned} \right.$$

L'hypothèse de contrainte plane permet d'obtenir ϵ_{zz} à partir des lois de Hooke :

$$\epsilon_{zz} = -\frac{\nu}{1-\nu}(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy})$$

La figure 8 présente la moyenne et la plage de dispersion associées à chaque composante. Nous constatons d'après ce



▲ Figure 8. Les résultats extensométriques au cours des 3 essais

graphique que la déformation ϵ_{xx} correspond bien à un allongement. La déformation ϵ_{xy} indique que la distorsion angulaire entre X et Y est quasi nulle. Cela implique que (X, Y) est base principale pour le point mesuré : la composante hors diagonale est nulle. La déformation ϵ_{zz} est déterminée grâce au coefficient de Poisson et correspond à une diminution d'épaisseur suivant Z.

2.4. Comparer les déformations mesurées à celles calculées à l'aide de la solution analytique. Commenter les dispersions éventuelles.

Les mesures extensométriques (ou par analyse d'images pour le site 3) sont à comparer avec les calculs analytiques des défor-

mations et non des contraintes que nous donnent les expressions analytiques. Les lois de Hooke conduisent aux quatre relations suivantes :

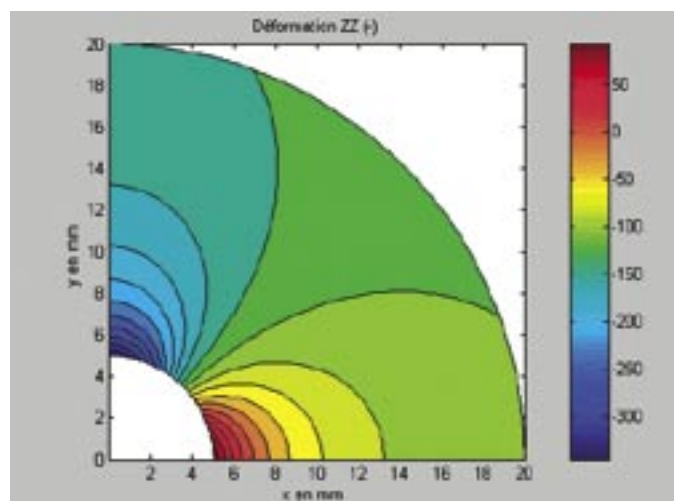
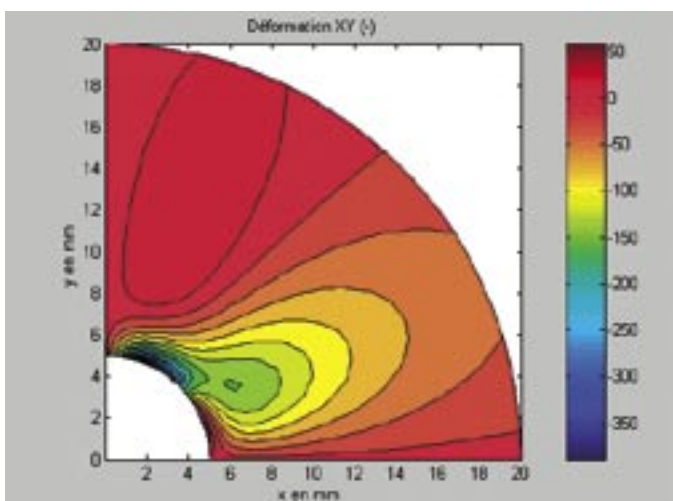
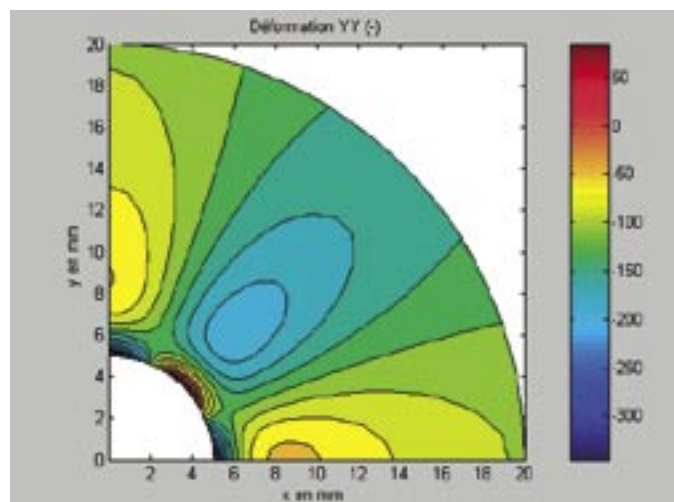
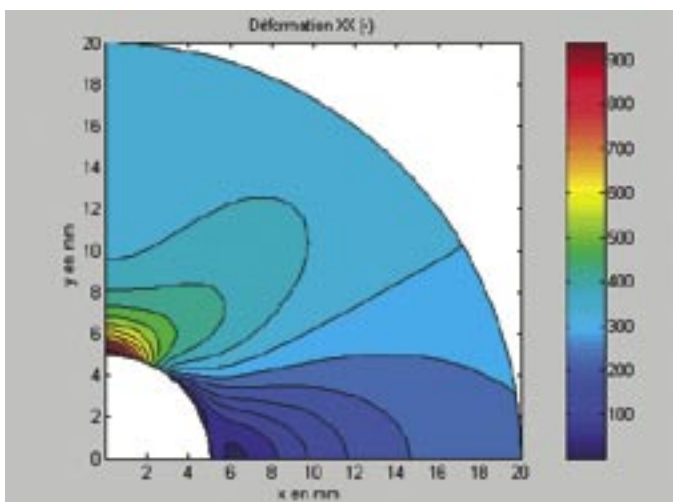
$$\epsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}}{E}; \quad \epsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}}{E};$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{-\nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{E}; \quad \epsilon_{xy} = \frac{(1 + \nu)\sigma_{xy}}{E}$$

Pour calculer la déformation dans la base cartésienne, il est nécessaire de procéder au passage des composantes de la matrice des contraintes de la base cylindrique à la base cartésienne. La figure 9 illustre les composantes de la matrice des déformations pour un trou de 5 mm de rayon dans une plaque de 40 mm de largeur en supposant toujours que le trou est « petit ». Les barres donnent les valeurs des déformations en micromètres par mètre ($\mu\text{m}/\text{m}$). Hormis le fait que le trou n'est pas vraiment petit, il apparaît que la rosette est collée dans une zone où la déformation n'est pas du tout homogène et fournit donc une information moyenne sur la zone d'étude.

Dans la suite, nous comparons les résultats dans le cas du chargement maximal, valant 5000 N. La première remarque concerne la valeur $\epsilon_{xx} = 960 \mu\text{m}/\text{m}$ estimée au 2.1 et confirmée sur la figure 9. Expérimentalement, la valeur atteinte est légèrement inférieure à $600 \mu\text{m}/\text{m}$, comme le montre la figure 8. Une discussion sur cet écart important s'impose.

La position des jauges de la rosette est donnée dans le tableau 1. En ce qui concerne la jauge b, il apparaît qu'elle se situe entre 6,5 et 10,3 mm de l'axe, soit entre 2 et 5 mm du



▲ Figure 9. Les composantes de la matrice des déformations

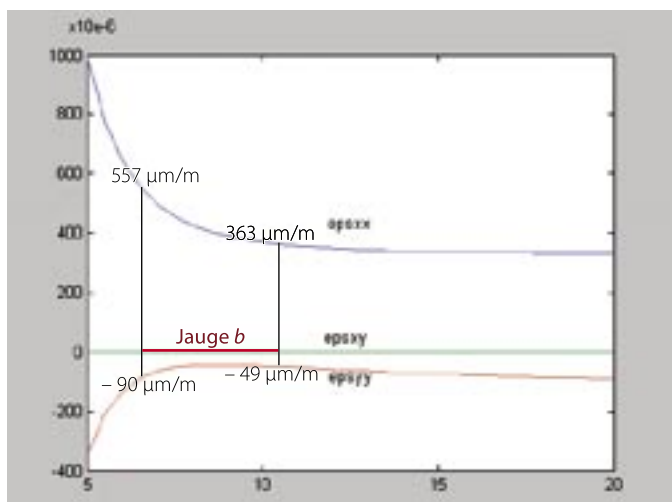
Tableau 2. La comparaison des résultats

Déformations (µm/m)	F = 5 000 N			
	ϵ_{xx}	ϵ_{yy}	ϵ_{xy}	ϵ_{zz}
Résultats expérimentaux	585 ± 28	-65 ± 8	11 ± 13	-279 ± 13
Résultats analytiques	425	-52	0	-201
Écart	21 %	20 %	-	38 %

bord du trou où la déformation ϵ_{xx} est maximale. La figure 10 montre les composantes ϵ_{xx} et ϵ_{yy} calculées sur l'axe OY entre 5 mm (bord du trou) et 20 mm (bord de la plaque). Dans cette zone, ϵ_{xx} varie fortement, entre 557 et 363 µm/m ; ϵ_{yy} varie entre -49 et -90 µm/m. Ces valeurs sont plus proches de celles mesurées. Dans le tableau 2 apparaissent les résultats extensométriques et les valeurs moyennes de la solution analytique. Ces moyennes sont définies par, y_i et y_f étant les coordonnées de début et de fin de la jauge b :

$$\epsilon_{moy} = \frac{1}{y_f - y_i} \int_{y_i}^{y_f} \epsilon(y) dy$$

L'écart qui subsiste entre les deux est chiffré ; il atteint 20 % sur les composantes mesurées et plus encore sur ϵ_{zz} calculée à partir des deux autres.



▲ Figure 10. Les résultats analytiques

Outre que la déformation longitudinale varie fortement tout au long de la jauge, ce qui rend le résultat très sensible à la position de celle-ci, on peut aussi attribuer l'écart résultant à la position des jauges a et c , qui ne sont pas sur l'axe OY. Néanmoins, l'écart important provient surtout de ce que les dimensions du trou ne sont pas négligeables devant la largeur de la plaque. Ce qui se traduit par un coefficient de concentration de contrainte K_T qui sera supérieur à 3 sur le bord du trou. Si l'écart de 20 % est régulier, il faut s'attendre à un coefficient de concentration de contrainte de l'ordre de 3,6 plutôt que 3 pour cette géométrie. Nous verrons sur le site 5 si les calculs par éléments finis confirment ou non cette estimation.

SITE 3 – LA MESURE PAR ANALYSE D'IMAGES

L'activité du site 3 se fait sur une plaque trouée en élastomère chargé de noir de carbone dont le comportement élastique très souple permet de visualiser plus facilement les déformations que sur un alliage métallique. Cette plaque est étirée sur la machine

de traction Deltalab : les niveaux d'effort sont évidemment beaucoup plus faibles que pour la plaque d'aluminium (figure 11).

La caméra est placée dans l'axe de la normale à la face plane de l'éprouvette. On effectue la mise en place de l'éclairage et le réglage de la netteté en cadrant au plus près du mouchetis au voisinage du trou.



▲ Figure 11. Le site expérimental d'analyse d'images

3.1. Faire l'acquisition d'une image de référence (au format BMP) juste avant de lancer l'essai. Ensuite, à chaque temporisation de l'essai, faire l'acquisition de l'image de l'éprouvette déformée correspondante.

Compte tenu de la souplesse de l'élastomère ($E \cong 3$ MPa), les niveaux de charge sont programmés de 20 en 20 N entre 0 et 140 N. En traction simple, compte tenu des dimensions transversales, on peut estimer que la déformation atteinte à ce niveau d'effort est de :

$$F = 140 \text{ N} \rightarrow \sigma = 140 / (30 \times 5) = 9,3 \text{ MPa} \rightarrow \epsilon = 9,3 / 3 = 31 \%$$

Une telle déformation est visible à l'œil nu et permet de vérifier les conclusions de la question 1.1 sur la forme du trou après déformation. La figure 12 montre la forme obtenue lorsqu'on applique une charge de 60 N. Le trou est clairement allongé dans l'axe de la traction (axe X vertical sur la photo).

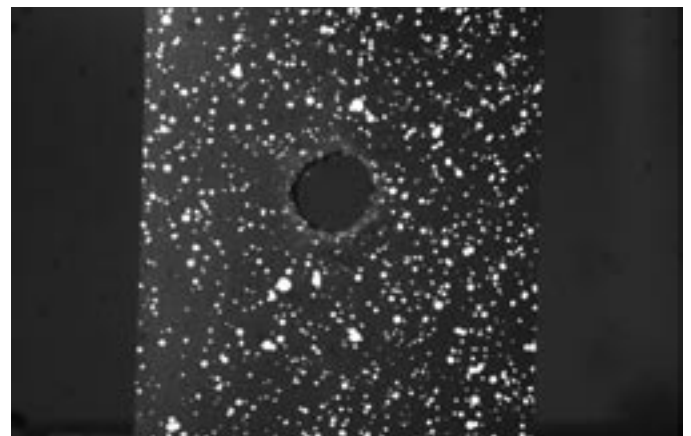
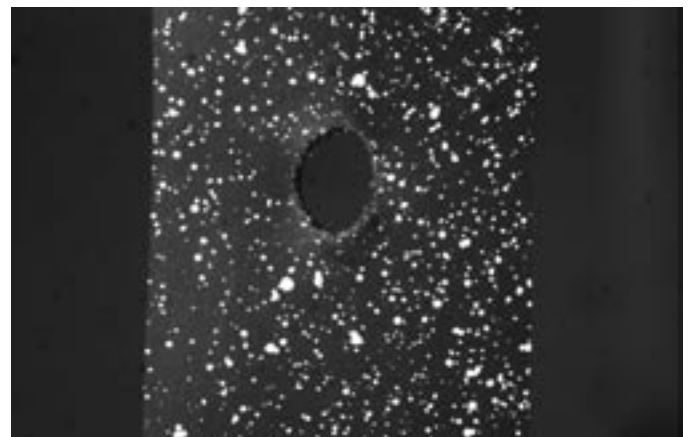
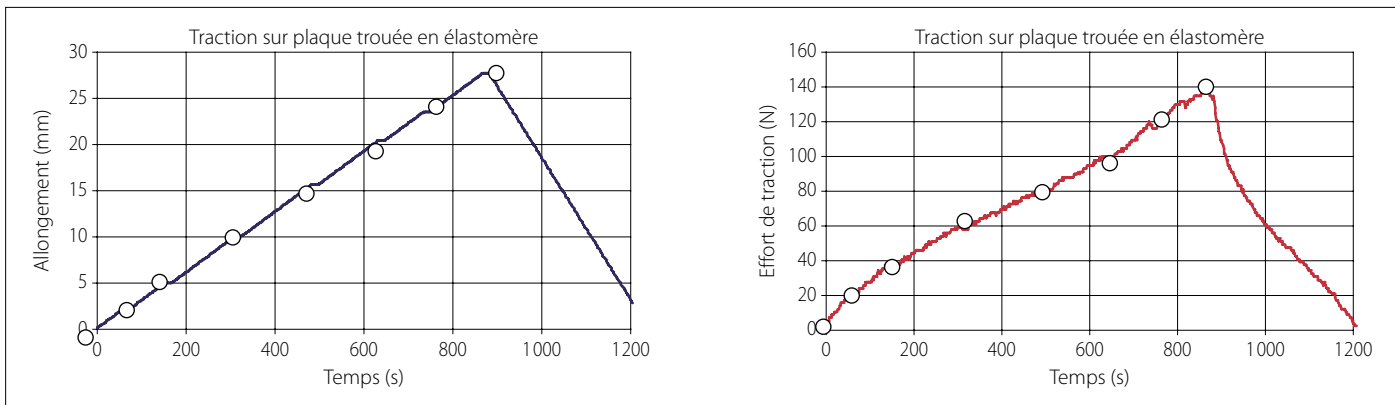


Figure 12. Le trou initialement circulaire ▲ s'allonge sous l'effet de la traction ▼. Ici, l'effort appliqué est de 40 N



On peut voir sur le graphe d'effort (figure 13) que le comportement n'est pas linéaire sur la plage de déformation considérée. On se limite par la suite aux quatre premiers points d'étude (cercles sur les deux graphiques).



▲ Figure 13. L'allongement imposé et l'effort résultant pour l'essai Smactane

3.2. Sous Matlab, à l'aide de l'application «Correli», faire l'analyse des champs de déplacement pour chacune des images déformées. Pour s'assurer de la fiabilité des résultats obtenus, on fera varier les paramètres de l'application (pas, taille de masque, précision).

Compte tenu des déplacements importants d'une image à la suivante, il est nécessaire de choisir un masque de grande taille pour la corrélation d'images. Dans le cas présent (figure 14), on a choisi une taille de masque de 128 × 128 pixels. La grille en rouge indique les positions des nœuds de la grille bleue initiale (colonne de gauche). Sur la colonne de droite, on visualise la composante du déplacement dans le sens de la traction. On peut observer que :

- la grille rouge «suit» bien le mouchetis, la tache blanche au-dessus du trou, notamment, reste bien en vis-à-vis de la troisième ligne de la grille ;
- les lignes de niveau de la composante U du déplacement sont plus serrées près du trou que près du bord, ce qui permet d'établir que les déformations ϵ_{xx} ($= \partial U / \partial x$) sont plus élevées près du trou que près du bord.

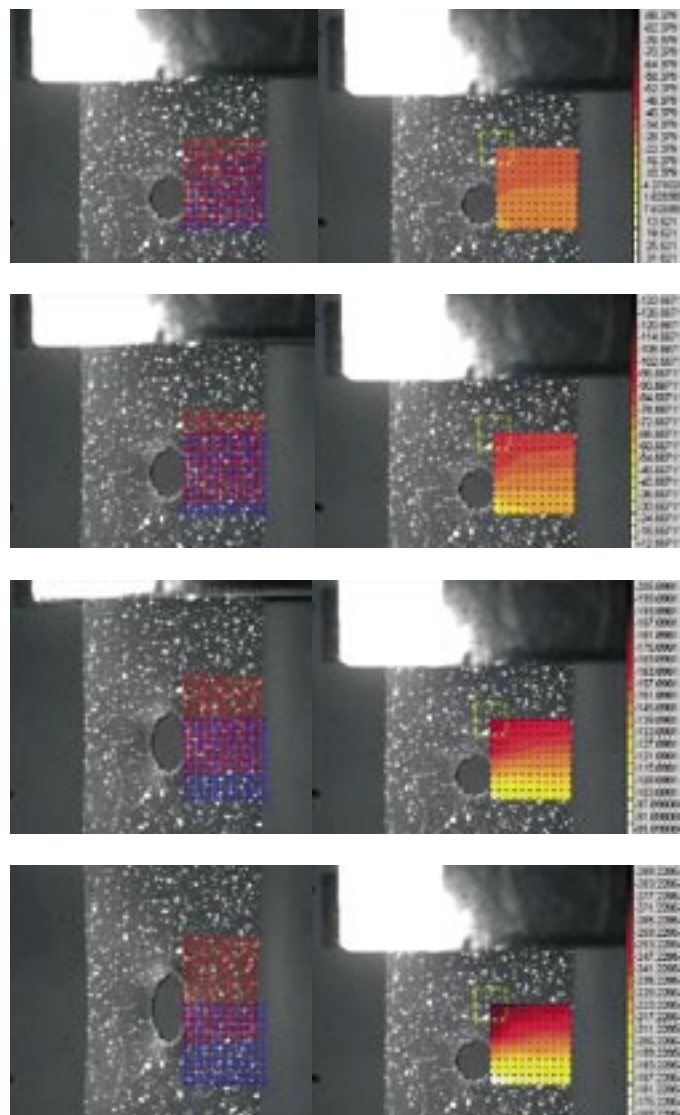
3.3. Sous Matlab, à l'aide de l'application Jauge, déterminer les déformations dans les zones critiques au bord du trou ainsi que loin du trou afin de chiffrer l'hétérogénéité du champ de déformation.

Les déformations ϵ_{xx} , ϵ_{yy} et ϵ_{xy} sont obtenues par dérivation des déplacements U et V par rapport à x et y par les formules classiques de la mécanique des solides déformables :

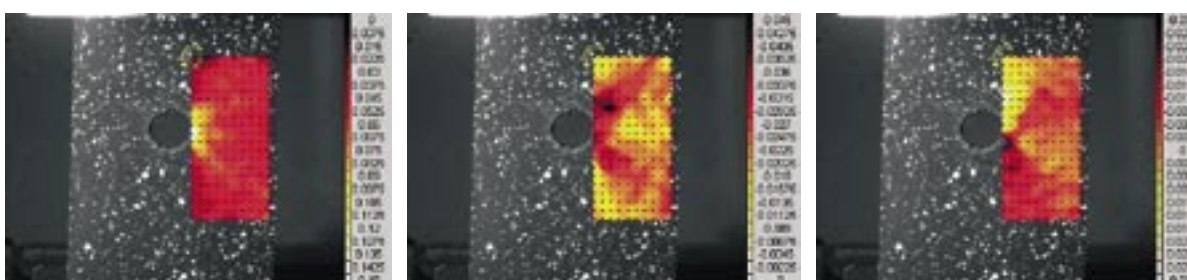
$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial U}{\partial x} ; \epsilon_{yy} = \frac{\partial V}{\partial y} ; \epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)$$

Il faut noter que les déplacements sont connus de manière discrète (aux nœuds de la grille), et que les petits écarts sur les valeurs de U et de V conduisent à des variations plus fortes des ϵ_{ij} . Les images de la figure 15 illustrent, pour une charge de 100 N, le résultat ainsi obtenu.

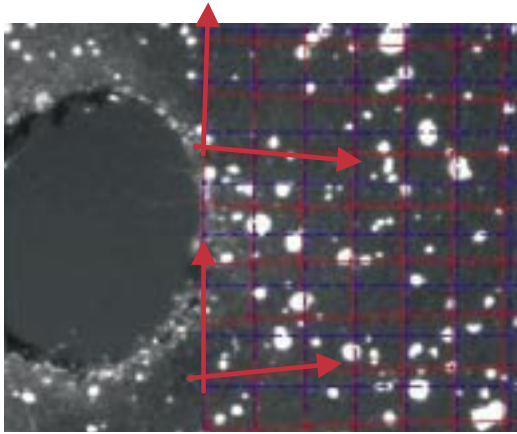
On peut lire que la déformation ϵ_{xx} est de l'ordre de 15 % au bord du trou alors qu'elle n'est que de 4,5 % environ lorsqu'on s'en éloigne. La composante ϵ_{yy} est négative, ce qui indique une



▲ Figure 14. Les grilles initiales et les déformées pour les charges de 20, 40, 60 et 80 N ; la composante du déplacement U suivant l'axe de traction X



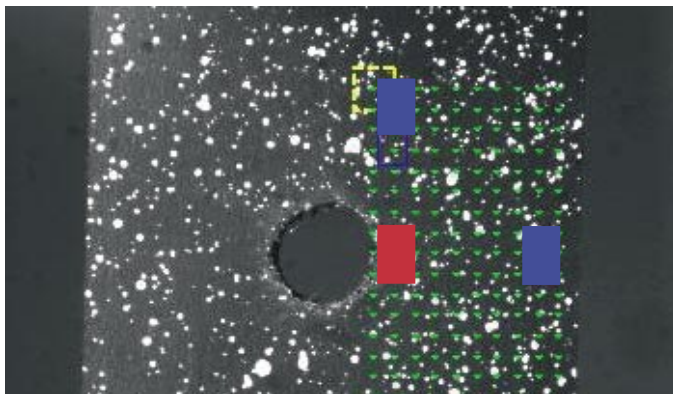
◀ Figure 15. Les composantes des déformations pour une charge de 100 N (de gauche à droite ϵ_{xx} , ϵ_{yy} et ϵ_{xy})



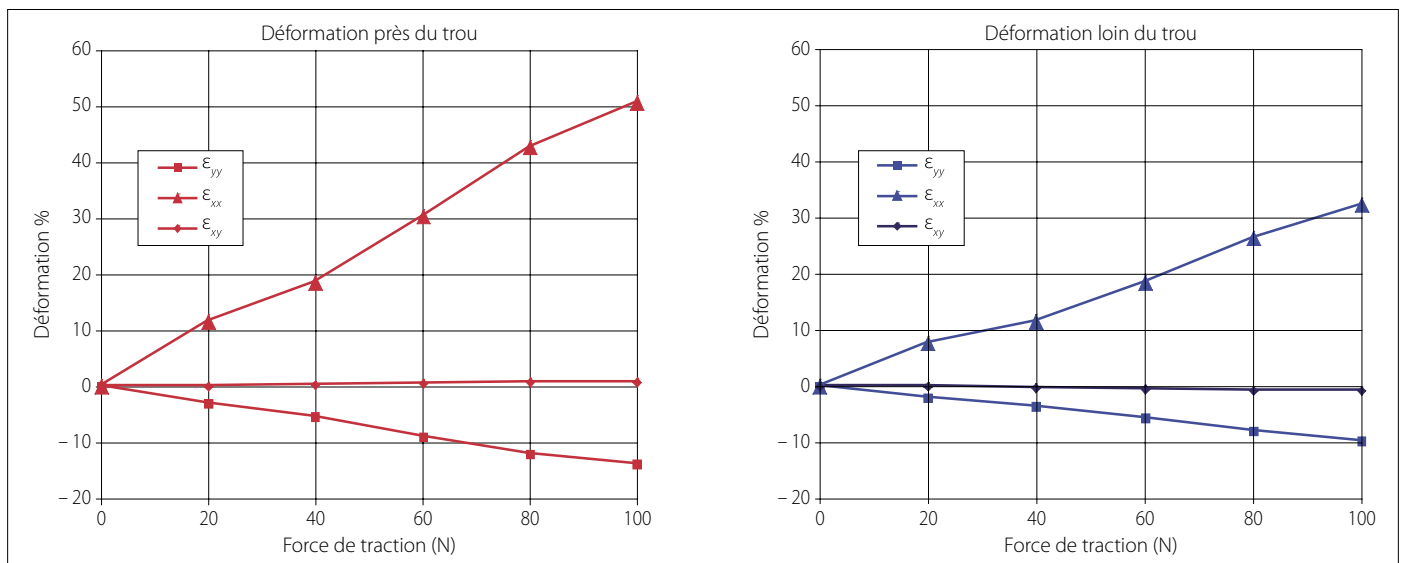
▲ Figure 16. La distorsion angulaire au bord du trou conduit à un champ de déformation ϵ_{xy} antisymétrique

diminution de la largeur de la plaque. Cette contraction est plus importante suivant les axes à 45° de la plaque. Les deux figures présentent un axe de symétrie, contrairement à la figure ϵ_{xy} .

Il faut se rappeler que ϵ_{xy} correspond à la demi-diminution de l'angle droit entre l'axe X et l'axe Y après déformation. En examinant de plus près la grille déformée de la figure 16, on constate que dans la partie au-dessus de l'axe de symétrie OY l'angle droit initial est ouvert, ce qui indique une déformation ϵ_{xy} négative alors que le même angle est fermé dans la partie au-dessous de l'axe : ϵ_{xy} est positif.



▲ Figure 17. Les trois zones où les déformations sont évaluées



▲ Figure 18. Les relevés des déformations pour les 5 premières images. Notons que ϵ_{xy} est quasi nulle, ce qui est bien compatible avec un relevé sur un axe de symétrie de la structure

Les graphes d'isodéformation sont très bruités, et il est difficile de les exploiter à des fins de métrologie. On travaille plutôt par zones en lissant au préalable le champ de déplacement. On calcule alors la déformation moyenne du déplacement lissé sur une zone définie par un rectangle dont on peut faire varier les dimensions. On obtient de cette façon un résultat analogue à celui d'une jauge collée à cet emplacement. Dans le cas présenté en figure 18, on a relevé les déformations dans les zones définies par les rectangles de couleur (figure 17) pour les cinq premières images (de $F = 20 \text{ N}$ à $F = 100 \text{ N}$).

On note que les amplitudes de déformations (figure 18) sont plus fortes près du trou que loin du trou. Pour ce dernier cas, si on suppose que l'état de déformation correspond à une traction simple, le ratio des courbes $-\epsilon_{yy}/\epsilon_{xx}$ permet d'identifier un coefficient de Poisson de 0,29. Près du trou et loin du trou, le calcul de la contrainte σ_{xx} peut alors se faire par :

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{xx} + \nu\epsilon_{yy}) \rightarrow K_T = \frac{(\epsilon_{xx} + \nu\epsilon_{yy})_{\text{trou}}}{(\epsilon_{xx} + \nu\epsilon_{yy})_{\text{bord}}} = 1,6$$

L'estimation de ce coefficient est clairement faible – environ deux fois trop si on se réfère à la solution analytique. Deux causes sont à l'origine de cet écart :

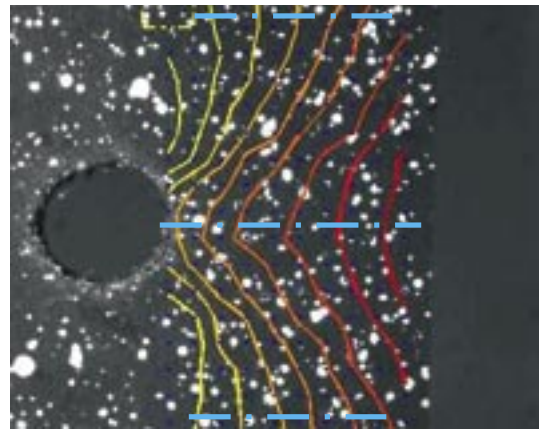
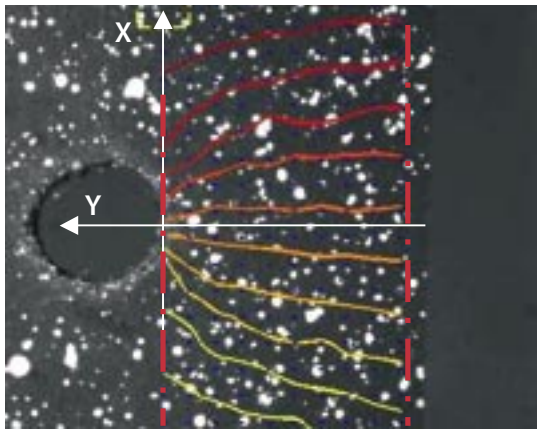
- la zone rouge n'est pas exactement sur le bord du trou ;
- la zone bleue n'est pas suffisamment loin du trou.

Le graphe du bas de la figure 3 montre la décroissance très rapide de σ_{xx} au bord du trou. Dans la zone rouge de la figure 17, le facteur σ_{xx}/σ varie entre 1,5 et 2. La zone bleue correspond à un ratio y/a de l'ordre de 4 à 5, soit une contrainte σ_{xx}/σ de l'ordre de 1,1. Ces valeurs permettent d'estimer un coefficient

$$K_T = 1,75/1,1 = 1,59.$$

Cette évaluation, à partir de la solution analytique, confirme la valeur estimée expérimentalement avec une précision remarquable. Cela atteste la bonne qualité de la technique de mesure par analyse d'images, mais indique aussi que cette technique ne permet pas d'obtenir finement les gradients de contrainte. Pour cela, il faut se focaliser au voisinage des zones sensibles et affiner la description du champ de déplacement dans cette zone.

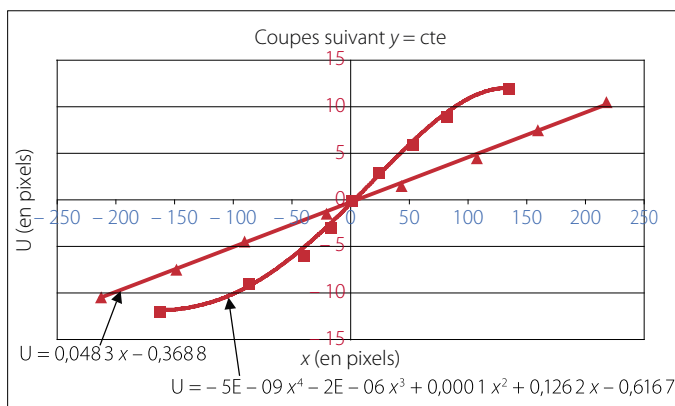
3.4. Par interpolation des courbes d'isodéplacement, mettre en place une technique de calcul plus fine des déformations près du



▲ **Figure 19.** Le déplacement U (à gauche), d'un pas de 3 pixels entre chaque ligne de niveau; le déplacement V (à droite), d'un pas de 1 pixel

bord du trou. Quelle est la nouvelle estimation du coefficient de concentration de contrainte avec cette technique? Conclure.

Une manière d'approcher la détermination fine des déformations est de faire une interpolation des déplacements U et V dans la zone utile et de réaliser ensuite un calcul analytique sur les fonctions U et V interpolées le long des droites à $x = cte$ ou $y = cte$. Dans le cas du trou dans la plaque en élastomère, les iso-déplacements au bord du trou sont visualisés sur les deux images de la figure 19. Les composantes sont croissantes du jaune au rouge: U(x) est croissante et V(y) est décroissante.



▲ **Figure 20.** Le déplacement U(x) suivant les coupes de la figure 19 à gauche

Le graphique de la figure 20 précise les équations de l'interpolation du déplacement U près du trou (carrés) et près du bord (triangles). Dans le premier cas, la déformation ϵ_{xx} est donc de 12,6 % alors qu'elle n'est que de 4,8 % près du bord.

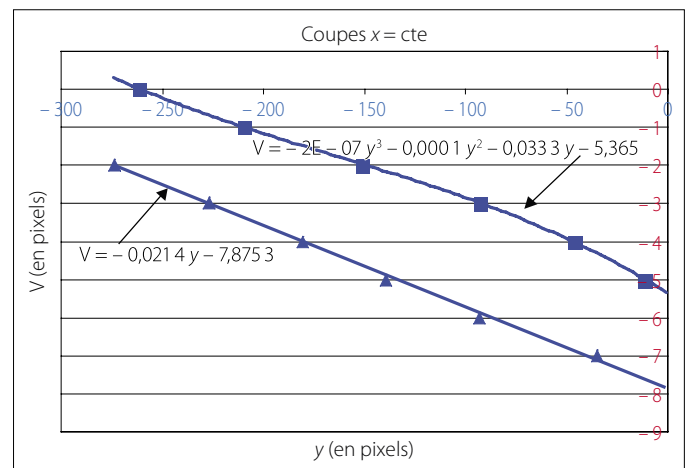
De même, les fonctions d'interpolation du déplacement V (figure 21) sur l'axe de symétrie (carrés) ou de part et d'autre de l'image (triangles) permettent d'évaluer ϵ_{yy} , qui vaut -3,33 %

près du bord et -2,14 % loin du bord. Le bord du trou se trouve en $y = 0$.

À l'aide de la relation précédente, on estime cette fois le coefficient de concentration de contrainte à une valeur plus réaliste de:

$$K_T = \frac{12,62 - 0,29 \times 3,33}{4,83 - 0,29 \times 2,14} = 2,8$$

Soit un écart de moins de 7 % par rapport à la solution analytique $K_T = 3$ pour les trous « petits ». Ce qui constitue



▲ **Figure 21.** Le déplacement V(y) suivant les coupes de la figure 19 à droite

une précision assez bonne compte tenu des incertitudes sur les caractéristiques E et ν du matériau considéré.

La seconde partie de cet article, à paraître dans le prochain numéro de *Technologie*, développera une analyse par photo-élasticité et une autre avec les éléments finis. ■