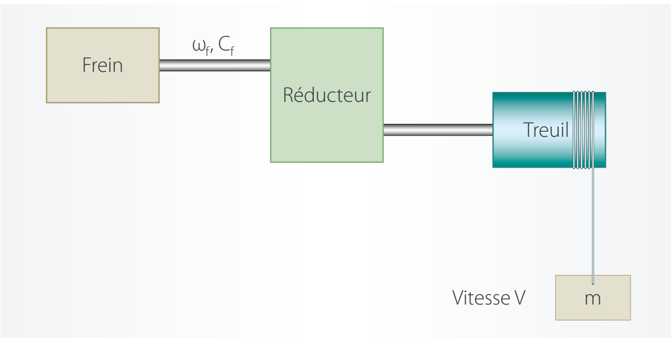
La prise en compte des pertes d'énergie dans une chaîne de transmission de puissance

DAVID PEINADO[1]

Depuis quelques semaines, un débat agite la communauté PGM (profs de génie mécanique) à propos de la prise en compte ou non du rendement dans l'expression de l'inertie équivalente d'une chaîne de transmission de puissance. Cette polémique fait suite aux articles parus dans les numéros 111 et 116 de* Technologie*, et oppose deux familles de pensée : la première considère l'inertie équivalente comme une donnée cinétique, ne dépendant que de la répartition des masses, tandis que la seconde constate que, dans certains cas, la non-prise en compte du rendement dans le calcul de l'inertie équivalente mène à des résultats faux.

L'auteur se propose, à partir d'un exemple concret, de poser clairement le problème, afin de démêler le vrai du faux, et surtout de voir quelles sont les hypothèses implicitement posées par les uns et les autres.

MOTS-CLÉS actionneur,automatisme, puissance, dynamique, postbac



L'exemple ci-dessus, proposé sur le site Les Outils de Speccy, servira de support à notre raisonnement.

Données :

- R_T (rayon du treuil) = 0,1 m
- r (rapport de transmission du réducteur) = 0,1
- g = 10 m/s²
- m = 2 000 kg
- η (rendement du réducteur) = 0,6

Une charge de masse m est supportée par un treuil entraîné par un moteur frein par l'intermédiaire d'un réducteur. On s'intéresse plus particulièrement à la phase de freinage, pendant laquelle on veut que la charge initialement animée d'une vitesse V_0 de 2 m/s soit stoppée en 0,1 seconde.

L'APPLICATION DU THÉORÈME DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE

Isolons l'ensemble (réducteur + treuil + masse), et appliquons-lui le théorème de l'énergie cinétique (notée Ec) :

$$P_{ext} + P_{int} = \frac{dEc}{dt} \quad (1).$$

Le calcul de P_{ext}

P_{ext} est la puissance développée par les actions mécaniques extérieures au système, le poids de la masse et le couple de freinage. On a donc :

$$P_{ext} = m \cdot g \cdot V - C_f \cdot \omega_f,$$

le poids ayant ici une action motrice, contrairement au frein.

On peut facilement établir une relation cinématique entre V et ω_f, de manière à ramener le calcul sur l'arbre du frein :

$$V = R_T \cdot r \cdot \omega_f.$$

Finalement,

$$P_{ext} = (m \cdot g \cdot R_T \cdot r - C_f) \cdot \omega_f.$$

Le calcul de P_{int}

P_{int} représente quant à elle la puissance développée par les actions mécaniques intérieures au système, donc la puissance dissipée dans le mécanisme. Nous verrons ultérieurement son expression détaillée ; pour l'instant, nous nous contenterons de ramener cette puissance sur l'arbre du frein en écrivant que

$$P_{int} = -C_{ed} \cdot \omega_f,$$

C_{ed} étant le couple équivalent dissipé sur l'arbre du frein. On note que C_{ed}, tel qu'il est défini, sera forcément positif.

le calcul de *dEc/dt*

Si l'on néglige l'énergie cinétique des différents éléments du système devant celle de la masse, on a :

$$Ec = (1/2) \cdot m \cdot V^2.$$

En reprenant l'expression liant V à ω_f, on arrive à :

$$Ec = (1/2) \cdot m \cdot R_T^2 \cdot r^2 \cdot \omega_f^2$$

On peut alors définir une **inertie cinétiquement équivalente** J_{ce}, comme étant l'inertie d'une pièce qui, si elle était placée sur l'arbre d'entrée, aurait la même énergie cinétique que l'ensemble du système :

$$Ec = (1/2) \cdot J_{ce} \cdot \omega_f^2.$$

C'est l'inertie équivalente au sens classique du terme, qui ne prend en compte que l'aspect cinétique du problème, et qui n'a d'autre objectif que d'alléger les notations, surtout quand on a de nombreux axes tournant à des vitesses différentes.

D'après les expressions qui précèdent, on a :

$$J_{ce} = m \cdot R_T^2 \cdot r^2,$$

d'où :

$$\frac{dEc}{dt} = J_{ce} \cdot \omega_f' \cdot \omega_f.$$

1. Professeur agrégé de mécanique au lycée Jacques-Duhamel de Dole.
Courriel : david.peinado@infonie.fr

On note au passage que :

$$\omega_f' = \frac{1}{R_T \cdot r} \cdot \frac{dV}{dt},$$

avec $\frac{dV}{dt} = a_m = \frac{-0{,}2}{0{,}1} = -2 \text{ m/s}^2$ $\left\{\begin{array}{l}\text{(accélération de la masse,}\\ \text{qui est freinée).}\end{array}\right.$

ω_f' est donc négative, ce qui semble logique.

Le calcul de C_f

En reprenant tous les termes de (1) et en simplifiant par ω_f, on arrive à l'expression suivante :

$$m \cdot g \cdot R_T \cdot r - C_f - C_{ed} = J_{ce} \cdot \omega_f',$$

soit $\quad C_f = (m \cdot g \cdot R_T \cdot r) - (J_{ce} \cdot \omega_f') - C_{ed} \quad (2).$

On peut déjà dans un premier temps analyser l'influence des différents paramètres sur le couple de freinage à fournir :

- Le premier terme, $(m \cdot g \cdot R_T \cdot r)$, correspond au couple résistant créé par la masse. Si celle-ci augmente, le couple de freinage à fournir augmentera lui aussi, ce qui semble plutôt logique.
- Le deuxième terme, $-(J_{ce} \cdot \omega_f')$, est positif, contrairement aux apparences, puisque ω_f' est négative. Donc, si l'on souhaite arrêter la masse plus vite, il faut freiner plus fort ; là encore, rien de surprenant.
- Pour le troisième terme, on se souviendra que C_{ed} est par définition positif et que, par conséquent, plus l'énergie dissipée dans le mécanisme sera importante, moins le frein sera sollicité. Ce résultat est logique, bien qu'il puisse paraître *a priori* paradoxal, puisqu'un mauvais rendement est ici bénéfique, contrairement aux cas où l'on cherche à déterminer le couple que doit fournir un moteur pour accélérer une charge. En poussant le raisonnement à l'extrême, on arrive à la conclusion que si la transmission est irréversible (rendement nul dans ce sens, ou couple dissipé infini), alors il n'y a plus besoin de frein.

Le problème étant posé, on peut maintenant voir comment exprimer C_{ed} afin de modéliser au mieux les pertes d'énergie dans la transmission.

LA MODÉLISATION DES PERTES D'ÉNERGIE

On supposera que les pertes dans les différentes liaisons du mécanisme sont négligeables devant celles du réducteur.

La modélisation par un rendement

Une précision avant tout : j'ai souvent lu l'expression « prendre en compte le rendement », or si l'on veut être rigoureux, il s'agit bien ici de trouver une modélisation adéquate qui rende compte des pertes d'énergie. Le rendement est un modèle pratique et souvent utilisé, mais, comme tout outil, il a ses limites.

Derrière l'expression « $\eta = 0{,}6$ » se cache l'hypothèse implicite qu'une part constante de la puissance transitant par le réducteur est perdue. Dans le cas présent, il faut donc déterminer la puissance motrice transmise par le réducteur, et l'on connaîtra la puissance dissipée, qui correspondra à 40 % de celle-ci.

D'après la relation (2) et l'analyse de ses différents termes, on voit que la puissance motrice a pour expression :

$$P_{mot} = (m \cdot g \cdot R_T \cdot r - J_{ce} \cdot \omega_f') \cdot \omega_f \quad (3).$$

Pour ceux qui pourraient s'étonner que le terme inertiel soit moteur, je propose d'appliquer le théorème de la résultante dynamique en projection sur l'axe vertical à la masse. Si l'on appelle T la tension dans le câble, on a alors :

$$m \cdot g - T = m \cdot a_m, \qquad \text{d'où} \qquad T = m \cdot g - m \cdot a_m.$$

Si l'on se rappelle que a_m, comme ω_f', est négatif, et qu'on écrit que $P_{mot} = T \cdot V$, on arrive exactement à la même expression que (3), pour peu que l'on exprime V en fonction de ω_f (c'est-à-dire si l'on se ramène sur l'arbre d'entrée).

Bref, on peut maintenant déterminer la puissance dissipée :

$$P_d = (1 - \eta) \cdot P_{mot} = (1 - \eta) \cdot (m \cdot g \cdot R_T \cdot r - J_{ce} \cdot \omega_f') \cdot \omega_f.$$

D'après la définition de C_{ed}, on a :

$$C_{ed} = (1 - \eta) \cdot (m \cdot g \cdot R_T \cdot r - J_{ce} \cdot \omega_f').$$

En reportant cette expression dans (2), on arrive à

$$C_f = (m \cdot g \cdot R_T \cdot r - J_{ce} \cdot \omega_f') \cdot (1 - 1 + \eta),$$

soit : $\quad C_f = \eta \cdot (m \cdot g \cdot R_T \cdot r - J_{ce} \cdot \omega_f') \quad (4).$

Application numérique :

$$J_{ce} \cdot \omega_f' = m \cdot R_T \cdot r \cdot a_m$$

donc

$$\begin{aligned} C_f &= \eta \cdot m \cdot R_T \cdot r \cdot (g - a_m) \\ &= 0{,}6 \times 2\,000 \times 0{,}1 \times 0{,}1 \times (10 - (-2)) \\ &= 144 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Analyse de la relation (4)

Dans un fichier BMP se trouvant sur le site de Speccy, un collègue opposait deux méthodes de résolution et s'étonnait d'obtenir des résultats différents. Or, dans le premier cas, il a omis de prendre en compte le terme inertiel dans la puissance motrice, et donc de l'affecter d'un rendement (par ailleurs inversé dans son écriture). Dans un deuxième temps, il calcule la puissance motrice à partir de la tension du câble qui, comme nous l'avons vu, fait forcément intervenir le terme inertiel. La conclusion qu'il tire de ses calculs, et on peut le comprendre, est que s'il corrige son inertie en faisant intervenir le rendement il arrive au même résultat par les deux méthodes, et, effectivement, cela permet de corriger l'erreur précédente.

Mais revenons-en à la relation (4), que certains proposent de modifier de la manière suivante :

$$C_f = \eta \cdot m \cdot g \cdot R_T \cdot r - J_{ee} \cdot \omega_f' \qquad \text{avec} \qquad J_{ee} = \eta \cdot J_{ce}.$$

C'est-à-dire qu'on utilise ici une **inertie énergétiquement équivalente** J_{ee}, qui prend en compte le rendement sur le terme inertiel. On notera que, si la puissance motrice a été correctement définie, aucune des deux définitions n'est ni juste ni fausse. Il s'agit de deux conventions différentes, dont il faut prendre soin d'écrire précisément la définition.

Sur certains sites internet, j'ai pu lire des critiques, sinon virulentes, pour le moins provocatrices contre l'approche par l'inertie énergétiquement équivalente, par des collègues qui pensent que l'inertie est une donnée purement cinétique, qui n'a rien a voir avec les pertes d'énergie. Cette opposition de principe manque toutefois un peu d'arguments sur l'utilité ou non d'utiliser cette définition de l'inertie équivalente. Or c'est à mon sens un critère fondamental pour nous qui sommes des techniciens, et non des physiciens. Ça ne serait pas la première fois dans l'histoire des calculs de mécanique que l'on emprunterait un petit raccourci (même glissant), pour peu qu'il nous évite un long détour de plusieurs pages de calcul. Je suggère que ceux qui n'ont jamais utilisé l'hypothèse d'une poutre encastrée-libre pour dimensionner une dent d'engrenage jettent la première pierre…

Bref, je propose de poser le problème de la manière suivante : quels sont les avantages et les inconvénients de l'utilisation de J_{ee} ?

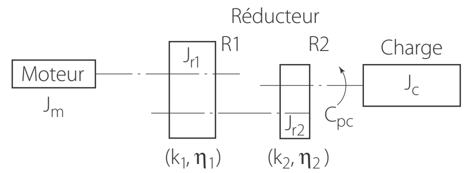
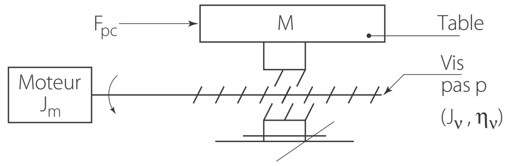
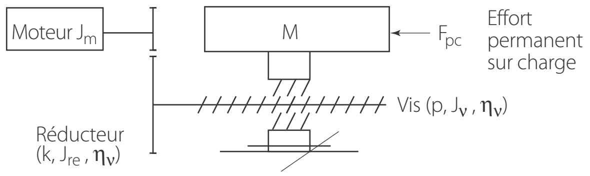
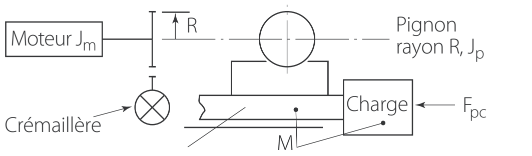
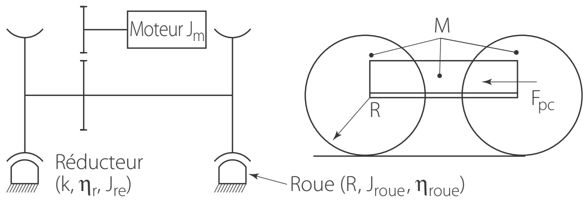
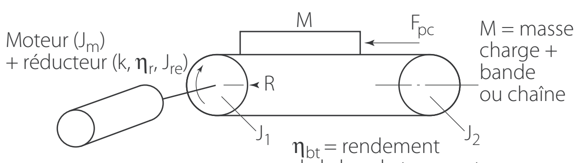
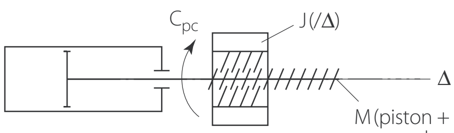
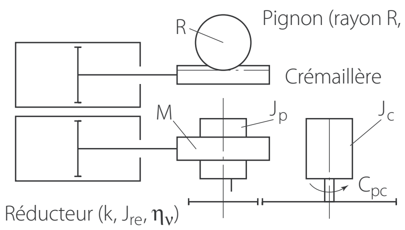
Si l'on est dans le cas où l'on cherche à entraîner la masse par un moteur, alors, comme l'a démontré Jacques Lamora dans le numéro 116 de *Technologie*, on a

$$J_{ee} = \frac{J_{ce}}{\eta}.$$

L'inertie n'est plus motrice, mais c'est la puissance du moteur qui est affectée du coefficient η, qui passe donc au dénominateur des autres termes dans l'expression du couple moteur.

On arrive donc à deux expressions de J_{ee}, l'une étant valable quand l'inertie produit de l'énergie (ou est motrice, pendant une phase de freinage), et l'autre lorsque l'inertie absorbe de l'énergie (ou est réceptrice, pendant une phase d'accélération).

Les caractéristiques équivalentes de couples et d'inertie (du point de vue énergétique) de mécanismes courants

Type	Schéma de principe	Caractéristiques équivalentes
Moteur + 2 réducteurs + charges		$C_{pm}=\frac{C_{pc}}{\eta_1\eta_2 k_1 k_2}$ $J_{me}=J_m+J_{r1}+\frac{J_{r2}}{\eta_1 k_1^2}+\frac{J_c}{(k_1k2)^2(\eta_1\eta_2)}$ Accélération $J_{me}=J_m+J_{r1}+\frac{\eta_1 J_{r2}}{k_1^2}+\frac{(\eta_1\eta_2)\,J_c}{(k_1k2)^2}$ Freinage
Moteur + vis-écrou + table		$C_{pm}=\frac{F_{pc}}{\eta_v}\cdot\frac{p}{2\pi}$ $J_{me}=J_m+J_v+\frac{M}{\eta_v}\left(\frac{p}{2\pi}\right)^2$ Accélération $J_{me}=J_m+J_v+M\left(\frac{p}{2\pi}\right)^2\cdot\eta_v$ Freinage
Moteur + réducteur + vis-écrou + table		$C_{pm}=\frac{1}{\eta_r\eta_v}\frac{1}{k}\frac{F_{pc}\cdot p}{2\pi}$ $J_{me}=J_m+J_{re}+\frac{J_v}{k^2\eta_r}+\frac{M\left(\frac{p}{2\pi}\right)^2}{k^2\eta_r\eta_v}$ Accélération $J_{me}=J_m+J_{re}+\frac{J_v\cdot\eta_r}{k^2}+\frac{M\left(\frac{p}{2\pi}\right)^2\cdot\eta_r\eta_v}{k^2}$ Freinage
Moteur + pignon crémaillère + table (+ réducteur éventuel)	 η_{pc} : rendement pignon/crémaillère	$C_{pm}=\frac{R\cdot F_{pc}}{\eta_{pc}}$ η_{pc} rendement $J_{me}=J_m+J_p+\frac{(MR^2)}{\eta_{pc}}$ Accélération $J_{me}=J_m+J_p+(MR^2)\cdot\eta_{pc}$ Freinage Avec réducteur $C_m=\frac{1}{\eta_{pc}\eta_r}\frac{R\cdot F_{pc}}{k}$ $J_{me}=J_m+J_{re}+\frac{J_p}{k^2\eta_r}+\frac{MR^2}{k^2\eta_{pc}\eta_{roue}}$ Accélération $J_{me}=J_m+J_{re}+\frac{J_p\,\eta_r}{k^2}+\frac{(MR^2)\,\eta_{pc}\,\eta_{roue}}{k^2}$ Freinage
Chariot automoteur : moteur + réducteur + roues + chariot		$C_{pm}=\frac{1}{\eta_r\cdot\eta_{roue}}\frac{R\cdot F_{pc}}{k}$ $J_{me}=J_m+J_{re}+\frac{J_{roues}}{k^2\eta_r}+\frac{MR^2}{k^2\eta_{pc}\eta_{roue}}$ Accélération $J_{me}=J_m+J_{re}+\frac{J_{roues}\,\eta_r}{k^2}+\frac{(MR^2)\,\eta_{pc}\,\eta_{roue}}{k^2}$ Freinage
Bandes transporteuses : moteur + réducteur + chaîne ou bande	 η_{bt} = rendement de la bande transporteuse	$C_{pm}=\frac{1}{\eta_r\cdot\eta_{bt}}\frac{R\cdot F_{pc}}{k}$ $J_{me}=J_m+J_{re}+\frac{J_1}{k^2\eta_r}+\frac{J_2}{k^2\eta_r\eta_{bt}}+\frac{MR^2}{k^2\eta_r\eta_{bt}}$ Accélération $J_{me}=J_m+J_{re}+\frac{J_1\,\eta_r}{k^2}+\frac{J_2\,\eta_r\eta_{bt}}{k^2}+\frac{(MR^2)\,\eta_r\eta_{bt}}{k^2}$ Freinage
Vérin + vis-écrou	 η_{ve} rendement vis-écrou	$F_{pm}=\frac{1}{\eta_{ve}}\cdot C_{pc}\cdot\frac{2\pi}{p}$ $M_{me}=M+\frac{J}{\eta_{ve}}\left(\frac{2\pi}{p}\right)^2$ Accélération $M_{me}=M+J\left(\frac{2\pi}{p}\right)^2\cdot\eta_{ve}$ Freinage
Vérin + pignon crémaillère + réducteur + charge		$F_{pm}=\frac{1}{\eta_{pc}\eta_r}\frac{C_{pc}}{kR}$ $M_{me}=M+\frac{J_p+J_{re}}{\eta_{pc}R^2}+\frac{J_c}{k^2R^2\eta_{pc}\eta_r}$ Accélération $M_{me}=M+\frac{(J_p+J_{re})\,\eta_{pc}}{R^2}+\frac{J_c\,\eta_{pc}\eta_r}{k^2R^2}$ Freinage

Donc, si l'on se place dans l'une ou l'autre de ces phases, il n'y a pas de contre-indication à l'utilisation d'une inertie énergétiquement équivalente. Mais, si l'on veut faire un calcul d'asservissement ou de vibrations pendant lesquels alterneront des phases de freinage et d'accélération, alors l'utilisation de J_{ee} semble proscrite.

Plus encore, c'est même la modélisation des pertes énergétiques par un rendement qui est incompatible avec ces calculs, puisqu'elle mène de toute façon à des expressions différentes pendant les deux phases. Nous verrons plus loin quelle modélisation permet de répondre à ce problème.

En revanche, on peut noter que J_{ee} peut être intéressante dans le cas où l'on a plusieurs arbres et plusieurs réducteurs, car l'expression de la puissance d'origine inertielle dissipée dans chaque réducteur devient ardue, alors qu'elle peut être résumée par une expression du type :

$$J_{ee} = \sum_i \frac{J_i}{\eta_i \cdot k_i^2}$$

en phase d'accélération, et

$$J_{ee} = \sum_i \frac{\eta_i \cdot J_i}{k_i^2}$$

en phase de freinage, avec k_i le rapport de transmission de l'étage *i* (voir le tableau récapitulatif concernant des mécanismes courants).

Au-delà de ce débat entre spécialistes se pose la question de savoir ce que l'on doit enseigner à nos élèves, et notamment quelle définition de l'inertie équivalente leur donner. Selon moi, le plus important est de leur apprendre à bien différencier les puissances motrices et réceptrices, c'est-à-dire à trouver le sens physique caché dans les équations. Dans cette perspective, il me semble que le choix d'une inertie cinétiquement équivalente suivi d'une analyse fine des puissances motrices et réceptrices donnerait aux élèves plus de chances de faire des calculs justes dans toutes les situations.

Quant aux fameux tableaux donnés par Philippe Taillard et Christian Teixido dans le numéro 111 de *Technologie,* ils correspondent à des inerties cinétiquement équivalentes. Le rendement est pris en compte dans l'expression du couple moteur.

Le complément proposé par Jacques Lamora dans le numéro 116 correspond, lui, à des inerties énergétiquement équivalentes, à utiliser uniquement en phase d'accélération.

Les autres modélisations possibles

On a vu que l'hypothèse d'un rendement constant mène à des écritures différentes en phases d'accélération et de freinage ; on peut alors imaginer de modéliser les pertes énergétiques sous la forme d'un couple dissipé C_{ed} constant (hypothèse correspondant à du frottement sec). Dans ce modèle, la puissance dissipée est donc proportionnelle à la fréquence de rotation. Si l'on veut que ce modèle soit cohérent, il faut que C_{ed} soit constant, sauf s'il est supérieur au couple moteur, sinon la somme des deux prendrait le signe de C_{ed} et le couple dissipé deviendrait moteur ! On aboutit donc à une loi non linéaire pour l'expression de C_{ed}, ce qui posera de gros problèmes pour les calculs d'asservissement, puisque la modélisation par fonction de transfert ne peut s'appliquer qu'à des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Reste alors l'hypothèse du frottement visqueux, c'est-à-dire d'un couple dissipé proportionnel à la vitesse. La puissance dissipée sera donc ici proportionnelle au carré de la vitesse, mais on a un comportement du modèle cohérent lors du passage d'une phase d'accélération à un freinage, puisque la vitesse diminue avant de changer de signe, ce qui garantit que le couple dissipé ne devienne pas moteur. On comprend mieux pourquoi c'est ce type de modèle qui est presque systématiquement utilisé pour les calculs d'asservissements ou de vibrations : c'est le seul qui conserve la même expression au cours des différentes phases du fonctionnement.

Sans présumer de l'adéquation entre les trois modèles proposés et le type de système étudié, on voit que l'écriture mathématique de ces modèles les rend plus ou moins compatibles avec le type de calcul qui est effectué. Pour le dimensionnement d'un actionneur, il semble quand même que ce soit l'hypothèse d'un rendement constant qui soit la plus facile à manipuler, parce qu'elle reste linéaire, même si elle implique de reposer le problème si l'on veut se placer dans une phase de décélération – pour dimensionner un frein par exemple.

EN CONCLUSION

Nous avons vu que deux définitions de l'inertie étaient possibles : l'une cinétique et l'autre énergétique, et que, pour des experts, aucune des deux n'est juste ou fausse, pour peu que le problème soit bien posé. Je pense malgré tout que, pour des élèves, la définition cinétique « traditionnelle » est la plus adaptée, parce qu'elle permet de centrer le raisonnement sur les énergies motrices et réceptrices.

D'ailleurs, la controverse autour de ces notions montre bien que les raisonnements énergétiques sont toujours délicats à manier, puisqu'ils nécessitent une très grande attention aux signes des termes, afin de pouvoir différencier ce qui est moteur de ce qui est récepteur.

Enfin, en passant en revue les différentes modélisations possibles des pertes énergétiques, on a pu constater que, par leur écriture, elles étaient plus ou moins adaptées suivant le type de calcul. Dans le cas d'une transmission par engrenages, l'étude de l'hypothèse la plus réaliste reste à mener…

Pour terminer, je voudrais remercier tous ceux qui ont contribué à cette réflexion collective autour d'un thème qui n'est pas sans importance dans les calculs de dimensionnement d'actionneurs ou de freins. L'internet a été un outil assez extraordinaire pour confronter les points de vues, les hypothèses, les tâtonnements, et finalement arriver à une synthèse qui, je l'espère, satisfera tout le monde… ou presque. ■

Pour en savoir plus

Sites internet

- PGM, la liste de diffusion des professeurs de génie mécanique : **http://www.membres.lycos.fr/giti/pgm**
- Les Outils de Speccy : **http://speccy.free.fr./**

Références bibliographiques

- TAILLARD (Philippe) et TEIXIDO (Christian), « **Guide de dimensionnement – Les actionneurs rotatifs et linéaires** », *Technologie,* n° 111, janvier-février 2001
- LAMORA (Jacques), « **Caractéristiques équivalentes d'inertie de mécanismes courants** », *Technologie,* n° 116, novembre-décembre 2001
- ***Le guide de la commande d'axe,*** Technoguide E, éd. Adepa