

Des clés pour dénouer le maillage

CHRISTIAN TEIXIDO¹

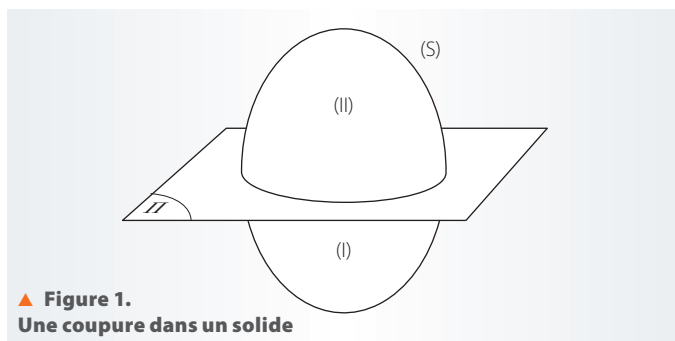
Les logiciels de calculs par éléments finis utilisés par les modeleurs volumiques permettent de déduire le champ des contraintes et des déformations dans une pièce, quelle que soit la forme de celle-ci. Il s'agit donc d'une avancée énorme par rapport aux méthodes traditionnelles d'étude de résistance des matériaux. Aujourd'hui, nos élèves utilisent ces outils sophistiqués, et certains points

méritent d'être éclaircis. Quelles sont les connaissances essentielles qu'ils doivent posséder pour effectuer des modélisations sensées et tirer de bonnes conclusions? Comment leur faire comprendre, d'une manière pragmatique, le maillage, la théorie de l'élasticité plane, les critères de limite élastique tels que ceux de Tresca et de von Mises?... Cet article essaie de répondre simplement à ces questions.

MOTS-CLÉS résistance des matériaux, modélisation, élasticité

Quelques rappels sur la notion de contrainte

Pour un solide (S) en équilibre sous l'action d'efforts extérieurs, nous savons qu'il existe en chaque point situé à l'intérieur de (S) des forces intérieures (ou forces de cohésion). Pour les mettre en évidence, il est nécessaire de couper (S) par une surface fictive plane (II), ce qui donne les tronçons (I) et (II) (figure 1).



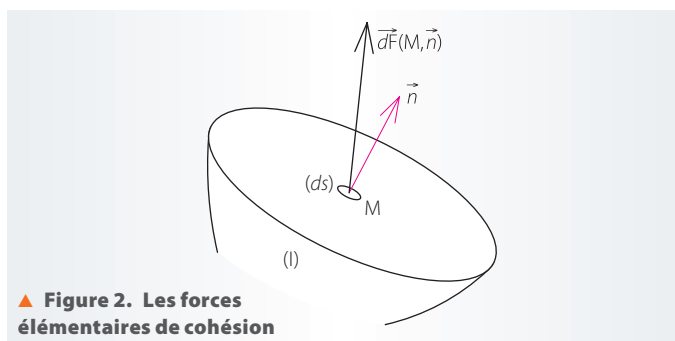
▲ **Figure 1.**
Une coupe dans un solide

Alors, le principe fondamental de la statique appliqué à (I) s'écrit :

$$\{\text{Ext} \rightarrow \text{I}\} + \{\vec{\mathcal{C}}_{\text{cohésion}}\} = \{0\}.$$

Sachant que le torseur $\{\text{Ext} \rightarrow \text{I}\}$ est calculable, on en déduit le torseur de cohésion.

Une analyse fine montre que ce dernier est constitué de forces élémentaires définies sur un domaine continu qui est la surface de coupure. Il est donc nécessaire d'envisager des éléments de surface infiniment petits afin de mieux les caractériser (figure 2).



▲ **Figure 2.** Les forces élémentaires de cohésion

Sur l'élément (ds) entourant le point M, l'action de II/I se traduit par un torseur-univecteur $\vec{dF}_{\nu/M}$, et ainsi

$$\{\vec{\mathcal{C}}_{\text{cohésion}}\} = \{\sum \vec{dF}_{\nu/M}\}.$$

Appelons \vec{n} la normale unitaire extérieure à (I). L'action $\vec{dF}_{\nu/M}$ dépend de M et de l'orientation de (ds), donc de \vec{n} . Ainsi :

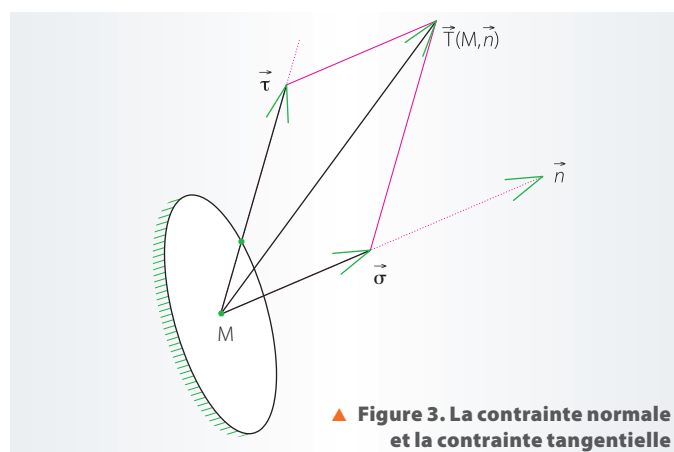
$$\vec{dF}_{\nu/M} = \vec{dF}(M, \vec{n}).$$

On appelle contrainte en M, pour la direction \vec{n} , le vecteur :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{\vec{dF}(M, \vec{n})}{ds}$$

Ce vecteur est évidemment colinéaire à $\vec{dF}(M, \vec{n})$.

Enfin, la connaissance des critères de limite élastique nous impose de travailler avec la contrainte normale σ et la contrainte tangentielle τ (figure 3).



▲ **Figure 3.** La contrainte normale et la contrainte tangentielle

$$\vec{\sigma} = \text{proj}_{\vec{n}}[\vec{T}(M, \vec{n})]; \quad \vec{\tau} = \text{proj}_{(ds)}[\vec{T}(M, \vec{n})]$$

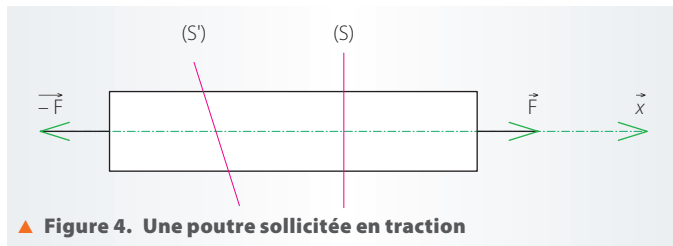
$$\text{et } \vec{T}(M, \vec{n}) = \vec{\sigma} + \vec{\tau}.$$

Lorsque l'on fait tourner la facette (ds) autour de M, $\vec{T}(M, \vec{n})$ varie en direction et intensité; il en est de même pour $\vec{\sigma}$ et $\vec{\tau}$. Le but de cette analyse est de caractériser ces variations.

1. Professeur agrégé de mécanique au lycée Jean-Jaurès d'Argenteuil.

La contrainte sur une facette quelconque en traction (ou compression)

La poutre est sollicitée axialement par deux efforts \vec{F} et $-\vec{F}$ avec $\vec{F} = F \cdot \vec{x}$ (figure 4).

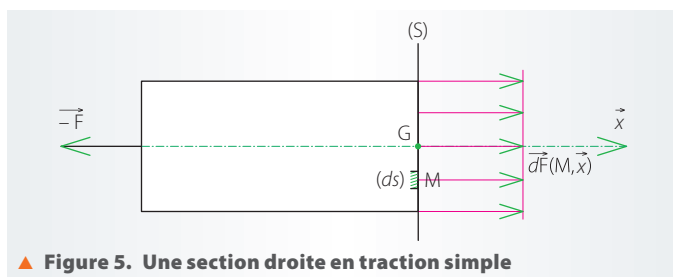


▲ Figure 4. Une poutre sollicitée en traction

Pratiquons deux sections, l'une droite, (S), l'autre inclinée, (S').

Le cas de la section droite

L'équilibre du tronçon (I) est obtenu à l'aide de forces élastiques uniformément réparties (figure 5).



▲ Figure 5. Une section droite en traction simple

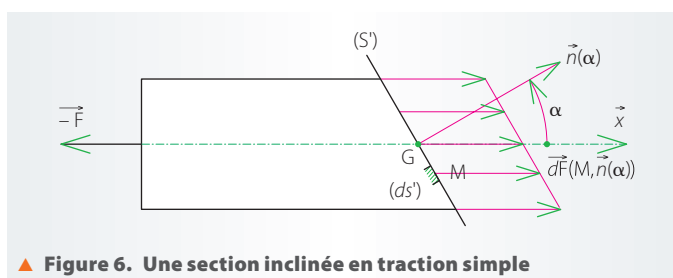
De plus, $\vec{dF}(M, \vec{x}) = \vec{T}(M, \vec{x}) \cdot ds$
avec $\vec{T}(M, \vec{x}) = \sigma_x \cdot \vec{x}$ et $\sigma_x = C^{te}$.

Comme $\vec{\mathcal{T}}\{\mathcal{T}_{cohésion}\} = -\vec{\mathcal{T}}\{\bar{I} \rightarrow I\} = -[-\vec{F}] = F \cdot \vec{x}$,
on déduit facilement que :

$$\sum_s \sigma_x \cdot \vec{x} \cdot ds = F \cdot \vec{x}, \quad \text{soit } \sigma_x = \frac{F}{S}.$$

Le cas de la section inclinée

Comme dans le cas précédent, l'équilibre du tronçon (I) est obtenu à l'aide de forces élastiques uniformément réparties (figure 6).



▲ Figure 6. Une section inclinée en traction simple

Pour une facette de normale $\vec{n}(\alpha)$:

$$\vec{dF}(M, \vec{n}(\alpha)) = T(M, \vec{n}(\alpha)) \cdot \vec{x} \cdot ds'.$$

Le torseur de cohésion reste inchangé. Ainsi :

$$\sum_s T(M, \vec{n}(\alpha)) \cdot ds' \cdot \vec{x} = F \cdot \vec{x}, \quad \text{soit } T(M, \vec{n}(\alpha)) = \frac{F}{S'}.$$

Comme $\frac{S}{S'} = \cos \alpha$, on déduit que :

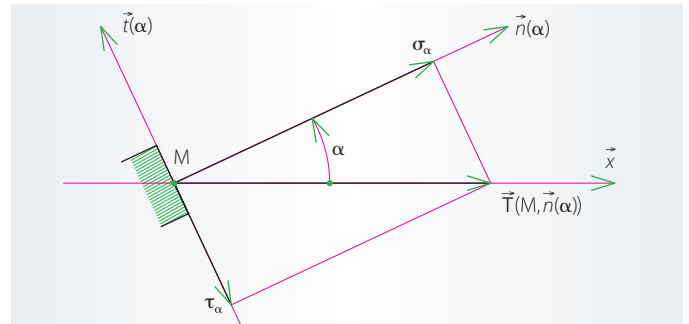
$$T(M, \vec{n}(\alpha)) = \frac{F}{S} \cos \alpha = \sigma_x \cdot \cos \alpha$$

que l'on peut décomposer en σ_α et τ_α (figure 7).

Sur le repère local : $\sigma_\alpha = T(M, \vec{n}(\alpha)) \cos \alpha$,
 $\tau_\alpha = -T(M, \vec{n}(\alpha)) \sin \alpha$.

Ainsi :
$$\begin{cases} \sigma_\alpha = \sigma_x \cdot \cos^2 \alpha \\ \tau_\alpha = -\sigma_x \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \end{cases}$$

ou encore :
$$\begin{cases} \sigma_\alpha = \frac{\sigma_x}{2} (1 + \cos 2\alpha) \\ \tau_\alpha = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\alpha \end{cases}$$



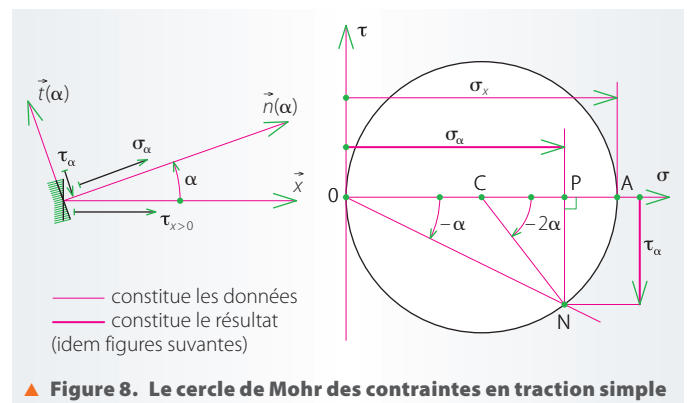
▲ Figure 7. Les contraintes sur une facette inclinée en traction simple

Conséquences

● Quand α varie, σ_α et τ_α varient. On constate que $(\sigma_\alpha)_{\max} = \sigma_x$,
mais aussi $|\tau_\alpha|_{\max} = \frac{\sigma_x}{2}$.

Ce cisaillement maximal constitue un critère de résistance pour les matériaux ductiles (aciers doux, alliages légers), lesquels ont une résistance limite au cisaillement de l'ordre de la moitié de celle de traction ; ainsi, la cassure d'une éprouvette de traction est inclinée et résulte du cisaillement maximal.

● Le cercle de Mohr permet de mettre en évidence graphiquement les variations de σ_α et de τ_α (figure 8).



▲ Figure 8. Le cercle de Mohr des contraintes en traction simple

Rappelons que sa construction s'effectue à partir d'un repère constitué d'un axe des abscisses (axe des contraintes normales σ) et d'un axe des ordonnées (axe des contraintes tangentielles τ).

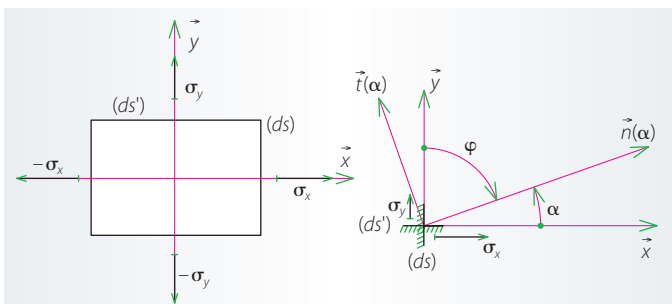
On porte $\overline{OA} = \sigma_x$; le cercle de Mohr a pour centre le point C milieu de OA et pour diamètre OA. Le tracé d'une droite passant par O et inclinée de l'angle $-\alpha$ permet d'obtenir le point N (point d'intersection avec le cercle) et le point P correspondant à la projection de N sur l'axe des σ . Ainsi :

$$\overline{OP} = \overline{OC} + \overline{CP} = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x}{2} \cos(-2\alpha) = \frac{\sigma_x}{2} (1 + \cos 2\alpha) = \sigma_\alpha$$

$$\text{et } \overline{PN} = \overline{CN} \cdot \sin(-2\alpha) = -\frac{\sigma_x}{2} \sin 2\alpha = \tau_\alpha.$$

La traction (ou compression) suivant deux directions perpendiculaires

C'est le cas d'une plaque sollicitée axialement par l'intermédiaire de contraintes normales σ_x et σ_y (figure 9).



▲ Figure 9. La traction (ou compression) suivant deux directions perpendiculaires

Pour connaître les expressions de σ_α et τ_α , il suffit d'appliquer le principe de superposition, soit :

$$\sigma_\alpha = \sigma'_\alpha + \sigma''_\alpha \quad \text{et} \quad \tau_\alpha = \tau'_\alpha + \tau''_\alpha,$$

sachant que σ'_α et τ'_α sont engendrées par σ_x , et que σ''_α et τ''_α résultent de σ_y .

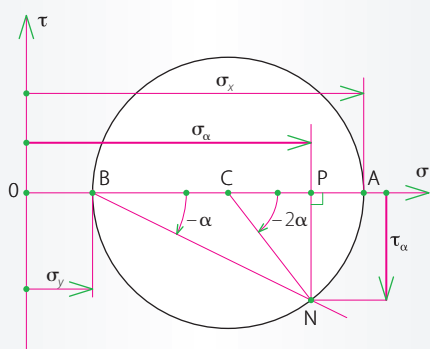
On a donc :

$$\begin{cases} \sigma'_\alpha = \frac{\sigma_x}{2}(1 + \cos 2\alpha) \\ \tau'_\alpha = -\frac{\sigma_x}{2}\sin 2\alpha \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \sigma''_\alpha = \frac{\sigma_y}{2}(1 + \cos 2\varphi) \\ \tau''_\alpha = -\frac{\sigma_y}{2}\sin 2\varphi \end{cases}$$

avec $\varphi = -\frac{\pi}{2} + \alpha$.

$$\text{Ainsi:} \quad \sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \cos 2\alpha$$

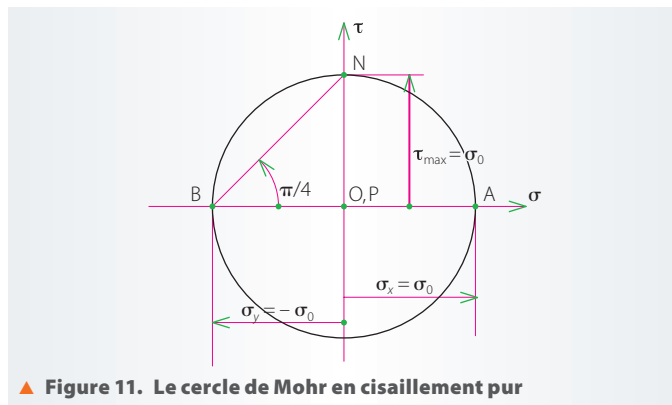
$$\tau_\alpha = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha.$$



▲ Figure 10. Le cercle de Mohr pour $\sigma_x > \sigma_y > 0$

Ce qui permet de déduire la construction du cercle de Mohr (figure 10).

Il est intéressant de remarquer que le critère de résistance donné par la RDM, soit $\sigma_{\max} \leq R_e$ (ou R_{pe}), doit être fréquemment remis en cause, notamment lorsque le cercle de Mohr coupe l'axe des ordonnées. Le cas le plus significatif correspond au **cisaillement pur** obtenu à partir de $\sigma_x = \sigma_0$ et $\sigma_y = -\sigma_0$. Le cercle de Mohr est alors centré en O et $\tau_{\max} = \sigma_x = \sigma_0$ (figure 11).



▲ Figure 11. Le cercle de Mohr en cisaillement pur

Les contraintes principales

Nous avons vu précédemment que, selon deux directions perpendiculaires, les contraintes normales sont extrêmes et qu'il n'y a pas de cisaillement (c'était \vec{x} et \vec{y}).

Pour toute facette de normale $\vec{n}(\alpha)$:

– σ_α est compris entre σ_x et σ_y ;

– τ_α existe toujours.

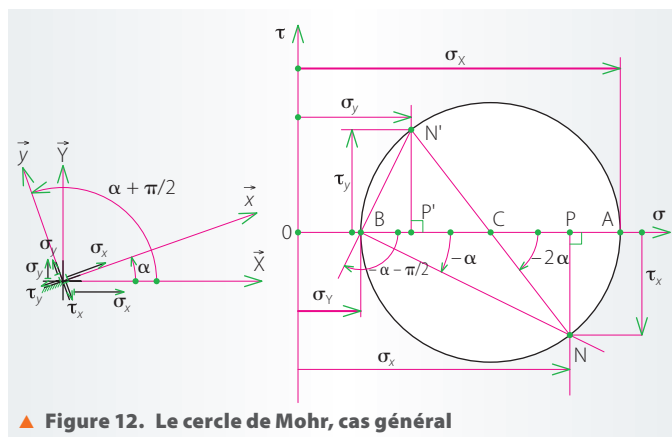
Ces deux directions, pour lesquelles $\tau = 0$, sont les **directions principales** et les contraintes correspondantes sont les **contraintes principales**.

Appelons X et Y ces directions. Ce changement de notations se poursuit en écrivant que :

$$\vec{n}(\alpha) \rightarrow \vec{x}, \text{ soit } \sigma_\alpha \rightarrow \sigma_x \text{ et } \tau_\alpha \rightarrow \tau_x ;$$

$$\vec{n}(\alpha + \frac{\pi}{2}) \rightarrow \vec{y}, \text{ soit } \sigma_{\alpha + \pi/2} \rightarrow \sigma_y \text{ et } \tau_{\alpha + \pi/2} \rightarrow \tau_y = -\tau_x$$

(réciprocité des contraintes tangentielles).



▲ Figure 12. Le cercle de Mohr, cas général

À partir du cercle de Mohr (figure 12), on peut déduire les expressions des contraintes principales et du cisaillement maximal en fonction de données issues de facettes non principales. On porte, sur l'axe des abscisses, $\overline{OP} = \sigma_x$ et $\overline{OP'} = \sigma_y$; parallèlement à l'axe des ordonnées, $\overline{PN} = \tau_x$ et $\overline{P'N'} = \tau_y$. Alors

$$\overline{OA} = \sigma_x = \overline{OC} + \overline{CA} = \overline{OC} + \overline{CN},$$

$$\overline{OB} = \sigma_y = \overline{OC} + \overline{CB} = \overline{OC} - \overline{CN}$$

et $\tau_{\max} = \overline{CN}$, soit :

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_x^2} \\ \sigma_y = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_x^2} \end{cases}$$

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_x^2}.$$

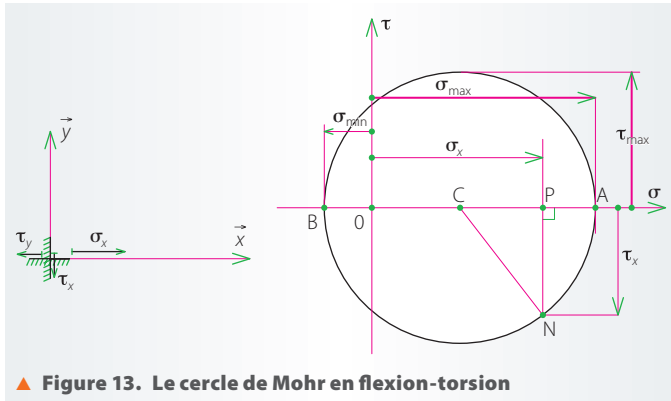
La sollicitation composée de flexion-torsion constitue une application classique. Nous savons que dans ce cas il existe un point situé à la périphérie de la poutre pour lequel :

$$\sigma_x = \frac{\mathcal{M}f_z \cdot V_{\max}}{I_{Gz}}; \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_x = \frac{\mathcal{M}t \cdot r_{\max}}{I_G}.$$

En conséquence, le cercle de Mohr (figure 13) permet de déduire :

$$\sigma_{\max} = \sigma_x = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4 \tau_x^2}$$

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4 \tau_x^2}.$$

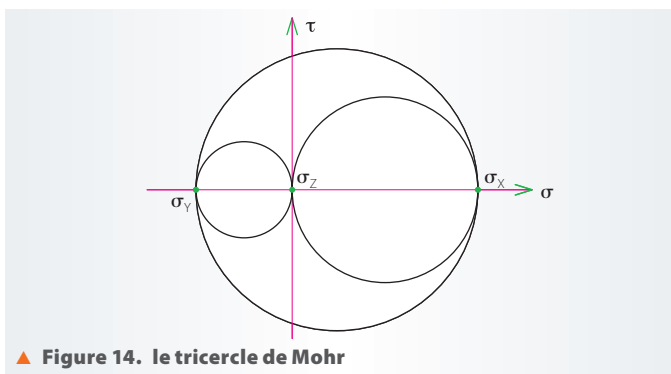


▲ Figure 13. Le cercle de Mohr en flexion-torsion

On peut remarquer que le cercle coupe l'axe des ordonnées, ainsi $\tau_{\max} > \sigma_{\max}/2$.

Si l'on admet que $R_g = R_e/2$ c'est à τ_{\max} qu'il faut adopter un critère de limite élastique.

Remarque importante : Ces écrits (qui se veulent simples) ne mentionnent qu'un seul cercle de Mohr. Or nous savons bien qu'en élasticité générale il est nécessaire de raisonner dans l'espace, ce qui conduit au tricerple de Mohr, construit à partir de trois contraintes principales σ_x , σ_y et σ_z . Mais l'expérience montre que, d'une manière générale, les contraintes les plus élevées se situent à la périphérie d'une pièce (sur la « peau »); ainsi, une des contraintes principales est nulle, soit par exemple σ_z , ce qui donne deux cercles tangents à l'axe des ordonnées. De plus, dans la majorité des cas, les deux autres contraintes principales (σ_x et σ_y) sont de signes contraires, ce qui conduit à un troisième cercle, coupant l'axe des ordonnées (figure 14), dont le diamètre est le plus grand. C'est sur ce dernier cercle, pour lequel les contraintes sont maximales, que porte notre analyse.



▲ Figure 14. Le tricerple de Mohr

Les critères de limite élastique

Comme principe de base, nous savons que, pour tout point, les déformations doivent rester en deçà de leur limite élastique. Or, les données expérimentales sont faibles, puisque le seul essai fiable est celui de la traction simple.

Pour cette sollicitation uniaxiale :

- si $\sigma_x > 0$ avec $\sigma_y = 0$, il faut $\sigma_x \leq R_e$;
- si $\sigma_x < 0$ avec $\sigma_y = 0$, il faut $|\sigma_x| \leq R_c$.

Un autre essai fournit un renseignement intéressant; c'est le cisaillement pur : $\sigma_x = -\sigma_y = \tau_{\max}$ et $\tau_{\max} \leq R_g$.

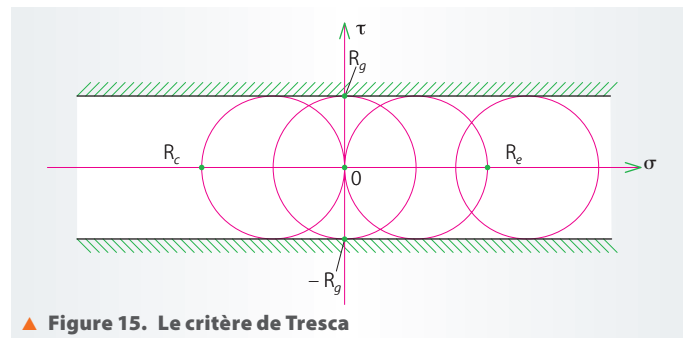
Donc, R_e , R_c , R_g constituent les données de base, mais pour des sollicitations spécifiques.

Différentes théories ont été élaborées pour le cas général. La plupart d'entre elles admettent qu'une certaine fonction des contraintes principales doit être inférieure ou égale à R_e , soit $f(\sigma_x, \sigma_y) \leq R_e$.

La théorie de la contrainte normale maximale

Supposons que $\sigma_x = \text{Max}(\sigma_x, \sigma_y)$, alors $f(\sigma_x, \sigma_y) = \sigma_x$, et l'on écrit que $\sigma_x \leq R_e$.

On se ramène donc à une sollicitation uniaxiale; l'influence de l'autre contrainte principale est négligée. Comme cela a déjà été évoqué, cette théorie n'est pas satisfaisante: des exemples comme le cisaillement pur et la compression hydrostatique ($\sigma = -p$) sont en contradiction.



▲ Figure 15. Le critère de Tresca

La théorie de la contrainte du cisaillement maximal (critère de Tresca)

On écrit que $\tau_{\max} \leq R_g$.

En conséquence, les cercles de Mohr doivent se situer entre deux bandes horizontales définies par R_g et $-R_g$ (figure 15).

$$\text{Sachant que } \tau_{\max} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}, \quad \sigma_x - \sigma_y = 2 \tau_{\max} = 2 R_g.$$

Si le matériau est tel que $R_e = 2 R_g$ (ductile), alors

$$\sigma_x - \sigma_y \leq R_e.$$

Dans le cas d'une sollicitation de flexion-torsion,

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4 \tau_x^2},$$

et le critère de résistance s'écrit

$$\sqrt{\sigma_x^2 + 4 \tau_x^2} \leq R_e.$$

Ce critère, relatif aux matériaux ductiles, est significatif lorsque le cercle de Mohr coupe l'axe des ordonnées. Différents ouvrages parlent alors d'une contrainte normale équivalente $\sigma_{\text{équival}}$, et l'on écrit que $\sigma_{\text{équival}} = \sqrt{\sigma_x^2 + 4 \tau_x^2} \leq R_e$, mais il ne faut pas oublier qu'en fait il s'agit d'un calcul au cisaillement maximal.

La théorie de l'énergie de déformation (critère de von Mises)

Les calculs sortent du cadre de cet article. Il s'agit de mettre en évidence une énergie de déformation par unité de volume qui, à la limite élastique, égale l'énergie de déformation de glissement en traction simple.

Alors, pour un état plan de contraintes, on trouve :

$$\sigma_{\text{équival}} = \sqrt{(\sigma_x + \sigma_y)^2 - 3(\sigma_x \cdot \sigma_y - \tau_x^2)} \leq R_e$$



▲ Figure 16. Le pont du Gard

Ce qui donne pour $\sigma_y = 0$:

$$\sigma_{\text{équiv}} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_x^2} \leq R_e$$

Ce qui correspond à: $R_g = 0,58 R_e$.

Le critère de von Mises est donc un peu moins pessimiste que celui de Tresca; de plus, il utilise une relation entre R_e et R_g plus proche de la réalité. En effet, mis à part les matériaux ductiles (aluminium, acier doux), la majorité des matériaux durs ont une limite élastique au glissement R_g supérieure à la moitié de R_e (pour un acier dur de type 25 Cr Mo 4: $R_e = 600$ MPa et $R_g = 480$ MPa). En conséquence, c'est généralement le critère de von Mises qui est proposé dans les logiciels appliquant la méthode des éléments finis.

La résistance des matériaux par la méthode des éléments finis

Les analyses que nous effectuons dans ce domaine portent sur plusieurs types de problèmes tels que:

- l'étude des poutres;
- l'étude des coques;
- l'étude de pièces quelconques.

L'étude des poutres donne des résultats satisfaisants si la pièce est réellement une poutre. Mais nous savons bien que, en raison de l'usage traditionnel en résistance des matériaux, nous abusons de la modélisation d'une pièce en une poutre. Par exemple, la détermination du module d'un engrenage s'effectue en calculant la dent comme une poutre soumise à la flexion!

Ce genre de démarche (douteuse) devient de plus en plus obsolète car, aujourd'hui, les moyens de calculs permettent de

déterminer les contraintes dans une pièce avec des hypothèses proches de la réalité: c'est la **modélisation d'une pièce en éléments finis**.

Que peut-on dire, d'une manière pragmatique, ce qui se cache derrière cette expression?

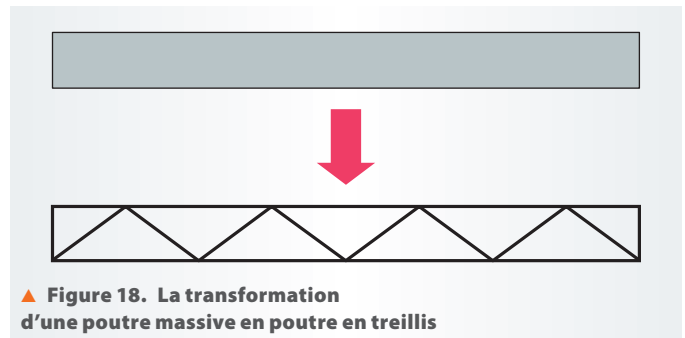
Tout d'abord, un peu d'histoire.

Traditionnellement, on pensait que c'était la masse du matériau qui donnait la résistance, ce qui conduisait à entreprendre des constructions massives (figure 16).

Puis, d'autres techniques de construction ont utilisé des méthodes plus légères, en localisant les flux de forces et en ne mettant la matière que dans ces zones (figure 17).

Apparut ainsi la notion de poutre en treillis chère à Gustave Eiffel. Cette transformation (de la poutre massive à la poutre en treillis) permet de considérer que les efforts intérieurs s'exerçaient aux nœuds (figure 18).

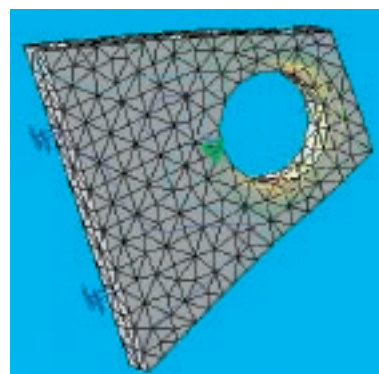
Rappelons-nous: il y a quelques années, avant l'ère des calculateurs, on résolvait ce genre de problème en considérant que chaque barre était articulée à chaque nœud. Cette modélisation grossière avait l'avantage de rendre la construction isostatique avec des barres soumises à de la traction ou de la compression (méthode de Crémone).



▲ Figure 18. La transformation d'une poutre massive en poutre en treillis

Avec l'arrivée des calculateurs, on peut aujourd'hui se rapprocher de la réalité en considérant des encastremets aux extrémités des barres.

Par analogie, on assimile une pièce massive à un treillis de barres: la matière continue est ainsi « discrétisée »: c'est l'opération de maillage (figure 19).



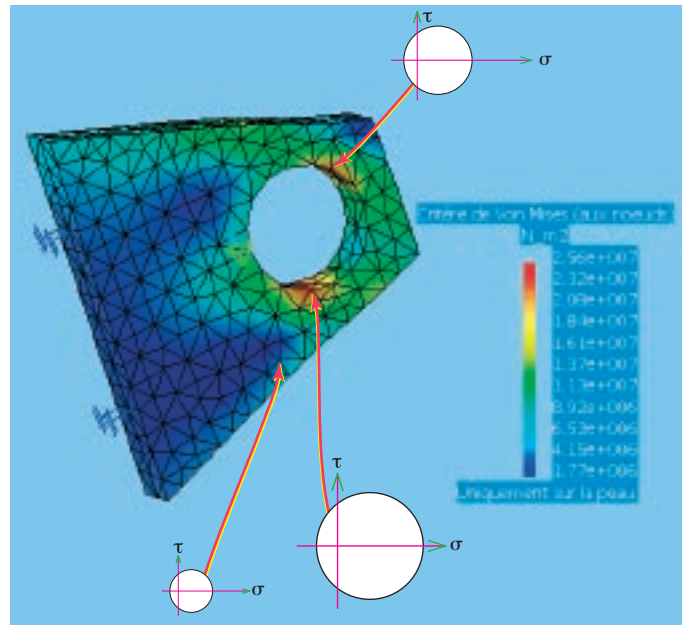
◀ Figure 19. Le maillage d'une pièce



▲ Figure 17. Le viaduc de Garabit

AAATV Centre Val de Loire, propriétaire de la locomotive à vapeur 141 R840, assure la préservation et la mise en valeur de cette machine et de sa rame historique. Pour tous renseignements: tél.02.48.64.73.74 ou www.141R840.com

- affecté un matériau à la pièce;
- défini le type de maillage;
- immobilisé la pièce par l'intermédiaire de liaisons avec l'extérieur;
- placé les efforts connus et installé un capteur de contraintes (généralement von Mises);
- enfin, lancé le calcul,



▲ **Figure 20. Le rendu réaliste et les cercles de Mohr associés**

on peut visualiser les résultats dans un affichage au « rendu réaliste avec texture » qui met en évidence, sous une forme colorée, le champ des contraintes équivalentes, de von Mises par exemple (figure 20). Cette démarche est détaillée dans l'article du présent numéro intitulé « La résistance des matériaux avec l'outil informatique ».

Il ne faut pas oublier que les performances réalisées par un calcul aux éléments finis dépendent :

- du maillage ;
- de la modélisation des actions des milieux extérieurs ;
- du calcul.

Les limites du calcul existent. En effet :

- celui-ci est faux en dehors de la zone des déformations élastiques ;
- les résultats aux nœuds qui constituent l'interface avec les milieux extérieurs sont fortement influencés par la modélisation ;
- les résultats dépendent de la qualité du maillage.

Un bon maillage doit être régulier : il ne faut pas de changement brusque de la taille des barres. Plus le maillage est fin, plus les résultats sont précis. Mais aussi, plus le maillage est fin, plus le temps de calcul est important, donc, plus le coût est élevé. ■