

Confrontation RdM-MMC: une démarche expérimentale de validation

LUC CHEVALIER, BUMEDIJEN RAKA¹

L'étude des déformations, notamment celles des pièces élancées, peut-être faite par une modélisation soit de type RdM soit de type MMC. Néanmoins, les résultats obtenus dans les deux cas diffèrent toujours quelque peu. Les auteurs de cet article proposent donc, à travers trois expérimentations, de mettre en évidence et de caractériser ces écarts de résultats. Confrontation de deux modélisations, mais aussi confrontation du modèle au réel.

MOTS-CLÉS mécanique, élasticité, résistance des matériaux, modélisation

Certaines géométries de pièces se prêtent à plusieurs types de modélisation. Dans le cas de formes élancées et régulières, deux d'entre eux peuvent être envisagées : la théorie des poutres (souvent appelée RdM) et la théorie générale de l'élasticité (souvent appelée MMC). Dans chacun de ces deux cas, des informations plus ou moins fines sur la nature des déformations et des contraintes peuvent être obtenues : l'objectif du travail proposé est de confronter les deux théories aux analyses expérimentales.

Nous mettrons en œuvre les démarches expérimentales par jauges de déformations (approche locale), par mesure de champs de déplacement (approche globale), par photoélasticité et par la méthode des éléments finis. Ce travail est proposé aux étudiants de l'IUP Génie des systèmes industriels de Marne-la-Vallée ; il sert aussi de support à la formation en génie mécanique de l'école Ingénieurs 2000. Les étudiants sont amenés à utiliser les différentes techniques citées plus haut et à en faire la synthèse dans un compte rendu. Pour ce faire, les différents binômes passent lors des 4 heures sur les quatre sites suivants :

- Site 1 : machine de traction et mesure par jauges (photo 1)
- Site 2 : machine de traction et mesure par caméra CCD (photo 2)



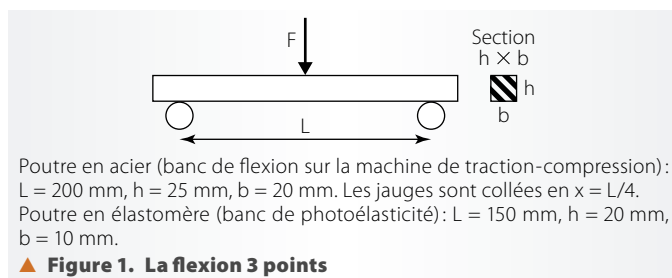
Photo 1. Le montage de flexion 3 points

Photo 2. La machine d'essai et la caméra CCD

Photo 3. Le banc de photoélasticité

- Site 3: banc de photoélasticité (photo 3)
- Site 4: poste informatique avec logiciel (RDM6)

La situation retenue pour cette confrontation est un problème de flexion 3 points (figure 1).



L'étude préalable : solution analytique RdM

Dans les questions qui suivent, on exploitera la symétrie du montage et on se focalisera sur l'étude de la première moitié de la poutre. On se place dans le cadre de la RdM.

- Préciser les actions aux appuis en fonction de F et déterminer le diagramme des moments fléchissants et celui des efforts tranchants dans la poutre.

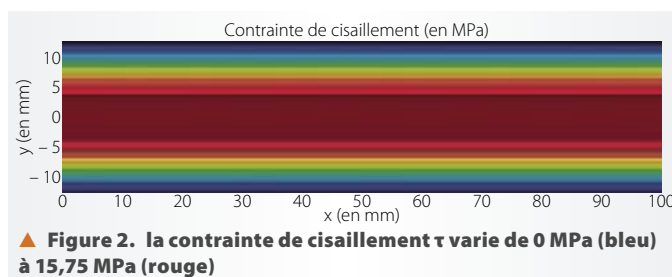
Chaque appui encaisse la moitié de la charge F ; sur le tronçon [0, L/2], le moment fléchissant évolue linéairement de 0 à FL/4 alors que l'effort tranchant est constant et vaut F/2. Sur la seconde moitié de la poutre, le moment fléchissant décroît jusqu'à 0 alors que l'effort tranchant, toujours constant, vaut - F/2.

- Donner l'allure des contraintes de cisaillement τ ainsi que des contraintes longitudinales σ dans la poutre. On tracera l'allure des courbes isocontraintes σ et τ .

Dans le cadre de l'hypothèse de la contrainte de cisaillement parabolique, l'expression de cette dernière est :

$$\tau = \frac{T}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \Rightarrow \tau = \frac{3F}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

On visualise en figure 2 les lignes de niveau sur le tronçon [0, L/2] ; les calculs sont effectués avec F = 10 500 N. La variable x n'intervient pas dans l'expression de τ , les lignes de niveau sont des droites parallèles à l'axe x.



¹ Respectivement, professeur des universités (Marne-la-Vallée), ingénieur Cnam, responsable des essais au LMT de Cachan.

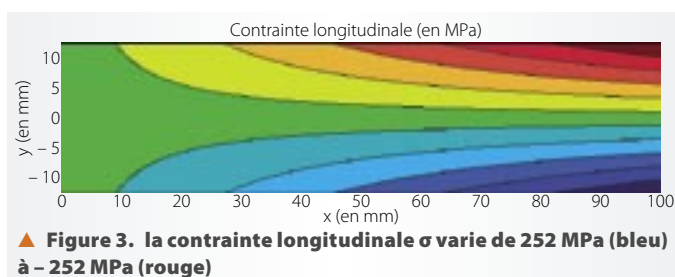
Résultat classique de la RdM en flexion, la contrainte longitudinale vaut :

$$\sigma = \frac{M_f}{I} y \Rightarrow \sigma = \frac{6F}{bh^3} xy.$$

On visualise en figure 3 les lignes de niveau sur le tronçon $[0, L/2]$; les calculs sont aussi effectués avec $F = 10\,500\text{ N}$. Cette fois la variable x intervient explicitement dans l'expression de σ . Pour déterminer l'allure d'une courbe de niveau, il faut écrire l'équation :

$$\sigma = c^{le} = \sigma_0 \Rightarrow y = \frac{bh^3 \sigma_0}{6Fx}.$$

Les lignes de niveau sont donc des hyperboles.



On peut noter que σ varie dans une amplitude bien plus large que τ , ce qui est un résultat classique de la RdM pour les poutres élancées. Cependant les deux composantes ne sont pas maximales aux mêmes points de la poutre.

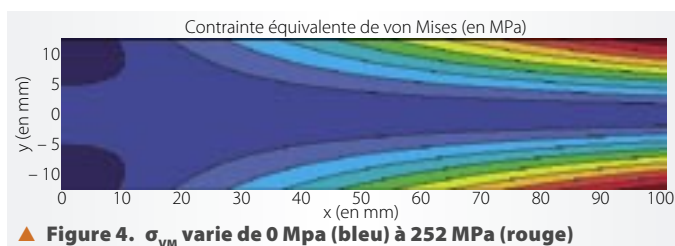
● *Calculer la contrainte équivalente de von Mises dans cette section et déterminer la force F maximale en fonction de la géométrie et de la limite élastique σ_e . Quelle est la section droite la plus sollicitée ? σ_e de l'acier est estimé à 250 Mpa.*

En RdM, l'expression de la contrainte de Von Mises est donnée par la relation :

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}.$$

La figure 4 montre l'allure des isocontraintes de von Mises. La section la plus sollicitée est clairement la section de droite qui correspond au centre de la poutre. Les points les plus fortement chargés sont les faces supérieure et inférieure. Sur ces faces, la contrainte τ est nulle et σ vaut :

$$\sigma = \frac{6FL}{bh^3} \frac{h}{2} = \frac{3FL}{2bh^2} \leq \sigma_e \Rightarrow F_{max} = \frac{2bh^2}{3L} \sigma_e = 10\,500\text{ N}.$$



On cherche à comparer la solution précédente à la solution MMC du problème. Pour cela, on suppose que la forme RdM de la contrainte σ_{xx} est correcte de part et d'autre de F et on demande :

● *En intégrant les équations d'équilibre sur chaque tronçon, déterminer la forme de σ_{xy} et comparer avec le résultat de la modélisation précédente. Conclure.*

La première relation d'équilibre donne :

$$\frac{f\sigma_{xx}}{f_x} + \frac{f\sigma_{xy}}{f_y} = 0 \Rightarrow \frac{f\sigma_{xy}}{f_y} = -\frac{6F}{bh^3} y \Rightarrow \sigma_{xy} = -\frac{6F}{bh^3} \frac{y^2}{2} + c^{le}.$$

Cette constante est telle que la contrainte σ_{xy} s'annule en $y = h/2$ et $y = -h/2$ afin de respecter la condition de bord libre.

On aboutit ainsi à la même expression que celle de τ proposée plus haut :

$$\sigma_{xy} = \frac{3F}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

● *Déterminer les contraintes principales en tous points de la poutre et étudier l'influence de la contrainte σ_{xy} sur le résultat. On déterminera les directions principales associées à chaque contrainte principale.*

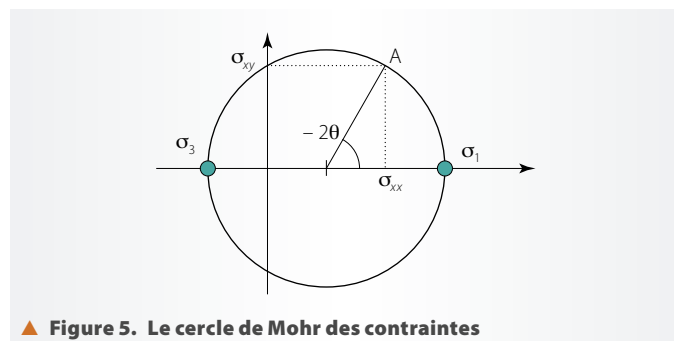
Les contraintes principales sont obtenues par diagonalisation de la matrice des contraintes, soit :

$$\det \begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \lambda & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = \frac{\sigma_{xx} + \sqrt{\sigma_{xx}^2 + 4\sigma_{xy}^2}}{2} \\ \sigma_2 = 0 \\ \sigma_3 = \frac{\sigma_{xx} - \sqrt{\sigma_{xx}^2 + 4\sigma_{xy}^2}}{2} \end{cases}.$$

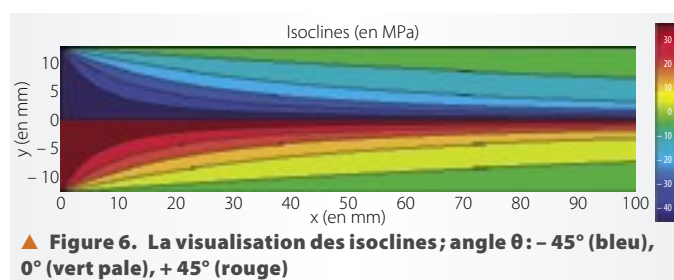
La plus forte valeur de σ_{xx} est de 250 MPa, alors que la plus forte valeur de σ_{xy} n'est que de 16 MPa, soit environ 15 fois moins. Sous la racine, le terme en σ_{xx} est donc prépondérant devant celui en σ_{xy} . Cependant, les maxima de ces deux expressions n'étant pas atteints aux mêmes positions dans la poutre, on ne peut pas négliger purement et simplement le cisaillement, prépondérant sur la fibre « neutre ».

Sans cisaillement, la première direction principale serait X, et les deux autres Y et Z. Mais compte tenu de l'existence du cisaillement, la première direction principale est inclinée d'un angle θ par rapport à X. Dans le cercle de Mohr correspondant au plan principal XY, le point caractéristique A de la base naturelle XY est repéré sur le cercle par un angle -2θ (figure 5). Cet angle est obtenu par :

$$\tan(-2\theta) = \frac{\sigma_{xy}}{\frac{\sigma_{xx}}{2}} \Rightarrow \theta = -\frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}} \right)$$

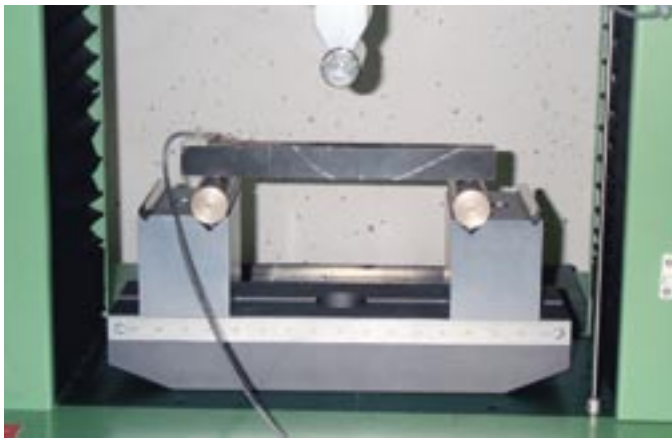


La figure 6 représente les isoclines : elles indiquent que θ vaut $\pm 45^\circ$ sur la fibre « neutre » (là où le cisaillement est seul présent) ; θ vaut 0° sur les parois supérieure et inférieure de la poutre. Le passage de 0 à $\pm 45^\circ$ est d'autant plus rapide que l'on se situe sur la gauche de la poutre (là où la flexion est la plus faible).



La mesure par jauges extensométriques

Les deux activités « site 2 » et « site 3 » se font sur une poutre à section carrée en acier. Cette poutre est sur le banc de flexion 3 points de la machine de traction Deltalab (photo 4) ; plusieurs niveaux de charge sont conseillés pour lisser les résultats expérimentaux.



▲ Photo 4. Le montage de flexion, avec les jauges collées sur les faces supérieure et inférieure de la poutre

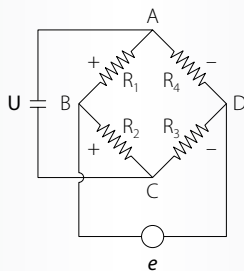
- Le module de Young et le coefficient de Poisson de l'acier d'aluminium sont estimés respectivement à $E = 210\,000$ MPa et $\nu = 0,3$. Déterminer la charge maximale à ne pas dépasser pour éviter la plastification. Quel est l'ordre de grandeur de la déformation longitudinale correspondant au niveau des jauges longitudinales ?

Dans la première partie, on a calculé une charge maximale de 10 500 N pour ne pas dépasser la contrainte élastique de 250 MPa. Sur la face inférieure, la contrainte σ est donc de 125 MPa au niveau de la jauge. D'où une déformation négative sur la face supérieure et une déformation positive sur la face inférieure. Les deux sont égales, en valeur absolue, à $\varepsilon = 125/210\,000 = 0,059\%$.

- Effectuer le montage en demi-pont des deux jauges collées sur les faces supérieure et inférieure de la poutre. Expliquer pourquoi un tel montage permet de déterminer le double de la déformation de la jauge étirée.

Le montage d'un pont de Wheatstone alimenté par une tension U (figure 7) permet de mesurer les variations relatives de résistance des branches, suivant la relation :

$$e = \frac{U}{4} \left(\frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_4}{R_4} \right).$$



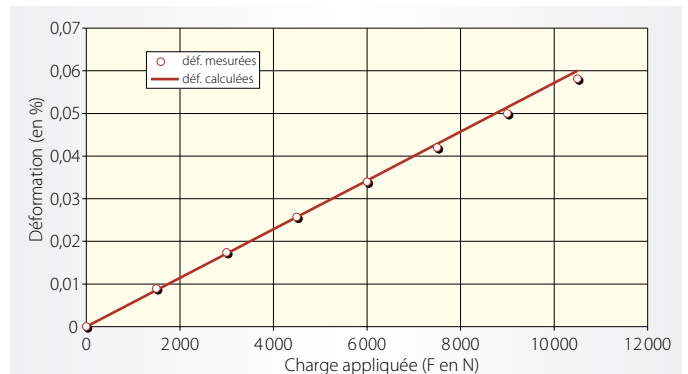
▲ Figure 7. Le montage en pont de Wheatstone des jauges

En branchant une jauge à fil de facteur K à la place de la résistance R_1 et une seconde à la place de la résistance R_2 , la tension e s'écrit :

$$e = \frac{KU}{4} (\varepsilon - (-\varepsilon)) = \frac{KU}{2} \varepsilon \rightarrow \varepsilon = 2e/KU.$$

- Programmer un chargement en cinq étapes entre l'effort nul et l'effort maximal estimé au premier point de ce paragraphe (on prendra un coefficient de sécurité de 2 pour éviter tout risque de surcharge). Relever les déformations des deux jauges, et tracer ces valeurs en fonction de la charge F d'une part et de la contrainte calculée pour cette section. En déduire une identification du module E , et comparer avec la valeur proposée ci-dessus.

Sur le graphique de la figure 8, on a représenté les déformations mesurées en superposition avec les déformations calculées. La corrélation entre résultats théoriques et expérimentaux paraît bonne. Cela ne doit pas nous surprendre : la jauge est collée à mi-distance entre le point d'appui et le point d'application de la charge, c'est-à-dire dans une zone régulière.

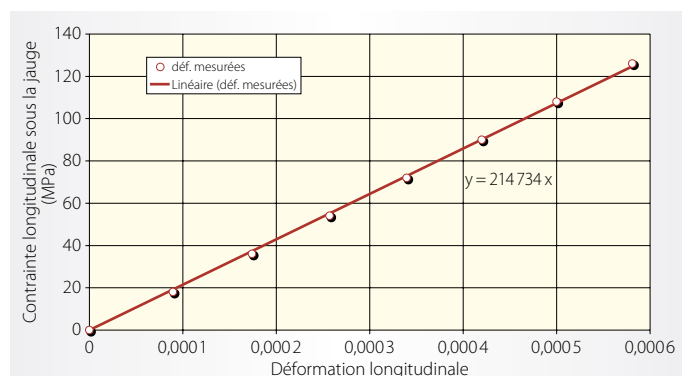


▲ Figure 8. La comparaison des déformations calculées et de celles mesurées par jauge

Les mêmes déformations tracées en fonction de la contrainte calculée sous la jauge (voir « L'étude préalable ») présentent un caractère très linéaire (figure 9). Une régression des moindres carrés montre une corrélation de 0,9997 et permet d'identifier le module de Young E qui correspond à la pente :

$$E = 214\,734 \text{ MPa},$$

soit une valeur très proche, à 2,4 % près, de celle proposée dans l'énoncé.

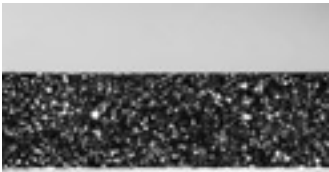


▲ Figure 9. La relation entre contrainte, module de Young et déformations mesurées par jauge

La mesure par analyse d'images

Les deux activités « site 1 » et « site 2 » se font sur une poutre à section carrée en acier. Cette poutre est installée sur le banc de flexion 3 points de la machine de traction Deltalab. Le binôme du site 2 n'intervient pas dans la programmation du chargement et se concentre sur le réglage de la caméra CCD.

- On placera la caméra dans l'axe de la normale à la face plane mouchetée de la poutre (photos 5 et 6). On effectuera la mise en place de l'éclairage et le réglage de la netteté en cadrant au plus près du mouchetis au voisinage du point d'application de la charge.



◀ **Photo 5. Le barreau préparé pour la mesure par caméra : un mouchetis est réalisé sur la face avant du barreau**



▲ **Photo 6. On suit ce mouchetis au cours de la déformation grâce à la caméra CCD**

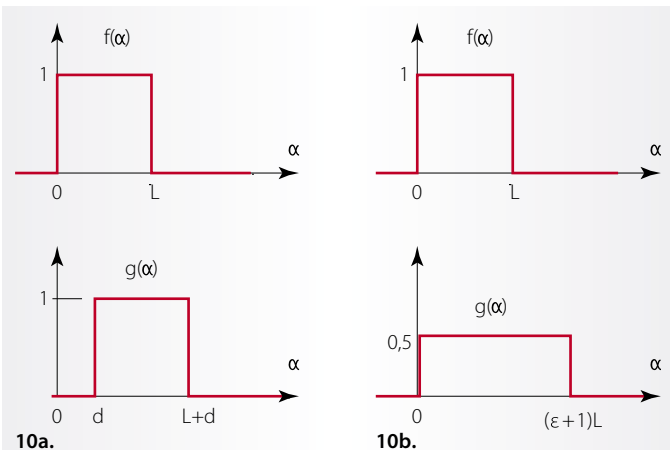
Le principe de la méthode de mesure du champ de déplacement par autocorrélation d'images consiste à rechercher dans l'image de l'échantillon déformé le même mouchetis que dans l'image de référence. Un point de coordonnées (x, y) de l'image initiale est caractérisé par une valeur $f(x, y)$ qui représente son niveau de gris. Cette valeur est comprise entre 0 et 255. Après déformation, le point (x, y) se trouve en (X, Y) tel que :

$$X = x + u(x, y) \text{ et } Y = y + v(x, y).$$

Pour déterminer les composantes u et v du déplacement du point (x, y) par analyse d'images, on compare la fonction $f(x, y)$ de l'image de référence avec la fonction $g(x, y)$ de « niveau de gris » de l'image déformée. On montre que la fonction de corrélation $C(x, y)$ définie par

$$C(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha, \beta) \cdot g(\alpha + x, \beta + y) d\alpha d\beta$$

est maximale pour $x = u$ et $y = v$. La recherche du maximum du coefficient de corrélation permet de déterminer le déplacement d'un point (x, y) . On illustre sur un cas unidimensionnel par l'exemple d'un motif de type « échelon » que l'on a décalé sans déformation d'une valeur d (figure 10a), et déformé d'une valeur ϵ (figure 10b).



▲ **Figure 10. La modification d'un point de l'image**

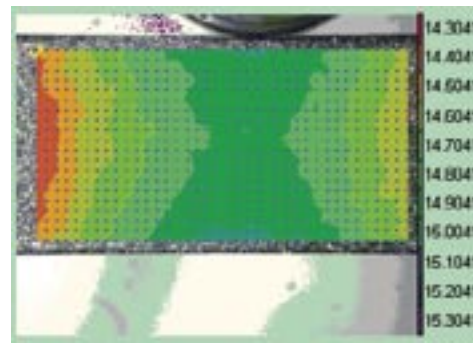
Il est facile de montrer que, dans le cas de gauche, $C(x)$ est une fonction qui présente un maximum en $x = d$. C'est le déplacement du motif initial. Dans le cas de droite, $C(x)$ présente un plateau dont le centre est en $x = \epsilon L/2$. Là encore, il s'agit du déplacement moyen du motif.

- *Faire l'acquisition d'une image de référence (au format BMP) juste avant de lancer l'essai. Ensuite, à chaque temporisation de l'essai, faire l'acquisition de l'image de l'éprouvette déformée correspondante.*

On a relevé 7 images (une pour chacun des points de la partie précédente, plus l'image de référence).

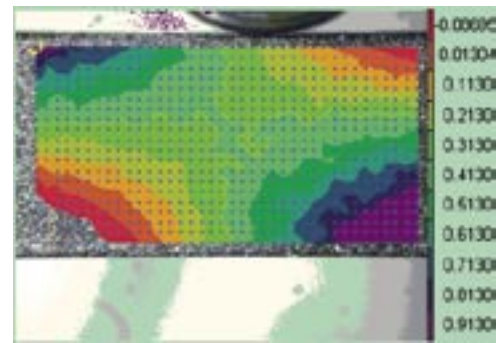
- *Sous Matlab, à l'aide de l'application Correl^{CD} (lire l'encadré « Référence logicielle »), faire l'analyse des champs de déplacement pour chacune des images déformées. Pour s'assurer de la fiabilité des résultats obtenus, on fera varier les paramètres de l'application (pas, taille de masque, précision).*

Après un choix judicieux des paramètres du logiciel (zone d'étude dans l'image, définition du pas de la grille initiale dans cette zone, définition de la taille du motif autour de chaque nœud de la grille pour effectuer la corrélation), on obtient les déplacements en chaque point de la grille initiale (points bleus).



◀ **Photo 11. Le déplacement vertical en pixels obtenu grâce à la caméra CCD**

▶ **Photo 12. Le déplacement horizontal en pixels**



Les isodéplacements dans la direction verticale et la direction horizontale sont donnés en figures 11 et 12 pour la 7^e image. Elle correspond à la charge F de 10 500 N. On constate que les sections droites se déplacent pratiquement comme un corps solide. Dans la section centrale, le déplacement relevé est de 14,9 pixels. Sachant que les 25 mm de hauteur correspondent à 740 pixels, cela fait une flèche mesurée au centre de 0,5 mm. La RdM permet le calcul de la flèche au centre, qui vaut :

$$f = \frac{FL^3}{48 EI} = 0,32 \text{ mm.}$$

Le tassement des appuis peut être à l'origine de la divergence entre valeur théorique et expérimentale. Néanmoins, pour une zone proche de l'application de la charge, on peut s'attendre à des divergences entre pratique et théorie.

On constate la forme antisymétrique du déplacement horizontal et une certaine proportionnalité du déplacement par rapport à la hauteur dans une section donnée. Cela traduit

Rappel d'optique pour la photoélasticimétrie

- L'indice de réfraction d'un milieu est le rapport de vitesses dans le vide et dans le matériau (transparent).
- La propagation: Sous sa forme la plus simple, la lumière se propage par ondes sinusoïdales (figure 1). La lumière est une onde qui peut être représentée sous une forme très simple, par une grandeur vectorielle sinusoïdale, en phase et perpendiculaire (à E et H). La distribution dans l'espace est hélicoïdale le long de l'axe de propagation.

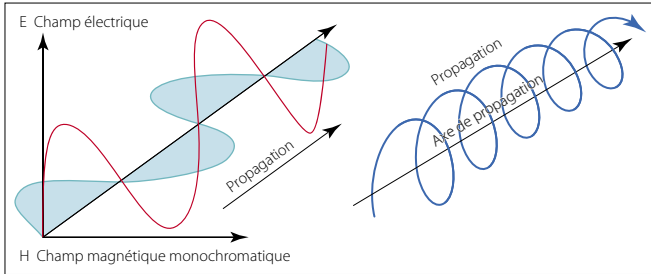


Figure 1. La propagation plane et la distribution hélicoïdale de la lumière

- La longueur d'onde d'un rayonnement monochromatique est caractérisée par sa couleur. La lumière blanche visible comprend toutes les longueurs d'ondes comprises entre les valeurs $0,7 \mu\text{m}$ et $0,4 \mu\text{m}$. Les couleurs forment, dans l'ordre décroissant de leur longueur d'onde, un spectre passant progressivement par le rouge, l'orangé, le jaune, le vert, le bleu, l'indigo et le violet.
- La polarisation de la lumière est faite à l'aide d'un filtre appelé polarisant, qui laisse passer une seule composante de la lumière parallèle à une direction fixe dite axe de polarisation. Deux filtres successifs à axes parallèles laissent passer la lumière dans sa quasi-totalité; en revanche, lorsque les axes de ces filtres sont croisés (perpendiculaires), il y a extinction de la lumière.
- Le phénomène de biréfringence peut se caractériser de la façon suivante: si une lumière plane se présente suivant une direction de polarisation quelconque par rapport aux axes du corps biréfringent, à l'intérieur du corps tout se passe comme si elle était décomposée en deux ondes perpendiculaires qui

progressent avec des vitesses de propagation différentes. À la sortie du corps, deux ondes PX et PY se trouvent en présence avec des directions de polarisation perpendiculaires dont l'une est en retard par rapport à l'autre, mais qui progressent de nouveau à la même vitesse. Ce retard optique δ est une caractéristique du phénomène de biréfringence.

- La biréfringence accidentelle: La plupart des corps transparents, isotropes, normalement non biréfringents, le deviennent quand ils sont soumis à des déformations ou des contraintes. Cette biréfringence accidentelle est telle que les axes de biréfringence coïncident avec les axes principaux des contraintes. C'est ce phénomène qui est utilisé en photoélasticimétrie.
- Les couleurs primaires: Les trois couleurs primaires de la synthèse additive sont le rouge (R), le vert (V) et le bleu (B). Superposées deux à deux, elles donnent les couleurs primaires de la synthèse soustractive: jaune (J), cyan (C) et magenta (M). La superposition des trois primaires donne du blanc (B).
- La photoélasticimétrie par transmission: C'est la technique utilisée dans le TP. On réalise une reproduction plane de la forme à étudier découpée dans un matériau photoélastique d'épaisseur e . Ce modèle est chargé et observé par transparence entre deux filtres polarisants (figures 2 et 3).

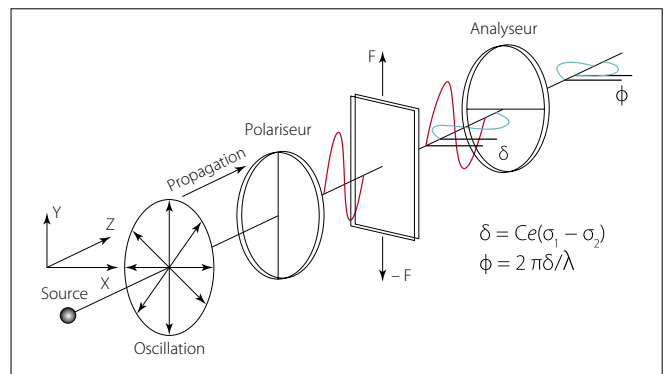


Figure 2. La photoélasticimétrie par transmission

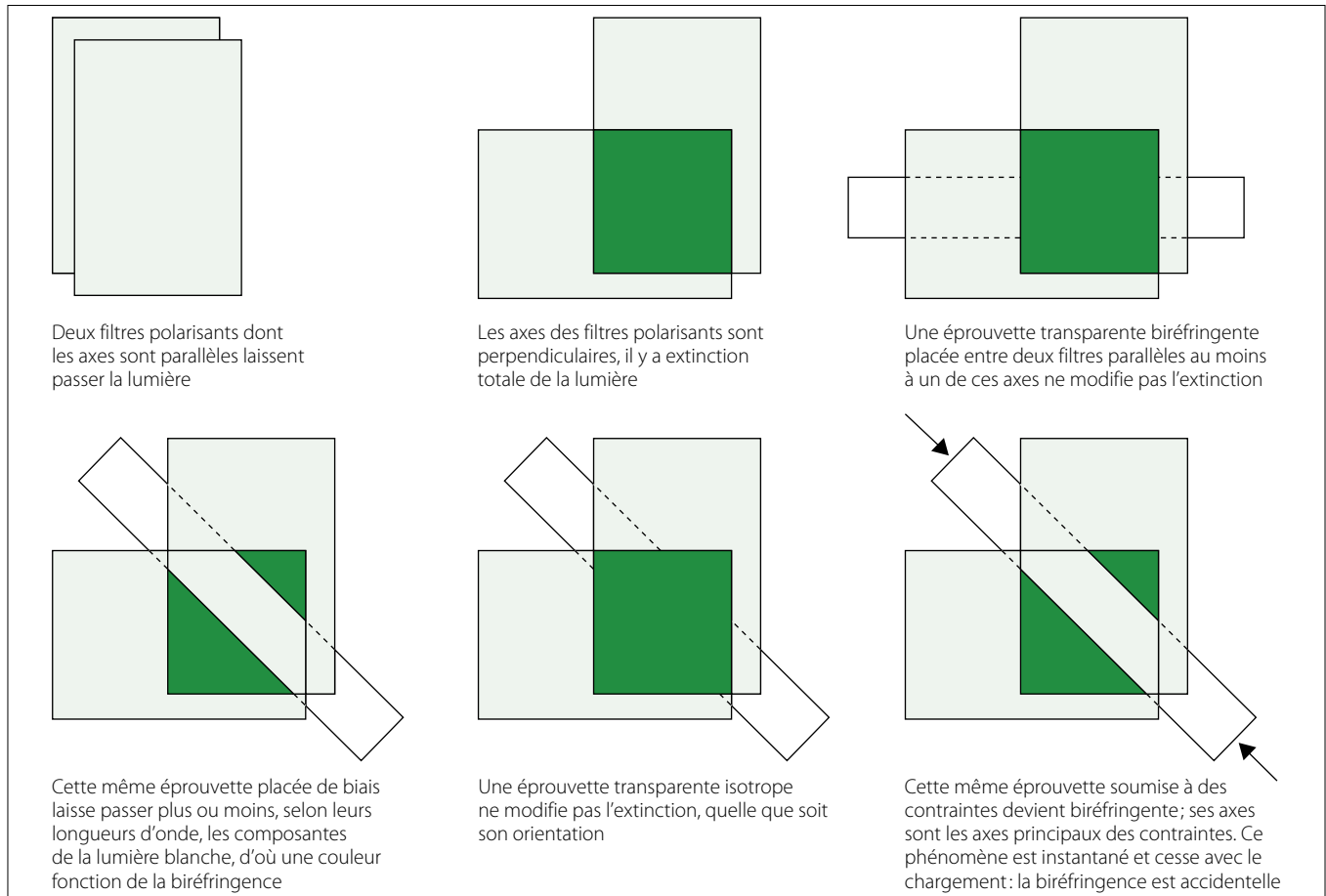


Figure 3. Illustration des différentes observations

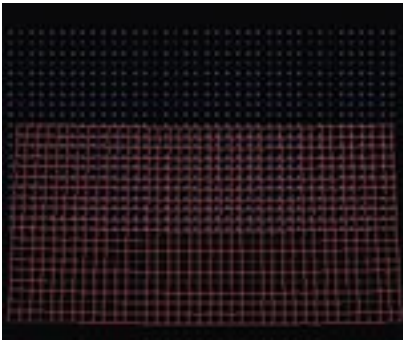


Figure 13. Grille déformée (en rouge) : les nœuds de cette grille correspondent aux points bleus sur l'image initiale. À l'issue de la corrélation, ces points sont reconnus dans l'image déformée et la grille relie ces points déplacés

assez correctement l'hypothèse de rotation sans gauchissement des sections droites, comme le montre la grille déformée de la figure 13. Le déplacement y a été grossi d'un facteur 20 par rapport aux valeurs effectives.

La mesure par photoélasticité

La photoélasticimétrie recouvre l'ensemble des techniques de caractérisation et de mesure de la photoélasticité ; c'est principalement une méthode d'analyse optique des contraintes subies par les solides (voir annexe). Les techniques de mesures par photoélasticité sont fondées sur des principes classiques de la physique, de la mécanique (MMC, mécanique des milieux continus) et de l'optique. Quand un matériau isotrope est soumis à des contraintes mécaniques, il devient anisotrope. Dans le cas d'un matériau initialement isotrope transparent (le cas de l'éprouvette en résine Columbia), la longueur des ondes de la lumière

polarisées parallèlement à la contrainte ou perpendiculairement à cette même contrainte ne sont plus les mêmes : le matériau est devenu biréfringent.

La loi de Maxwell lie les contraintes et la biréfringence accidentelle du modèle photoélastique :

$$\delta = Ce(\sigma_1 - \sigma_2).$$

C est une constante caractéristique du matériau photoélastique considéré. Elle est exprimée en brewsters : 1 brewster = $10^{-12} \text{ m}^2/\text{N}$ (ou en Pa^{-1}). À ce retard optique correspond un retard de phase ϕ tel que :

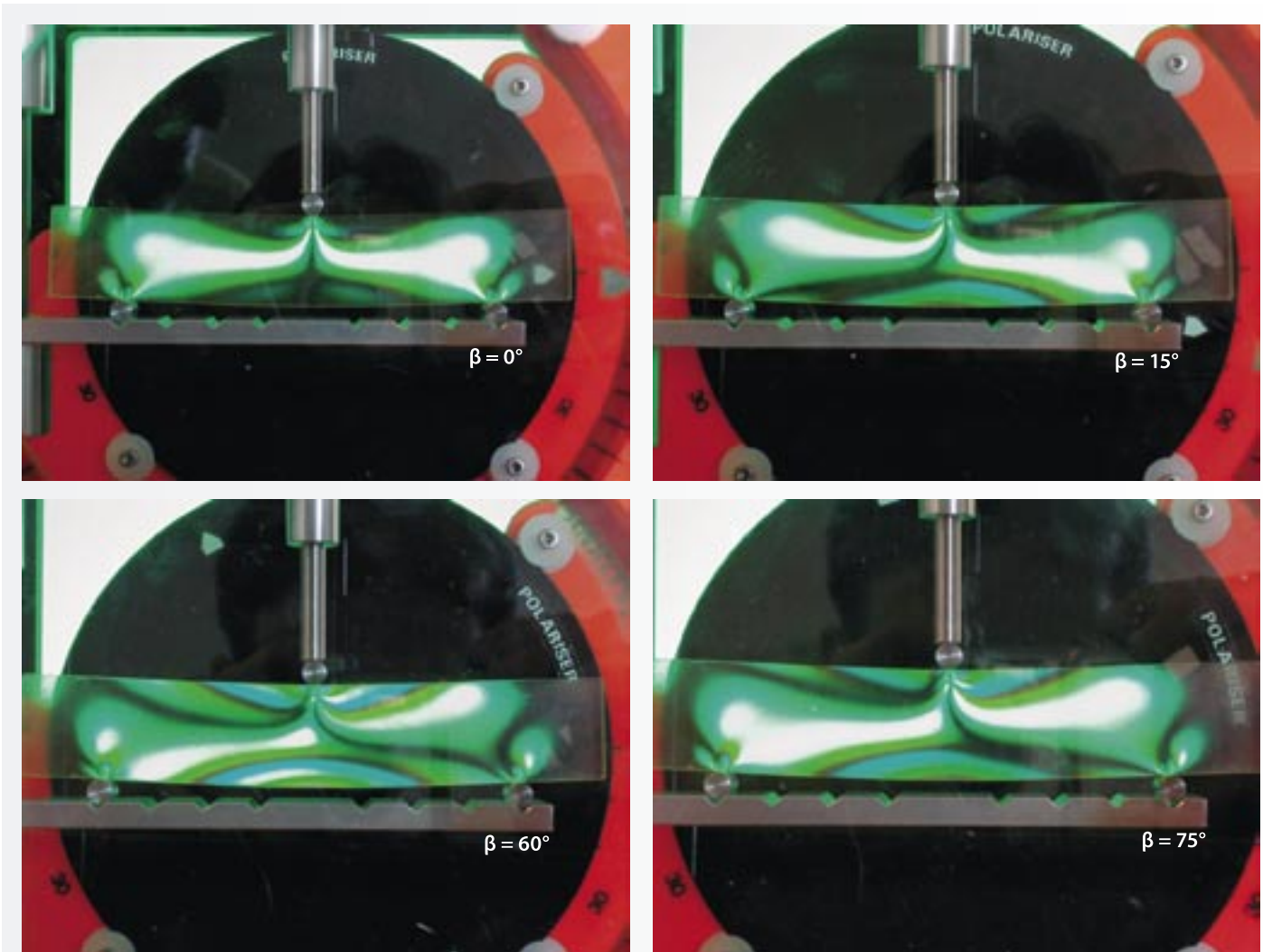
$$\phi = 2 \pi \delta / \lambda.$$

λ est la longueur d'onde de la radiation monochromatique utilisée, β l'angle entre les directions principales des contraintes et les axes de polarisation. On peut montrer que l'intensité I lumineuse transmise a pour expression (à un facteur constant près) :

$$I = I_0 \sin^2 2\beta \sin^2 \phi / 2 = I_0 \sin^2 2\beta \sin^2 \pi \delta / \lambda.$$

Cette intensité est nulle pour $\sin 2\beta = 0$: les lieux d'extinction correspondants sont les **isoclines**. La condition $\sin 2\beta = 0$ en un point de l'éprouvette signifie qu'en ce point les directions des contraintes principales sont parallèles aux deux directions perpendiculaires de polarisation du polariseur et de l'analyseur. Cette propriété est indépendante de la longueur d'onde, de l'épaisseur et du caractère biréfringent du modèle.

- *Après avoir mis en place l'éprouvette sur le banc de flexion de photoélasticité et mis en charge, grâce aux poids, sous une valeur connue d'effort, on demande de tracer les isoclines correspondant aux orientations de 0° à 90° de 15° en 15° . On comparera ces tracés avec les résultats d'un calcul analytique ou par éléments finis.*



Pour les problèmes de contraintes planes, tel le cas de la flexion, la contrainte normale est nulle en tout point de la surface extérieure normale au plan de la figure. Les deux autres contraintes principales σ_1 et σ_2 sont orientées dans le plan, suivant deux directions perpendiculaires dites directions principales.

En faisant varier l'angle β entre 0° et 90° (figure 14) par rapport aux directions de l'éprouvette, on fait apparaître successivement les courbes pour lesquelles la direction principale est inclinée du même angle β par rapport à l'axe de l'éprouvette. En comparant aux isoclines de la partie analytique, il apparaît que les courbures de ces courbes au voisinage des points d'appui n'existent pas dans la solution RdM. Expérimentalement, elles attestent un fort cisaillement au voisinage des points d'appui et de chargement qui modifie l'inclinaison des contraintes principales.

L'autre condition permettant d'annuler l'intensité lumineuse I est $\sin \phi/2 = 0$; les lieux d'extinction correspondants sont les isochromes. Cette condition se traduit par :

$$\phi = 2 \pi n \quad \text{avec} \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

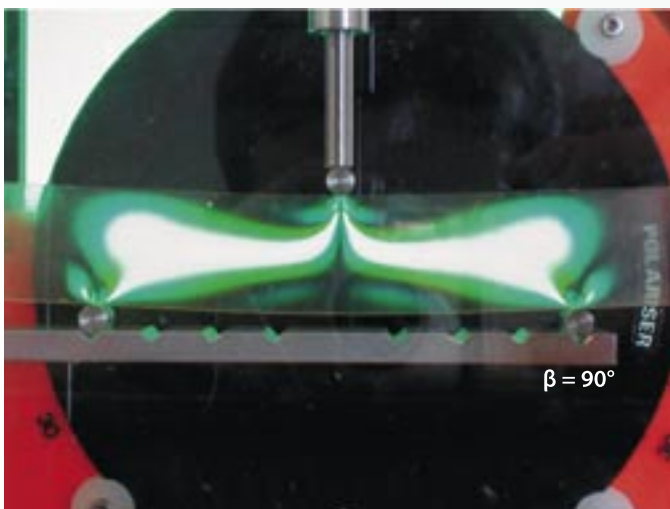
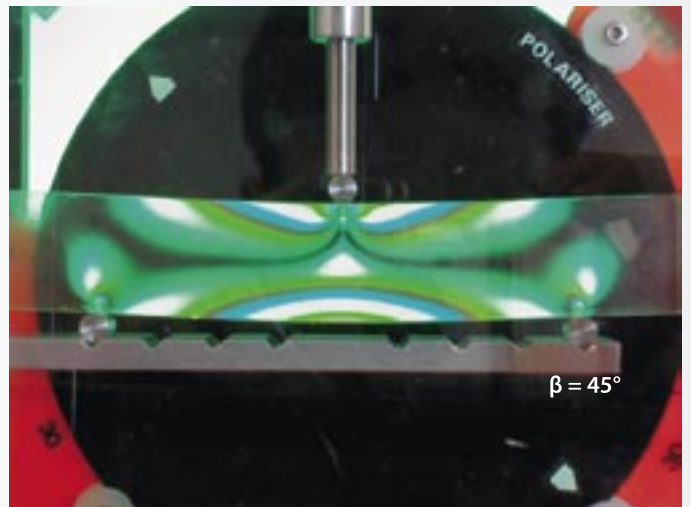
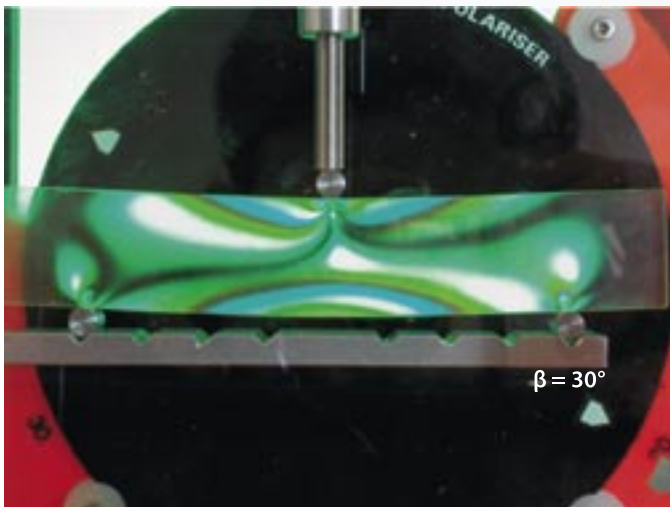
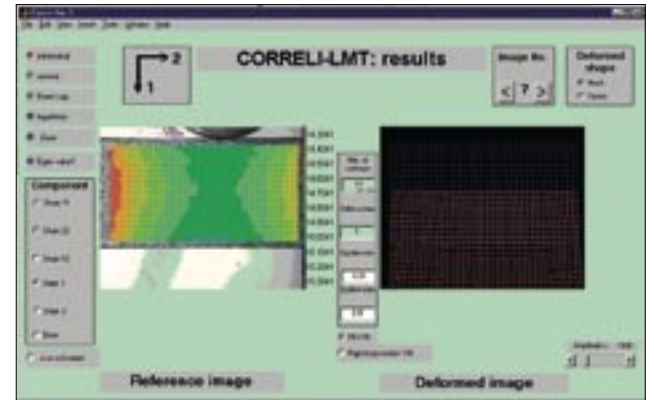
Le lieu des points pour lequel $n = 1$ constitue la frange de 1^{er} ordre, pour $n = 2$ la frange de second ordre et ainsi de suite. D'après la relation de Maxwell, la frange d'ordre n , ou isochrome d'ordre n , qui dépend de la longueur d'onde, est un lieu d'extinction des points vérifiant :

$$\sigma_1 - \sigma_2 = n \cdot \lambda / (C \cdot e)$$

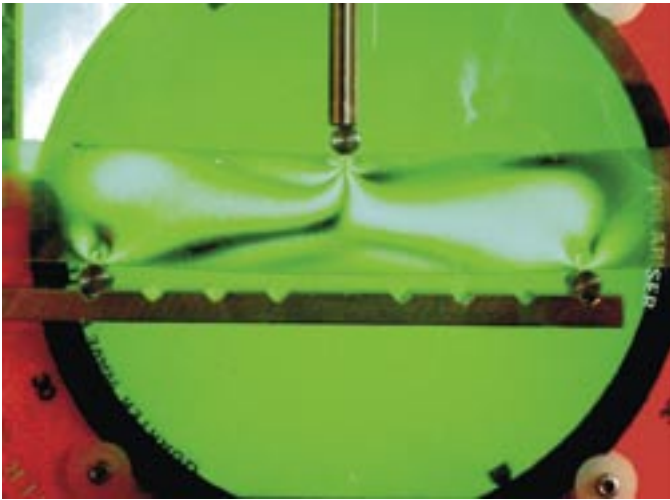
Pour une valeur donnée de n , l'isochrome d'ordre n correspond à une ligne d'égale valeur de $\sigma_1 - \sigma_2$, c'est-à-dire, à un facteur 1/2 près, à une ligne d'égale valeur du cisaillement maximal (ou contrainte de Tresca), puisque $\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$.

➤ Référence logicielle

CORRELI est une application développée au LMT-Cachan par François Hild (directeur de recherche au CNRS) pour résoudre les difficultés rencontrées lors d'essais non homogènes. Luc Chevalier a participé à l'extension de cet outil aux grandes déformations, notamment pour la réalisation de manipulations sur des matériaux polymères. L'écran ci-dessous illustre les possibilités d'affichages : différentes composantes de la déformation ϵ_{11} , ϵ_{22} et ϵ_{12} dans différentes mesures de déformation – déformation nominale, de Green-Lagrange, logarithmiques, etc., et plus classiquement déformations infinitésimales, déplacements sous forme d'isocomposantes, de grille déformée ou de vecteurs.



◀ **Figure 14. L'observation des isoclines pour différentes valeurs de l'angle β**



▲ **Figure 15. La visualisation des isochromes**

L'observation de ces isochromes est différente suivant que l'on opère en lumière blanche ou en lumière monochromatique. En lumière blanche, toutes les couleurs du spectre de la lumière naturelle sont représentées et le phénomène de biréfringence accidentelle produit sur l'écran des franges colorées. Les lignes isochromes ne correspondent plus à une extinction totale mais à une extinction d'une couleur particulière du spectre. L'extinction de la longueur d'onde particulière λ se fera si et seulement si la relation $n = Ce(\sigma_1 - \sigma_2)/\lambda$ avec n entier est vérifiée. L'extinction de la couleur de longueur d'onde λ entraîne pour l'œil l'apparition de la couleur complémentaire. Dans ce cas, les iso-

chromes portent bien leur nom car elles apparaissent comme des bandes de couleurs.

● À l'aide des plaques quart d'onde, visualiser les isochromes. On comparera ces résultats avec le tracé des isocontraintes de Tresca obtenu analytiquement ou par un calcul éléments finis.

L'allure des isochromes (figure 15) est très semblable à la contrainte de von Mises (ou de Tresca), sauf au voisinage des points d'appui et du point de chargement. À ce niveau, une étude plus fine du champ de contrainte est nécessaire; la RdM tombe en défaut. Un calcul par la méthode des éléments finis sur demi-structure donne les résultats suivants (figure 16):

- une déformée présentant une localisation de la déformation au niveau de la charge appliquée et des appuis;
- une contrainte longitudinale pratiquement identique à la solution RdM à de toutes petites perturbations près au voisinage des bords;
- une contraintes de cisaillement fortement perturbée au voisinage des bords comme l'analyse de photoélasticité permet de le visualiser;
- une contrainte équivalent de von Mises (Tresca à la même allure) qui reproduit assez fidèlement l'image des isochromes de la figure 15.

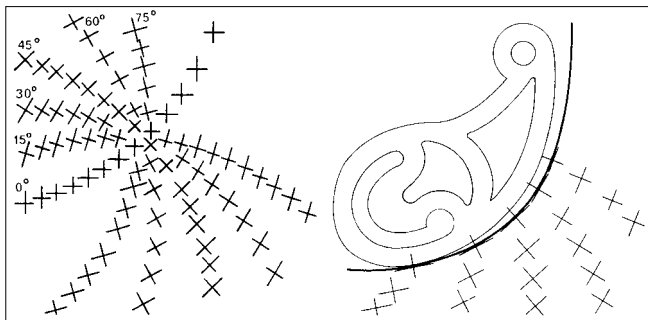
Conclusions

Par nature, la RdM ne fournit pas d'information fiable au voisinage des points d'application de la charge et des appuis. Il s'ensuit une méconnaissance de l'état de contrainte en ces endroits qui peut affecter le dimensionnement (facteur de concentration de contrainte estimé dans le cas présent à $K_t = 1,5$). Une manière

Lexique

● **Isocline**: lien des points qui ont des directions principales des contraintes parallèles et perpendiculaires à une direction donnée.

Leur connaissance est utile, soit pour des considérations théoriques, soit en vue de mesures ultérieures par l'intermédiaire de jauges de contraintes. On peut aussi, à partir des isoclines relevées par photoélasticité (sous la forme de petites croix dont les branches sont parallèles aux directions principales) déduire le tracé des isostatiques constituant deux réseaux de courbes orthogonales telles qu'en chaque point l'une des directions principales est tangente, l'autre



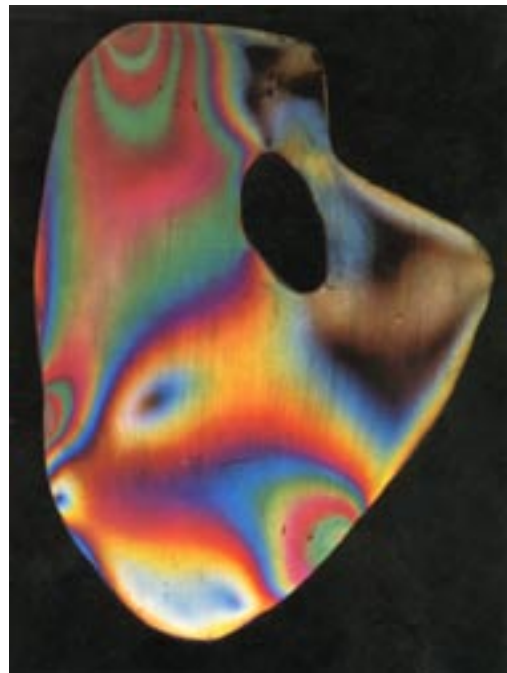
est normale. Entre autre propriétés, il est intéressant de remarquer que la seule considération du rayon de courbure des isostatiques permet de connaître, sans mesure, l'allure des variations des contraintes principales:

- pour une isostatique à forte courbure, la contrainte qui lui est perpendiculaire varie rapidement;
- des isostatiques rectilignes (zone noire des isoclines) donnent des contraintes principales stationnaires.

● **Isochrome**: lien des points soumis à une même différence de contraintes principales, donc à une même contrainte de cisaillement maximal (intéressant vis-à-vis du critère de Tresca).

En photoélasticité, les isochromes donnent lieu à des phénomènes de coloration. Par exemple, en lumière blanche (comprenant toutes les couleurs du spectre naturel) les couleurs successives présentent des passages brusques en ces

points pour lesquels les contraintes de cisaillement maximal sont égales à des multiples entiers d'une même valeur; ce passage se fait toujours dans le sens bleu-rouge ou rouge-vert lorsque τ_{max} croît.



Bibliographie

Articles concernant ce sujet déjà parus dans la revue:

- CHEVALIER Luc, « RDM et MMC comparés dans un cas de dimensionnement de levier », n° 119, avril 2002
- TEIXIDO Christian, « Des clés pour dénouer le maillage », n° 127, septembre-octobre 2003



Allure de la déformée: La charge «localisée» induit une déformation locale qui n'est pas prédictible par la RdM mais visible sur les mesures par analyse d'images.



Contrainte σ_{xx} : La distribution est tout à fait comparable à la solution analytique de la RdM, sauf quelques effets mineurs au voisinage des appuis et de l'application de la charge. En ces points, la concentration de contrainte explique les tassements aux appuis et la déformation localisée qui induit expérimentalement une flèche plus grande que les prédictions RdM.



Contrainte σ_{xy} : La distribution est indépendante de l'abscisse dans la zone centrale et une coupe montrerait bien une distribution parabolique. Les contraintes de cisaillement sont fortement perturbées aux extrémités de la poutre et suivent le contour des lignes isoclines observées en photoélasticité.



Contrainte de von Mises: La distribution est assez voisine de celle des contraintes longitudinales, mais les effets de bords apparaissent plus clairement. Un facteur de concentration de contrainte de 1,5 est déterminé par comparaison entre ce calcul et un calcul RdM (ce résultat est très certainement sous-estimé compte tenu de la taille des éléments au voisinage de la charge par rapport à la dimension réelle de la zone de contact).

▲ **Figure 16. Le calcul par éléments finis**

d'affiner les résultats serait de considérer (par un calcul de pression de Hertz par exemple) le champ de contrainte localisée au droit de la charge afin d'en déduire une estimation de la largeur réelle du contact. Dans ce cas, on peut mettre en œuvre un calcul éléments finis plus fin donnant une estimation fiable des contraintes dans ces zones.

Par ailleurs, si les jauges positionnées dans la partie «régulière» de la poutre conduisent à une déformation fidèle à la prédiction RdM, la mesure du champ de déplacement permet de rendre compte d'une différence assez forte entre la flèche mesurée et la flèche calculée. Ici, la flèche «réelle» est 1,5 fois plus forte que la flèche «calculée». Cette grandeur globale prend en compte les effets de bords et ne peut pas être connue finement par la RdM.

L'approche expérimentale reste donc incontournable, notamment pour les étudiants de la «génération CAO», qui manipulent souvent les objets techniques au travers de maquettes virtuelles et qui peuvent être tentés de faire l'amalgame entre le comportement du modèle d'un composant et le comportement réel du composant dans son environnement. ■