

Concours Centrale-Supélec 2003

Filière TSI – Sciences industrielles

Étude d'un chariot de golf électrique (corrigé)

La prédétermination des caractéristiques électriques d'une machine tournante débute toujours nécessairement par l'étude mécanique, statique et dynamique, de la charge qu'elle entraîne. C'est une fois seulement que les paramètres caractérisant la charge sont parfaitement identifiés qu'il est possible de choisir et de dimensionner électriquement la machine, puis l'électronique de puissance qui l'alimente en énergie, pour remonter enfin à la partie commande, mêlant étroitement l'électronique

des petits signaux à l'automatique du système. Dans le cas d'un système asservi, on peut alors réellement reboucler sur la partie mécanique afin de conclure quand aux performances globales du système.

On retrouve bien cette démarche dans le sujet de l'École centrale - Supélec de l'an passé, dont nous avons publié l'énoncé dans le précédent numéro et dont nous vous livrons ici une proposition de corrigé.

MOTS-CLÉS postbac, sujet de concours

I. L'ANALYSE DU SYSTÈME EXISTANT

I.A. L'étude des solutions constructives adoptées

I.A.1. Le réducteur à roue et vis

Les grandeurs sur lesquelles il faut intervenir (figure 1) :

- α , l'angle d'hélice de la vis ou pas de la vis ;
- φ' , l'angle de frottement de glissement, apparent, au contact de la roue avec la vis.

Pour qu'un système vis/écrou soit réversible, il faut que l'angle d'hélice soit supérieur à l'angle de frottement, soit une relation à vérifier : $\alpha > \varphi'$.

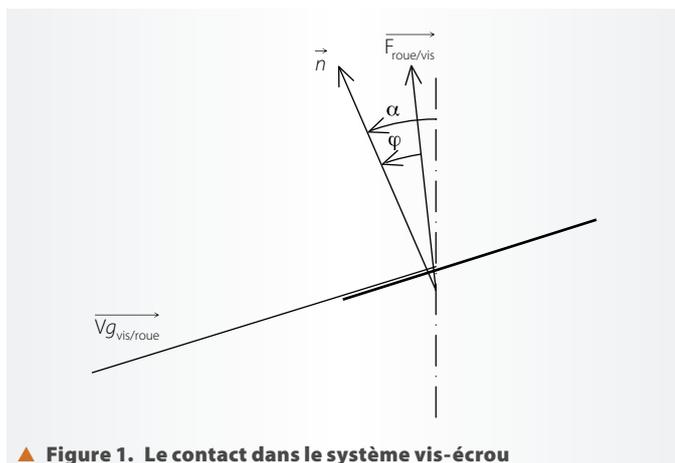
Couple de matériaux : il faut un matériau « dur » (la vis) sur un matériau « moins dur » (la roue). On peut proposer deux solutions :

- vis en acier (E335 ou C40 ou C35 ou 35 CrMo4...) sur roue en bronze (Cu Sn9 P ou Cu Sn12...);
- vis en acier (E335 ...) sur roue en nylon (PA 6/6) sur-moulée sur un insert en acier pour la liaison avec l'arbre de roue.

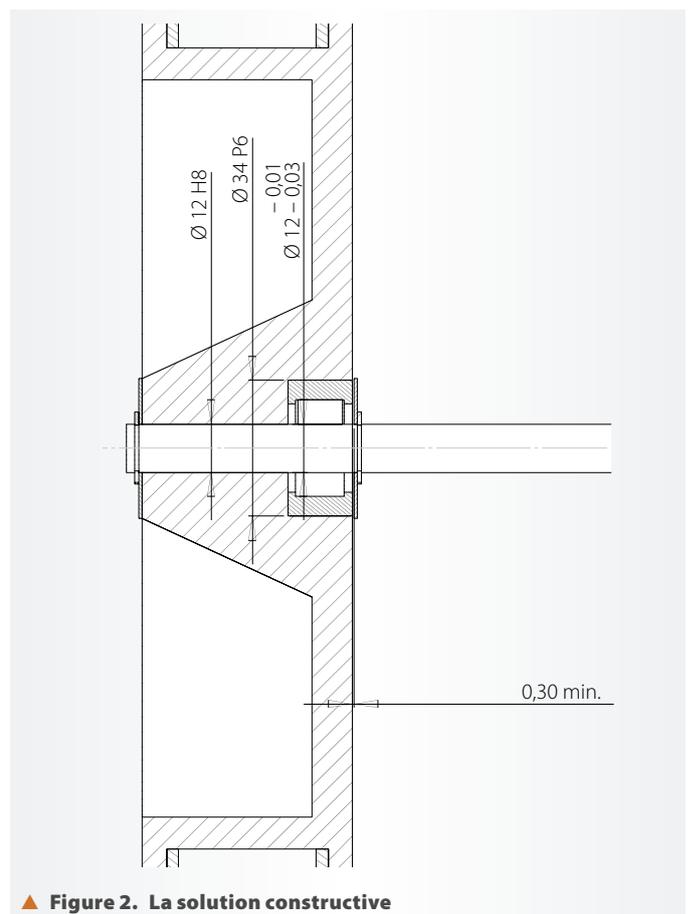
I.A.2. L'orientation du chariot

Les liaisons souhaitées entre l'arbre et la roue :

- en A, pivot d'axe (O, \vec{y}) ;
- en B, encastrement (ou liaison complète).



▲ Figure 1. Le contact dans le système vis-écrou



▲ Figure 2. La solution constructive

Le dessin de conception de la solution constructive pour la liaison de la roue avec l'arbre est donné en figure 2.

I.B. La détermination des paramètres du moteur

I.B.1. La résistance et le coefficient de fém

Pour chaque point du tableau ci-après, on a :

$$E = \lambda \Omega = \lambda \frac{N\pi}{30} = U - R_a I.$$

Tableau de détermination des paramètres du moteur

N (en tr/min)	I (en A)	Cu (en mN.m)	λ (en Vs)	R (en Ω)	Cp (en Nm)
3976	1,6	21	0,028	0,230	0,0237
3858	3,1	66	0,028	0,211	0,0211
3736	4,8	111	0,028	0,229	0,0228
3595	6,6	164	0,028	0,219	0,0210
3483	8,1	205	0,028	0,215	0,0228
3366	9,7	249	0,028	0,221	0,0221
3245	11,3	294	0,028	0,217	0,0236
3105	13,2	347	0,028	0,221	0,0216
2984	14,8	392	0,028	0,219	0,0227
2857	16,5	439			
	Moyenne		0,028	0,220	0,0224

En prenant, par exemple, les points correspondant à la première et à la dixième ligne du tableau, on obtient le système d'équations

$$\lambda \frac{N_1 \pi}{30} = U - R_a I_1$$

$$\lambda \frac{N_{10} \pi}{30} = U - R_a I_{10}$$

dont la résolution donne :

$$R = \frac{U(N_1 - N_{10})}{N_1 I_{10} - N_{10} I_1} \quad \text{puis} \quad \lambda = 30 \frac{U - R I_1}{N_1 \pi}$$

Application numérique : $R = 0,22 \Omega$ et $\lambda = 0,028 \text{ Vs}$.

On peut également mener le même calcul successivement entre deux lignes consécutives, puis en déduire une valeur moyenne de R et de λ.

I.B.2. Le couple de pertes

On calcule le couple de pertes par :

$$C_{rp} = C_{em} - C_u = \lambda I - C_u$$

Pour tous les points du tableau, on trouve

$$C_{rp} = 0,022 \text{ Nm}$$

On peut obtenir ce couple de pertes par un essai à vide à tension d'induit variable. Pour chaque point de mesure, on relève U, I et la vitesse angulaire Ω. On en déduit :

$$C_{rp} = \frac{UI - R_a I^2}{\Omega} \approx \frac{UI}{\Omega}$$

I.C. La détermination des paramètres du variateur de vitesse

I.C.1. L'étude de la commande de grille

Les transistors utilisés ici sont des transistors Mosfet à canal N. Pour créer un canal de type N (les porteurs de charges majoritaires sont donc des électrons), il faut porter la grille à un potentiel positif par rapport à la source (broche de référence). Il s'agit donc d'une commande en tension : la grille ne reçoit du courant que pendant les phases de commutation où il est nécessaire de charger le condensateur grille-source. La fréquence de fonctionnement est assez élevée, jusqu'à quelques centaines de kilohertz.

Le TC 428 permet de fournir pendant les commutations le courant nécessaire à une commutation rapide.

R_{dson} : résistance vue entre *drain* et *source* pendant la phase de conduction transistor à l'état *on*, c'est-à-dire passant et quasi équivalent à un interrupteur fermé.

I.C.2. La détermination du couple de charge

I.C.2.a. La diode est idéale, les chutes de tension aux bornes des transistors sont négligeables.

Pour $a = 0,2$, on a :

$$\langle u \rangle = a U_b = R_a I \quad (\text{car au démarrage } E = 0),$$

$$\text{d'où } I = \frac{a U_b}{R} \text{ puis } C_{em} = \lambda I = \frac{a U_b \lambda}{R} = C_{r0}$$

Application numérique : $C_{r0} = 0,336 \text{ Nm}$.

I.C.2.b. La diode présente une chute de tension de 0,9 V en conduction. On tient compte du paramètre R_{dson} donné précédemment.

Pendant la phase de conduction, la tension aux bornes du moteur est :

$$u = U_b - \frac{R_{dson}}{2} I$$

Pendant la phase de roue libre, la tension aux bornes du moteur est la tension aux bornes de la diode :

$$u = -V_d = -0,9 \text{ V}$$

La tension moyenne est donc :

$$\langle u \rangle = a \left(U_b - \frac{R_{dson}}{2} I \right) - V_d (1-a)$$

Comme précédemment, $\langle u \rangle = R_a I$, d'où :

$$R_a I = a \left(U_b - \frac{R_{dson}}{2} I \right) - V_d (1-a)$$

Ce qui permet de déterminer I :

$$I = \frac{a U_b - V_d (1-a)}{R_a + a \frac{R_{dson}}{2}}$$

$$\text{d'où } C_{r0} = C_{em} = \lambda I = \lambda \frac{a U_b - V_d (1-a)}{R_a + a \frac{R_{dson}}{2}}$$

L'application numérique donne $C_{r0} = 0,231 \text{ Nm}$.

Pour la suite de l'étude, ce couple résistant sera considéré indépendant de la vitesse de rotation, et on prendra $C_{r0} = 0,22 \text{ Nm}$.

I.C.3. La détermination de l'inductance L_a de l'induit du moteur

I.C.3.a. L'expression de la fém E du moteur

$u = E + R_a i + u_L$, or $\langle u_L \rangle = 0$ en régime permanent (voir à ce sujet le corrigé du concours de l'École centrale dans le numéro 123), donc :

$$\langle u \rangle = E + R_a \langle i \rangle + \langle u_L \rangle = E + R_a \langle i \rangle = a U_b - V_{CT} (1-a),$$

d'où $E = a U_b - V_{CT} (1-a) - R_a \langle i \rangle$.

I.C.3.b. L'expression de l'ondulation du courant d'induit

Pendant la phase de conduction des transistors, on a :

$$U_b = E + R_a i + L_a \frac{di}{dt}$$

La solution de cette équation comporte un terme en

$$e^{-\frac{t}{\tau_a}} \quad \text{où } 0 \leq t \leq a T_h \quad \text{et} \quad \tau_a = \frac{L_a}{R_a}$$

Pour que la solution de cette équation différentielle soit assimilable à une droite, il faut pouvoir utiliser le développement limité au premier ordre de l'exponentielle :

$$e^{-\frac{t}{\tau_a}} \approx 1 - \frac{t}{\tau_a}$$

Il faut donc $L_a/R_a \gg T_h$, d'où :

$$U_b - E = R_a i + L_a \frac{di}{dt}$$

En intégrant cette expression pendant la durée d'une phase de conduction des transistors, on trouve

$$\int_0^{a T_h} (U_b - E) dt = \int_0^{a T_h} (R_a i + L_a \frac{di}{dt}) dt,$$

$$\text{soit : } (U_b - E) a T_h = R_a \int_0^{a T_h} i(t) dt + L_a (i(a T_h) - i(0)).$$

Le courant est triangulaire (hypothèse) ; on peut dire que

$$\int_0^{aT_h} i(t)dt = aT_h \langle i \rangle .$$

En remplaçant E par l'expression obtenue ci-dessus, on obtient

$$(U_b - E) aT_h = (U_b - aU_b - V_{CT} (1 - a) + R_a \langle i \rangle) aT_h \\ = R_a aT_h \langle i \rangle + L_a \cdot \Delta I,$$

soit, après simplification et factorisation :

$$(1 - a) (U_b + V_{CT}) aT_h = L_a \cdot \Delta I.$$

On en déduit l'expression de l'ondulation de courant

$$\Delta I = \frac{(U_b + V_{CT}) a (1 - a) T_h}{L_a} = \frac{(U_b + V_{CT}) a (1 - a)}{L_a f_h}$$

et donc ΔI_{\max} obtenu pour $a = 0,5$:

$$\Delta I_{\max} = \frac{U_b + V_{CT}}{4L_a f_h}.$$

I.C.3.c. Exploitation

$$L_h = \frac{U_b + V_{CT}}{4f_h \Delta I_{\max}} = 419 \mu\text{H}.$$

$$L_a/R_a = 2100 \times 10^{-6} \gg T_h = 130 \times 10^{-6}.$$

Quand à R_{dson} , elle intervient en majorant le terme R_a , or R_a n'intervient pas dans le résultat final.

II. L'ÉTUDE DU CAPTEUR DE VITESSE

II.A. La mise en forme du signal

$e(t)$ est une tension rectangulaire de valeur maximale V_{cc} et de valeur minimale V_{cesat} .

La fréquence F est liée à la vitesse du moteur par :

$$F = \frac{N_{\text{moteur}}}{60} \cdot n \cdot \frac{1}{k},$$

où k est le rapport de réduction du réducteur.

Or $200 \text{ tr/min} < N_{\text{moteur}} < 4000 \text{ tr/min}$, donc

$$9,6 \text{ Hz} < F < 192 \text{ Hz}.$$

La vitesse linéaire du chariot est liée à la vitesse du moteur par

$$V = \frac{N_{\text{moteur}} \pi}{30} \frac{1}{k} \frac{d}{2},$$

où d est le diamètre des roues, d'où :

$$0,126 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} < V < 2,51 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

ou encore

$$0,452 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} < V < 9,05 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

II.B. L'étude du convertisseur fréquence-tension

II.B.1. La détermination de la tension interne d'alimentation

En appliquant le théorème de superposition, on peut calculer le potentiel aux bornes de la diode de régulation :

$$U_z = \frac{7,56 \times 120 + 9 \times 10,5}{120 + 10,5} = 7,68 \text{ V}.$$

II.B.2. Le comparateur à hystérésis

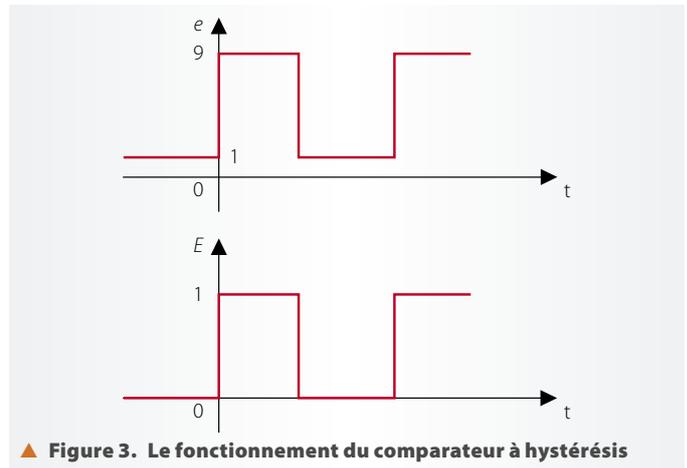
II.B.2.a. Ce montage permet de fixer le potentiel de la borne 11 de LM2917 à 4,5 V grâce au pont diviseur par 2 réalisé avec les deux résistances R7.

II.B.2.b. Un comparateur à hystérésis en entrée permet une meilleure immunité au bruit.

II.B.2.c. L'allure de $e(t)$ et celle de $E(t)$ sont données sur les schémas de la figure 3.

II.B.3. La charge et la décharge de C_2 à durée constante

II.B.3.a. $C_{K1} = E$; $C_{K2} = E \cdot \bar{H} + \bar{E} \cdot B$.



▲ Figure 3. Le fonctionnement du comparateur à hystérésis

II.B.3.b. Pour que u_2 croisse, il faut K1 en 1 et K2 en 1, donc $C_{K1} = 1$ et $C_{K2} = 1$, donc $E = 1$ et $H = 0$.

Pour avoir $H = 0$, il faut $u_2 < U_{2\max} = 3/4 U_z = 6 \text{ V}$.

II.B.3.c. $0 < t < T'$. On a $E = 1$ et $H = 0$, donc $C_{K1} = 1$ et $C_{K2} = 1$ (première ligne de la table de vérité), donc charge de C_2 à courant constant I.

$$u_2 = \frac{I}{C_2} t + u_2(0) = \frac{I}{C_2} t + U_{2\min}.$$

Fin de la charge lorsque à T' , on a

$$u_2(T') = U_{2\max} = \frac{I}{C_2} T' + U_{2\min},$$

$$\text{d'où } T' = C_2 \frac{U_{2\max} - U_{2\min}}{I} = \frac{C_2 U_z}{2I}.$$

À T' , H passe à 1 avec $E = 1$, C_{K2} passe à 0 (dernière ligne de la table), $i_2 = 0$. La tension u_2 n'évolue plus.

II.B.3.d. $t_1 < t < t_1 + T''$. On a $E = 0$ et $B = 0$, donc $C_{K1} = 0$ et $C_{K2} = 1$ (deuxième ligne de la table de vérité), donc décharge de C_2 à courant constant $-I$.

$$u_2 = \frac{-I}{C_2} (t - t_1) + u_2(t_1) = \frac{-I}{C_2} (t - t_1) + U_{2\max}.$$

Fin de la charge lorsque à $t_1 + T''$, on a

$$u_2(t_1 + T'') = U_{2\min} = \frac{-I}{C_2} T'' + U_{2\max},$$

d'où

$$T'' = C_2 \frac{U_{2\max} - U_{2\min}}{I} = \frac{C_2 U_z}{2I} = T'.$$

À $t_1 + T''$, B passe à 1 avec $E = 0$, C_{K2} passe à 0 (troisième ligne de la table), $i_2 = 0$. La tension u_2 n'évolue plus.

II.B.3.e. Les allures de $E(t)$, $i_2(t)$, $u_2(t)$ et $i_3(t)$ sur deux périodes de $E(t)$ sont données en figure 4.

II.B.3.f. Il faut $2T' < T$, donc

$$2T' = \frac{C_2 U_z}{I} < T_{\min} = \frac{1}{F_{\max}},$$

ou encore

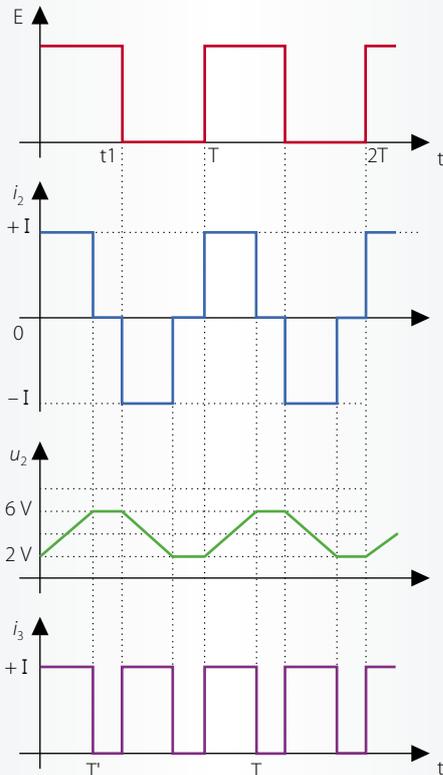
$$C_2 < \frac{I}{U_z F_{\max}} = C_{\max}.$$

Application numérique : $C_{\max} = 112,5 \text{ nF}$.

II.B.4. La charge et la décharge de C_3

II.B.4.a. D'autre part, d'après le graphe précédent de $i_3(t)$,

$$\langle i_3 \rangle = \frac{2IT'}{T}.$$



▲ Figure 4. La charge et la décharge des condensateurs

Donc

$$i_3 = \frac{u_3}{R_3} + C_3 \frac{du_3}{dt}$$

En calculant la valeur moyenne de $i_3(t)$, on a alors :

$$\langle i_3 \rangle = \frac{\langle u_3 \rangle}{R_3} + C_3 \langle \frac{du_3}{dt} \rangle,$$

or

$$\langle \frac{du_3}{dt} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{du_3}{dt} dt = \frac{1}{T} [u_3(T) - u_3(0)] = 0$$

car T est la période de $i_3(t)$. On a donc

$$\langle u_3 \rangle = R_3 \langle i_3 \rangle = 2 R_3 I T' F,$$

d'où : $\beta = 2 R_3 I T'$.

Or, d'après la question précédente, $2 I T' = C_2 U_z$, d'où :

$$\beta = 2 R_3 I T' = R_3 C_2 U_z = 30 \times 10^{-3} \text{ V} \cdot \text{s}.$$

II.B.4.b.

$$R_3 = \frac{\langle u_3 \rangle}{2 I T' F_{\max}}$$

$$\text{Avec } T' = \frac{C_2 U_z}{2I}, \text{ on obtient : } R_3 = \frac{\langle u_3 \rangle}{C_2 U_z F_{\max}} = 37,5 \text{ k}\Omega.$$

II.B.4.c. La fréquence de $i_3(t)$ et donc de $u_3(t)$ est $2 F$ (voir figure 4).

$$\langle i_3 \rangle = \frac{\langle u_3 \rangle}{R_3}; I_{3\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{R_3^2} + (2\pi(2F)C_3)^2} U_{3\text{eff}}$$

où $I_{3\text{eff}}$ et $U_{3\text{eff}}$ représentent les valeurs efficaces des fondamentaux de $i_3(t)$ et de $u_3(t)$. En divisant la deuxième expression par la première, il vient :

$$\Omega_{i_3} = \sqrt{1 + (4\pi F R_3 C_3)^2} \Omega_{u_3}.$$

La condition imposée par l'énoncé implique

$$\sqrt{1 + (4\pi F R_3 C_3)^2} > 40,$$

d'où $(4\pi F R_3 C_3)^2 > 1599$ pour tout F , donc :

$$C_3 > \frac{\sqrt{1599}}{4\pi F_{\min} R_3} = C_{3\text{min}} = 8,48 \mu\text{F}.$$

II.B.4.d. L'ensemble $\{R_3, C_3\}$ constitue un filtre passe-bas du premier ordre. Son rôle est de bloquer la composante alternative de $i_3(t)$ et de transmettre sa composante continue. La tension u_3 obtenue en sortie est donc quasi continue lorsque la vitesse du chariot est constante.

II.B.5. L'étude dynamique du capteur

Si la vitesse du chariot est constante,

$$i_{3e} = \langle i_3 \rangle = 2 I T' F = C_2 U_z F.$$

Si cette vitesse varie de manière sinusoïdale,

$$I_{3e} = C_2 U_z F, \text{ or } I_{3e} = \left(\frac{1}{R_3} + j C_3 \omega \right) U_3.$$

On en tire :

$$\frac{U_3}{F} = \frac{C_2 U_z}{\left(\frac{1}{R_3} + j C_3 \omega \right)} = \frac{C_2 U_z R_3}{(1 + j R_3 C_3 \omega)} = \frac{B_{v10}}{1 + j \tau_v \omega}$$

avec $B_{v10} = C_2 U_z R_3$ et $\tau_v = R_3 C_3$.

Application numérique : $B_{v10} = \beta = 0,03 \text{ Vs}$ et $\tau_v = 0,375 \text{ s}$.

II.B.6. L'étage de sortie

II.B.6.a. Il y a bouclage sur entrée inverseuse, donc l'ALI fonctionne en régime linéaire.

$$e^+ = e^- \Rightarrow u_5 = u_3 = \beta F.$$

Amplification en courant.

II.B.6.b. $F = nV/\pi d = u_5/\beta$ ($n = 72$: nombre d'encoches), d'où

$$u_5 = \beta \frac{nV}{\pi d} = k_T V \text{ avec } k_T = \beta \frac{n}{\pi d}.$$

Application numérique : $k_T = 30 \times 10^{-3} \frac{72}{\pi 0,3} = 2,29$.

II.B.6.c.

$$\underline{B}_v(j\omega) = \frac{B_{v0}}{1 + j \tau_v \omega},$$

avec $B_{v0} = k_T = 2,29 \text{ Vm}^{-1}\text{s}$ et $\tau_v = 0,375 \text{ s}$.

III. L'ASSERVISSEMENT

III.A. La détermination des fonctions de transfert liées au moteur

III.A.1. Le moment d'inertie équivalent ramené à l'axe du moteur

$$J = J_1 + \frac{M V^2}{\Omega^2} = J_1 + M \left(\frac{d}{2k} \right)^2 = 2,38 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

III.A.2 La détermination de $H_{mi}(j\omega)$

À partir des équations aux variations, on écrit en utilisant la transformation complexe :

$$(a) : \underline{U}(j\omega) = \underline{E}(j\omega) + R_a \cdot \underline{I}(j\omega) + L j\omega \underline{I}(j\omega)$$

$$(b) : \underline{E}(j\omega) = \lambda \cdot \underline{\Omega}(j\omega)$$

$$(c) : \underline{C}(j\omega) = \lambda \cdot \underline{I}(j\omega)$$

$$(d) : \underline{C}(j\omega) = J j\omega \cdot \underline{\Omega}(j\omega)$$

(Pour cette dernière relation, le couple résistant n'intervient pas car, étant constant, ses variations sont nulles.)

$$\underline{H}_{mi}(j\omega) = \frac{1}{R_a} \frac{j\omega \tau_m}{1 + j\omega \tau_m + (j\omega)^2 \tau_m \tau_e}$$

$$\text{avec } \tau_m = \frac{J R_a}{\lambda^2} \text{ et } \tau_e = \frac{L_a}{R_a}.$$

Application numérique : $\tau_m = 0,638 \text{ s}$ et $\tau_e = 2 \text{ ms}$.

$$(1 + j\omega \tau_m) (1 + j\omega \tau_e) = 1 + j\omega(\tau_e + \tau_m) + (j\omega)^2 \cdot \tau_e \cdot \tau_m \approx 1 + j\omega \tau_m + (j\omega)^2 \cdot \tau_e \cdot \tau_m$$

car $\tau_e \ll \tau_m \Rightarrow \tau_e + \tau_m \approx \tau_m$.

$$\underline{H}_{mi}(j\omega) = \frac{1}{R_a} \frac{j\omega\tau_m}{(1+j\omega\tau_m)(1+j\omega\tau_e)}$$

III.A.3. La détermination de $\underline{H}_{mv}(j\omega)$

En éliminant le couple moteur entre (c) et (d), on déduit :

$$\underline{H}_{mv}(j\omega) = \frac{\underline{\Omega}(j\omega)}{I(j\omega)} = \frac{\lambda}{Jj\omega} = \frac{\delta}{j\omega} \text{ avec } \delta = \frac{\lambda}{J} = 11,2 \text{ SI.}$$

III.B. L'étude de la boucle de courant

III.B.1. La réalisation du capteur de courant moyen

III.B.1.a. Le capteur de courant instantané

On propose un capteur à effet Hall (qui fournit, après adaptation, une tension de 400 mV par ampère).

III.B.1.b. Le filtre passe-bas

Soit $\underline{V}(j\omega)$ la tension entre le point situé entre les deux résistances R_5 et la masse. Le théorème de Millman nous permet d'écrire :

$$\underline{V}(j\omega) = \frac{\frac{V_i(j\omega)}{R_5} + jC_4\omega \cdot \underline{M}_i(j\omega)}{\frac{1}{R_5} + jC_4\omega + \frac{1}{R_5 + \frac{1}{jC_4\omega}}}$$

La tension sur l'entrée non inverseuse de l'ALI est donc :

$$\underline{V}^+(j\omega) = \frac{1}{jC_4\omega + R_5} \underline{V}(j\omega) = \frac{\frac{V_i(j\omega)}{R_5 jC_4\omega} + \underline{M}_i(j\omega)}{\left(\frac{1}{R_5} + jC_4\omega\right)\left(R_5 + \frac{1}{jC_4\omega}\right) + 1}$$

La tension sur l'entrée inverseuse de l'ALI est :

$$\underline{V}^-(j\omega) = \frac{R_7}{R_7 + R_8} \underline{M}_i(j\omega)$$

Le fonctionnement du montage est linéaire, donc :

$$\underline{V}^-(j\omega) = \underline{V}^+(j\omega)$$

D'où :

$$\underline{B}_{i2}(j\omega) = \frac{\underline{M}_i(j\omega)}{\underline{V}_i(j\omega)} = \frac{k}{1 + (3-k)R_5C_4(j\omega) + (R_5C_4)^2(j\omega)^2}$$

$$\text{avec } \omega_0 = \frac{1}{R_5C_4}, f_0 = \frac{1}{2\pi R_5C_4} \text{ et } z = \frac{1}{2}(3-k).$$

Le système est stable si $z > 0$, donc si $k < 3$; or ici $1 < k < 1,46$.

III.B.1.c. La fonction de transfert du capteur

$$\underline{B}_i(j\omega) = \underline{B}_{i2}(j\omega) \frac{V_i(j\omega)}{I(j\omega)} = \frac{k \cdot 0,4}{1 + 2z \frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Il faut $k \times 0,4 = 8/16$, d'où $k = 1,25$, puis $z = 0,875$.

Il s'agit d'un système du deuxième ordre, donc la pente est de -40 dB/dec.

Pour que la condition soit vérifiée, il faut que

$$\left| \frac{\underline{B}_i(j\omega_h)}{\underline{B}_i(0)} \right| < \frac{1}{10} \text{ où } \omega_h = \frac{2\pi}{T_h}$$

$$\text{donc } \left| 1 + 2z \frac{j\omega_h}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega_h}{\omega_0}\right)^2 \right| > 10$$

$$\text{ou encore } \sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega_h}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2z \frac{\omega_h}{\omega_0}\right)^2} > 10.$$

En posant

$$u = \left(\frac{\omega_h}{\omega_0}\right)^2,$$

on en déduit l'inéquation

$$u^2 + 2(2z^2 - 1)u - 99 > 0.$$

u étant toujours positif, la solution de cette inéquation est

$$u > 9,43, \text{ soit } \omega_0 < \frac{\omega_h}{\sqrt{9,43}}, \text{ or } \omega_0 = \frac{1}{R_5C_4},$$

$$\text{d'où } C_4 > \frac{\sqrt{9,43}}{2\pi R_5 f_h} = 635 \times 10^{-12} \text{ F}$$

III.B.2. Le réglage du correcteur

$$\underline{C}_i(j\omega) = A_i \frac{1 + T_{iD}}{T_{iD}}$$

il s'agit donc d'un correcteur PI.

La FTBO de cette boucle est :

$$\underline{FTBO}(j\omega) = \frac{A_i \mu B_{i0}}{R_a} \frac{1}{(1+j\omega\tau_e)(1+j\omega\tau_i)^2}$$

$$\varphi_{BO} = \text{Arg}(\underline{FTBO}(j\omega)) = -\text{Arc tan } \omega\tau_e - 2 \text{Arc tan } \omega\tau_i.$$

Pour avoir une phase de -125° (il y avait apparemment une erreur dans l'énoncé : on ne peut jamais obtenir $+125^\circ$), par dichotomie :

ω	1 000	10 000	5 000	6 000	5 600	5 610
φ_{BO}	-70,9	-153,2	-120,3	-127,8	-124,9	-125

D'où $\omega_\varphi = 5 610 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Une calculatrice programmable avec *solver* donnera directement le résultat.

Pour avoir une marge de phase de 55° , il faut alors pour cette pulsation $|\underline{FTBO}| = 1$.

$$|\underline{FTBO}| = \frac{A_i \mu B_{i0}}{R_a} \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_\varphi \tau_e)^2} (1 + (\omega_\varphi \tau_i)^2)} = 1,$$

$$\text{d'où } A_i = \sqrt{1 + (\omega_\varphi \tau_e)^2} (1 + (\omega_\varphi \tau_i)^2) \frac{R_a}{\mu B_{i0}} = 3,42.$$

Erreur statique :

$$\frac{100}{1 + \underline{FTBO}(0)} = \frac{100}{1 + \frac{A_i \mu B_{i0}}{R_a}} = 7 \%$$

III.B.3. La détermination d'un premier ordre équivalent

Les éléments identiques à ceux du premier ordre sont :

- la courbe de gain (pente à -20 dB/dec en HF);
- la pente horizontale en BF;
- la phase variant de 0 à -90° .

$$\text{Gain en BF: } 5,4 \text{ dB} \Rightarrow B_{i0} = 10^{\frac{5,4}{20}} = 1,86.$$

Pulsation pour laquelle la phase est de -45° : $7 700 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

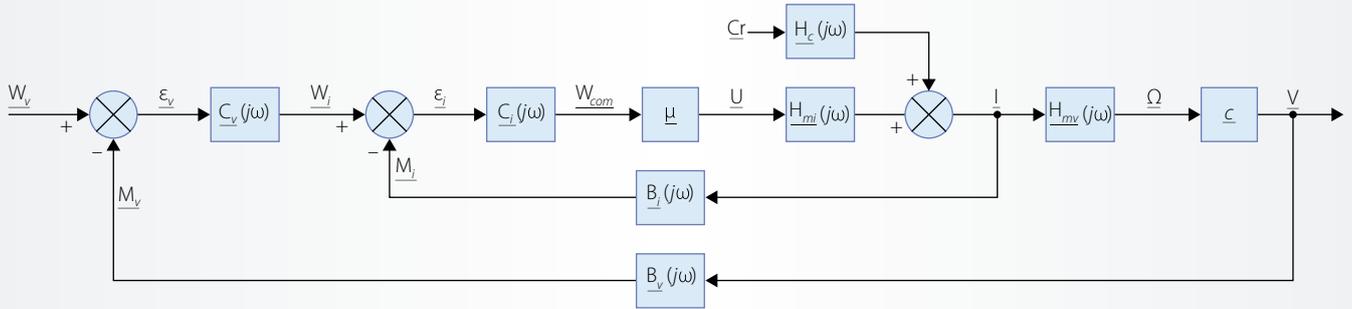
$$\frac{1}{7700} = 130 \mu\text{s} \Rightarrow \tau_n = 130 \mu\text{s}.$$

III.C. L'étude de la boucle principale (boucle de vitesse)

$$V = \frac{\Omega}{k} \frac{d}{2} \Rightarrow c = \frac{d}{2k}.$$

Application numérique : $c = \frac{0,3}{2 \times 25} = 6 \times 10^{-3} \text{ m}.$

$$\begin{aligned} \underline{T}_v(j\omega) &= \underline{C}_v(j\omega) \cdot \underline{F}_i(j\omega) \cdot \underline{H}_{mv}(j\omega) \cdot c \cdot \underline{B}_v(j\omega) \\ &= \frac{A_v \cdot F_{i0} \cdot \delta \cdot c \cdot B_{v0}}{(1+j\tau_n\omega) \cdot j\omega \cdot (1+j\tau_v\omega)} \end{aligned}$$



▲ Figure 5. Schéma fonctionnel prenant en compte l'influence de C_v

$$\underline{T}_v(j\omega) \approx \frac{A_v \cdot F_{i0} \cdot \delta \cdot c \cdot B_{v0}}{j\omega \cdot (1 + j\tau_v \omega)}$$

Déterminons la fonction de transfert en boucle fermée

$$\underline{F}_v(j\omega) = \frac{\underline{V}(j\omega)}{\underline{W}_v(j\omega)}$$

$$\underline{F}_v(j\omega) = \frac{\underline{V}(j\omega)}{\underline{W}_v(j\omega)} = \frac{A_v \cdot F_{i0} \cdot \delta \cdot c}{1 + \underline{T}_v(j\omega)}$$

$$\underline{F}_v(j\omega) = \frac{A_v \cdot F_{i0} \cdot \delta \cdot c \cdot (1 + j\tau_v \omega)}{j\omega \cdot (1 + j\tau_v \omega) + A_v \cdot F_{i0} \cdot \delta \cdot c \cdot B_{v0}}$$

$$\underline{F}_v(j\omega) = \frac{A_v \cdot F_{i0} \cdot \delta \cdot c}{A_v \cdot F_{i0} \cdot \delta \cdot c \cdot B_{v0}} \cdot \frac{(1 + j\tau_v \omega)}{1 + \frac{j\omega \cdot (1 + j\tau_v \omega)}{A_v \cdot F_{i0} \cdot \delta \cdot c \cdot B_{v0}}}$$

$$\underline{F}_v(j\omega) = \frac{1}{B_{v0}} \cdot \frac{(1 + j\tau_v \omega)}{1 + 2z' \frac{j\omega}{\omega'_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega'_0}\right)^2}$$

$$\text{avec } \omega'_0 = \sqrt{\frac{A_v \cdot F_{i0} \cdot \delta \cdot c \cdot B_{v0}}{\tau_v}}$$

$$\text{et } z' = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{A_v \cdot F_{i0} \cdot \delta \cdot c \cdot B_{v0} \cdot \tau_v}}$$

$$\text{donc: } A_v = \frac{1}{4 \cdot z'^2} \frac{1}{F_{i0} \cdot \delta \cdot c \cdot B_{v0} \cdot \tau_v}$$

Application numérique: $A_v = 4,2$.

Les avantages de ce réglage : dépassement très faible, temps de réponse minimal.

L'erreur statique est nulle car il s'agit d'un système de classe 1.

III.D. L'influence d'une variation du couple résistant

La modification du schéma fonctionnel est proposée en figure 5, avec

$$\underline{H}_c(j\omega) = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{1 + j\omega\tau_m + (j\omega)^2 \tau_m \tau_e}$$

Une variation de la pente occasionnera une variation de vitesse. En effet, si on étudie la réponse du système à un échelon de couple résistant, à consigne vitesse constante, cela revient à faire, dans le schéma fonctionnel précédent, $\underline{W}_v = 0$. La réduction du schéma fonctionnel mène à :

$$\frac{\underline{V}(j\omega)}{\underline{C}_r(j\omega)} = \frac{\underline{H}_c(j\omega)}{\frac{j\omega}{c \cdot \delta} + \frac{A_i \mu}{R_a (1 + \tau_e j\omega)} \left(A_v \underline{B}_v(j\omega) + \frac{j\omega}{c \cdot \delta} \underline{B}_i(j\omega) \right)} = \underline{H}_{cf}(j\omega)$$

Quand ω tend vers 0, $\underline{H}_{cf}(j\omega)$ tend vers

$$\underline{H}_{cf0} = \frac{R_a}{\lambda A_i \mu A_v B_{v0}}$$

Un échelon d'amplitude C_{r0} sur le couple occasionnera donc une variation

$$\frac{R_a}{\lambda A_i \mu A_v B_{v0}} C_{r0}$$

de la vitesse du chariot. Il faudra donc remplacer le correcteur $\underline{C}_v(j\omega)$ proportionnel par un correcteur PI. ■