

RDM et MMC comparées sur un cas de dimensionnement de levier

LUC CHEVALIER¹

Le sujet de construction mécanique de la session de 1996 de l'agrégation de génie mécanique reposait sur l'analyse du système d'ouverture et de fermeture des moules portefeuille des souffleuses de bouteilles en plastique. La troisième partie concernait plus particulièrement l'étude des sollicitations exercées sur le levier de commande et le dimensionnement de celui-ci. Le questionnement initial du sujet a été repris ici et complété. L'objectif est double : comparer les approches plus ou moins simplifiées de la résistance des matériaux

(RDM) et de la théorie des solides déformables élastiques (MMC, mécanique des milieux continus) ; quantifier, sur le dimensionnement du levier, les écarts entre modèles. L'étude de ce levier apporte un éclairage à l'enseignement de la flexion et aux limites de la RDM qui permet à l'enseignant en prébac ou en BTS d'illustrer les notions de concentration de contraintes, d'effet de bord, etc.

MOTS-CLÉS mécanique, élasticité, résistance des matériaux, modélisation, travaux dirigés

La SBO1 est une machine conçue par la société Sidel qui fabrique des bouteilles en matière plastique (PET) pour les boissons fortement gazeuses à partir de préformes injectées. Ces préformes sont chauffées et soufflées avec biorientation (longitudinale puis radiale) des macromolécules. Cette machine de moyenne cadence permet d'obtenir 1 200 bouteilles par heure (1 bouteille toutes les 3 secondes).

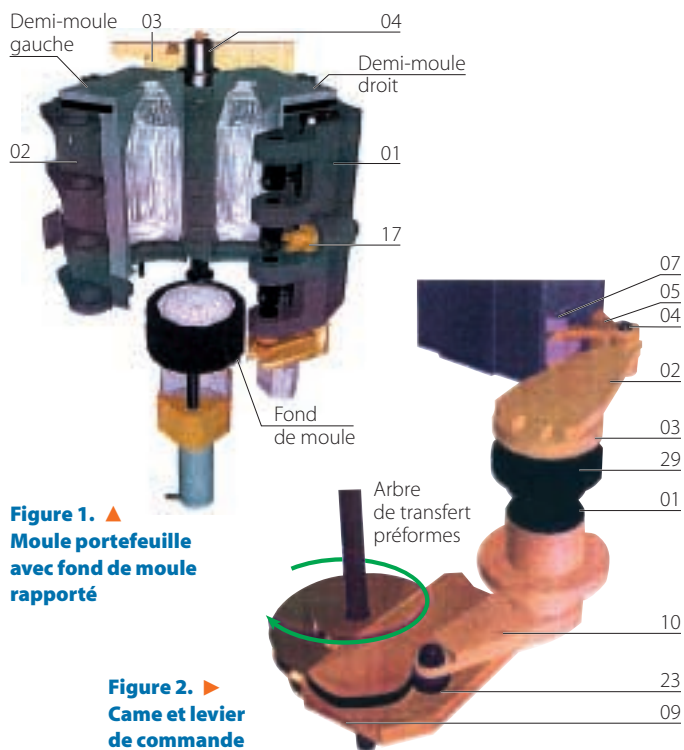


Figure 1. ▲ Moule portefeuille avec fond de moule rapporté

Figure 2. ► Came et levier de commande

La préforme chauffée est introduite dans un moule portefeuille qui s'ouvre et se ferme à l'aide de bras actionnés par une came. Ce moule est placé dans une unité porte-moule enveloppante à verrouillage intégré. Nous nous intéresserons ici au système

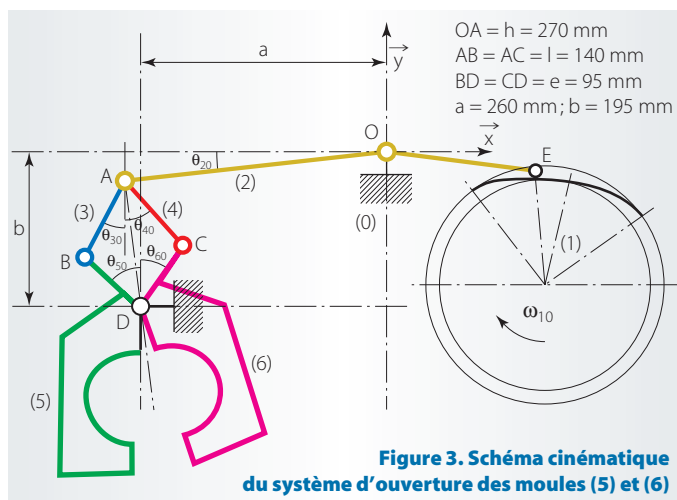


Figure 3. Schéma cinématique du système d'ouverture des moules (5) et (6)

d'ouverture et de fermeture du moule et, plus particulièrement, aux sollicitations subies par le levier de commande numéroté (2) sur le schéma de la figure 3.

Une étude dynamique de la phase d'ouverture du moule permet de montrer que l'effort qui transite dans l'articulation A est :

- en (1), périodique de type « sinusoïdal » ;
- en (2), dirigé suivant l'axe AD, c'est-à-dire pratiquement orthogonal à l'axe du levier ;
- en (3), d'intensité maximale F égale à 13 000 N.

La mise en mouvement des moules nécessite une « traction » sur les bielles (3) et (4). Une fois mis en mouvement, les moules doivent être ralentis pour ne pas induire de choc en bout de course ; il convient donc de « retenir » les moules en fin d'ouverture. La résultante de l'effort en A évolue entre une valeur maximale F et une valeur minimale opposée en signe $-F$ qui génère de la fatigue par flexion alternée dans le levier.

1. Maître de conférences à l'université de Marne-la-Vallée.



Figure 4. Vue en perspective isométrique du levier de commande étudié ▲

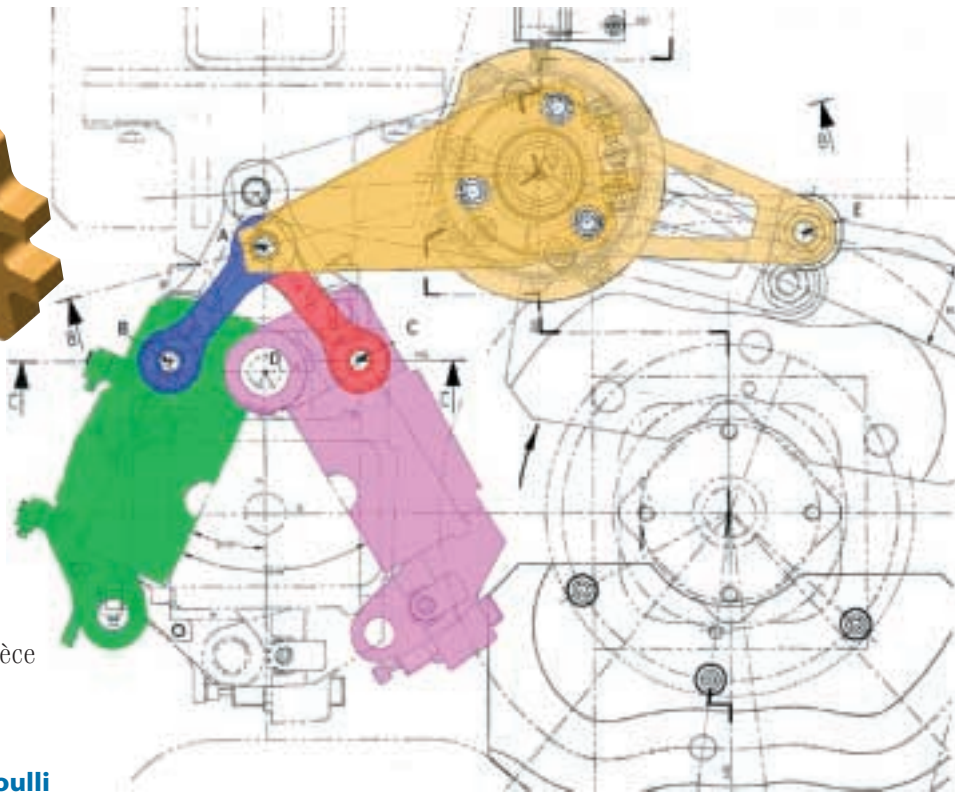


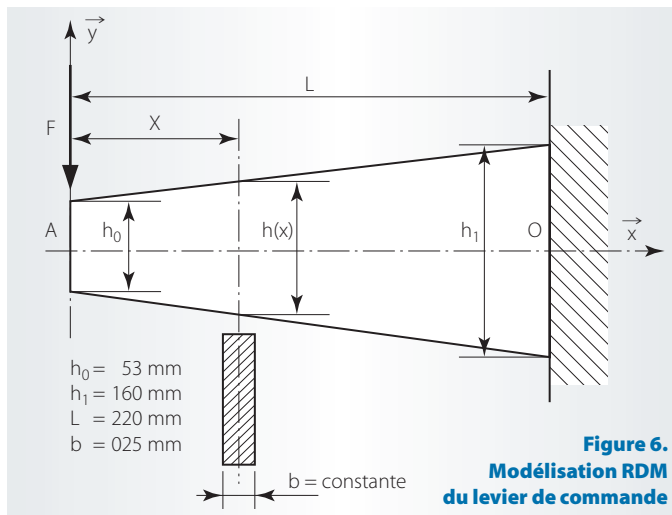
Figure 5. Vue de dessus du système de commande de l'ouverture et de la fermeture du moule

Le système est représenté dans deux positions extrêmes : moule fermé et moule ouvert (en traits fins) ▶

Dans le problème qui suit, on souhaite analyser le niveau de sécurité de cette pièce clé du système de commande.

Calcul des contraintes par la théorie des poutres de Bernoulli

Dans cette première partie, on considère le levier de commande comme une poutre de section variable (figure 6) soumise à un effort F de 13000 N à une extrémité et rigidement fixée à son autre extrémité sur un support.



- Déterminer l'évolution du moment fléchissant et de l'effort tranchant dans le tronçon AO. Dans quelle section ce moment est-il maximal?

En isolant un tronçon de poutre, on détermine l'effort tranchant et le moment fléchissant :

$$T(x) - F = 0 \Rightarrow T(x) = F$$

$$M_f(x) + xF = 0 \Rightarrow M_f(x) = -xF$$

La section d'encastrement est celle qui encaisse le plus fort moment fléchissant. C'est aussi la section la plus grosse ; les contraintes ne sont donc pas nécessairement maximales dans cette section.

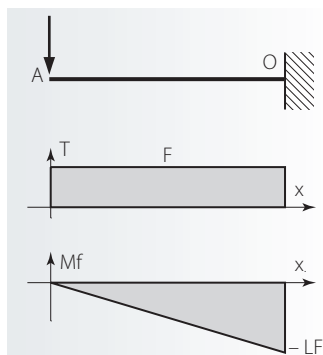


Figure 7. Diagramme des efforts

- Donner l'expression de la contrainte longitudinale σ_{xx} sur les contours de la pièce. Dans quelle section cette contrainte est-elle maximale? On pourra poser $h_1 = k \cdot h_0$ pour alléger les expressions.

La contrainte de flexion est proportionnelle à la distance y de la « fibre » neutre de la section :

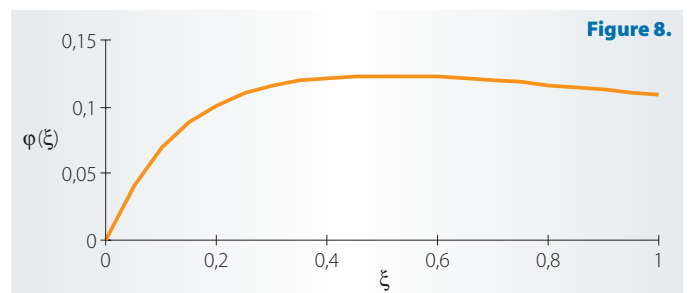
$$\sigma_{xx} = -\frac{M_f}{I} y \text{ avec } I = \frac{bh^3}{12} ; y_{\max} = \frac{h}{2} ; M_f = -xF$$

avec une hauteur non constante qui s'écrit

$$h(x) = h_0 + \frac{h_1 - h_0}{L} x = h_0 \{1 + (k-1)\xi\} \text{ où } \xi = x/L.$$

Ce qui conduit à l'expression suivante :

$$\sigma_{xx} = \frac{6FL}{bh_0^2} \varphi(\xi) \text{ avec } \varphi(\xi) = \frac{\xi}{\{1 + (k-1)\xi\}^2}$$



Le graphique de la figure 8 montre que le maximum est pratiquement au centre de la poutre ; la recherche analytique du maximum passe par le calcul de :

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\{1 + (k-1)\xi\}^2} - \frac{2(k-1)\xi}{\{1 + (k-1)\xi\}^3} = 0$$

$$\Rightarrow 1 + (k-1)\xi - 2(k-1)\xi = 1 - (k-1)\xi = 0 \Rightarrow \xi = \frac{1}{k-1}$$

Application numérique :

$$k = \frac{160}{53} = 3,02 \rightarrow \xi = 0,495 \rightarrow x = 110 \text{ mm}$$

$$\sigma_{xx} = 30,3 \text{ MPa}$$

- Rappeler les différentes approximations classiques de la RDM pour la contrainte tangentielle τ ou σ_{xy} due à l'effort tranchant. Où ces contraintes sont-elles maximales ?

Deux modèles sont classiquement utilisés pour le calcul de la contrainte de cisaillement en RDM :

- celui de la contrainte de cisaillement uniforme, qui donne

$$\sigma_{xy} = \frac{T}{S}$$

- celui de la contrainte parabolique suivant la hauteur, nulle aux bords libres et maximale sur la fibre neutre, qui donne

$$\sigma = \frac{T}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad \text{d'où } \sigma_{xy, \max} = \frac{3T}{2S}$$

Ces contraintes sont maximales en $x = 0$, là où la section est la plus faible. Plus précisément, pour la seconde modélisation, le point le plus sollicité se trouve sur la fibre neutre en $y = 0$:

$$\sigma_{xy} = \frac{T}{S} = 10 \text{ MPa} \quad \text{ou} \quad \sigma_{xy, \max} = \frac{3T}{2S} = 15 \text{ MPa}$$

Outre l'écart important entre ces deux modélisations (50 %), il faut noter que la valeur de cette contrainte est de l'ordre de la moitié de la contrainte longitudinale maximale. Contrairement à l'usage en RDM, le faible élanement de cette poutre ne permet pas de négliger l'influence du cisaillement.

- En RDM, les critères de limite élastique s'écrivent :

- pour Tresca, $\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} < \sigma_e$;
- pour von Mises, $\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} < \sigma_e$.

Commenter le dimensionnement du levier en fonction des contraintes calculées aux questions précédentes et des caractéristiques mécaniques, qui, relevées lors d'un essai quasi statique de traction, pour l'acier doux utilisé pour le levier (2), sont les suivantes : $\sigma_e = 320 \text{ MPa}$; $R_m = 440 \text{ MPa}$; $A \% > 17$.

Le critère de Tresca est le plus sévère, et nous ne présenterons que cette application numérique. Les contraintes longitudinales et de cisaillement maximales sont du même ordre, mais pas aux mêmes points :

- en $x = 110 \text{ mm}$ sur le bord, on a $\sigma_{xx} = 30 \text{ MPa}$ et $\sigma_{xy, \max} = 0 \text{ Mpa}$, d'où $\sigma_{\text{eq}} = 30,3 \text{ Mpa}$;
- en $x = 0 \text{ mm}$ sur la fibre neutre, on a $\sigma_{xx} = 0 \text{ MPa}$ et $\sigma_{xy, \max} = 15 \text{ Mpa}$, d'où $\sigma_{\text{eq}} = 29,5 \text{ Mpa}$.

Ces deux valeurs sont très voisines, la section où σ_{xx} est maximale n'est donc pas la section la plus sollicitée. Toutefois, dans les deux cas, si l'on compare la contrainte effectivement appliquée avec la limite élastique du matériau, on obtient un ratio de l'ordre de 10. Ce qui semble être un très large coefficient de sécurité. Nous verrons par la suite qu'une étude plus fine tempère cette conclusion.

- On cherche à déterminer la flèche δ au droit de la charge F . Quelles difficultés calculatoires apparaissent dans cette détermination ?

La recherche de la flèche ou de la déformée, $y = v(x)$ étant l'équation de la ligne moyenne déformée de la poutre, se fait en intégrant la relation de comportement de flexion :

$$v''(x) = \frac{M_f(x)}{EI(x)}$$

Il faut préciser que cette relation suppose que l'on néglige l'influence du cisaillement dans la déformée, ce qui est ici une approximation limite. Nous avons vu que les contraintes longitudinales et de cisaillement sont du même ordre, et leurs effets sur la déformée doivent se cumuler.

La variation de section donne un moment quadratique qui dépend de x , et l'intégration est plus délicate que dans les exer-

cices traditionnels de RDM. Il s'agit donc d'intégrer deux fois l'expression ci-dessous pour obtenir la flèche :

$$\begin{aligned} v''(x) &= \frac{M_f(x)}{EI(x)} = \frac{12 FL}{Ebh_0^3} \cdot \frac{\xi}{(1+(k-1)\xi)^3} \\ &\Downarrow \\ v'(x) &= \frac{12 FL^2}{Ebh_0^3} \cdot \left(\text{Cte} - \frac{1+2(k-1)\xi}{2(k-1)^2(1+(k-1)\xi)^2} \right) \\ &\Downarrow \\ v(x) &= \frac{12 FL^3}{Ebh_0^3} \cdot \left(\text{Kte} + \text{Cte} \cdot \xi - \frac{1}{(k-1)^3} \left(\frac{1}{2(1+(k-1)\xi)} + \text{Ln}(1+(k-1)\xi) \right) \right) \end{aligned}$$

En exprimant que le déplacement $v(x)$ et la pente $v'(x)$ sont nulles en $x = L$ (ou $\xi = 1$), on détermine les constantes d'intégration Cte et Kte . En remplaçant dans les expressions précédentes et en prenant la valeur de $v(x)$ en $x = 0$, on obtient, après application numérique, un déplacement de $58 \mu\text{m}$ du point d'application de la charge sous l'effet de la force F . Ce qui constitue un levier dont la raideur à la flexion est élevée :

$$K = F/\delta = 225 \text{ N}/\mu\text{m}.$$

Calcul des contraintes par la mécanique des milieux continus

Sur le même modèle que précédemment (sans trous et à l'encastrement parfait), on souhaite déterminer une solution MMC. C'est-à-dire qui satisfasse à l'ensemble des équations de la mécanique. Puisqu'il n'est pas possible d'obtenir une solution analytique sur cette géométrie en trapèze, le problème est résolu numériquement par éléments finis. En annexe 1, on trouve les résultats du calcul par éléments finis réalisé en supposant un état de contraintes planes. Dans cette partie, on demande de commenter ces résultats en répondant aux questions qui suivent.

- Comparer la répartition des contraintes σ_{xx} avec les contraintes linéaires en y de la RDM. Quelles divergences peut-on observer entre ces deux calculs ?

On peut observer que les lignes isocontraintes sont assez régulièrement réparties dans la zone centrale : la linéarité est assez bien vérifiée. Par ailleurs, les contraintes maximales varient de $-30,35$ à $+30,35 \text{ Mpa}$, ce qui correspond précisément (moins de 0,5 % d'écart) au résultat RDM.

Lorsque l'on se rapproche des bords, soit de l'encastrement soit de la surface de chargement, on observe que les distributions ne sont plus tout à fait linéaires : des effets de bord viennent perturber la solution « classique ». Nous précisons plus loin les origines de ces effets.

- Comparer les contraintes σ_{yy} qui sont supposées nulles en RDM. Établir leur origine en supposant σ_{xx} connu sur le bord incliné du levier de commande.

On observe que les contraintes σ_{yy} ne sont pas exactement nulles. Dans la zone centrale, où la répartition de σ_{xx} est du même type qu'en RDM, la contrainte σ_{yy} est faible mais non nulle. Cela provient des conditions limites sur les bords libres inclinés. Les conditions limites en MMC s'écrivent : $\underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{0}$.

La normale a deux composantes dans le plan (X, Y) , ce qui donne :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} \sin \alpha - \sigma_{xy} \cos \alpha &= 0, \\ \sigma_{xy} \sin \alpha - \sigma_{yy} \cos \alpha &= 0. \end{aligned}$$

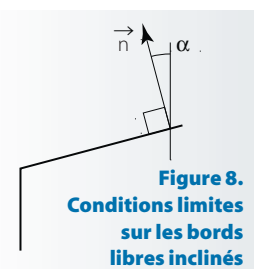


Figure 8.
Conditions limites sur les bords libres inclinés

Pour une contrainte σ_{xx} de 30 MPa sur le bord, on tire les valeurs des contraintes σ_{xy} et σ_{yy} sur le même bord :

$$\sigma_{xy} = \sigma_{xx} \tan \alpha = 7,1 \text{ Mpa,}$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{xx} \tan^2 \alpha = 1,7 \text{ Mpa.}$$

Ce qui correspond assez précisément à la valeur obtenue dans la zone centrale du graphe σ_{yy} (voir la coupe B dans l'annexe 1). Notons que, sur le bord inférieur, l'inclinaison symétrique de la normale et la valeur négative de σ_{xx} conduisent à une valeur de σ_{yy} de -1,7 MPa alors que σ_{xy} est toujours égal à +7,1 MPa. Plus près de l'encastrement ou de la surface de chargement, la distribution de contrainte σ_{yy} est assez différente ; nous en reparlerons dans l'étude des effets de bord.

De plus, la condition de bord libre conduit aussi à une contrainte σ_{xy} non nulle sur les flancs inclinés. Par conséquent, la valeur maximale sur la fibre neutre est plus faible que celle évaluée en RDM avec l'approximation parabolique, mais plus élevée que celle évaluée avec l'approximation constante. L'erreur sur les valeurs maximales est de :

$$E\% = \frac{\sigma_{xy}^{RDM} - \sigma_{xy}^{MMC}}{\sigma_{xy}^{moy}} = 20\%$$

Cet écart est plus faible que celui que l'on peut observer d'une modélisation RDM à l'autre pour la contrainte tangentielle. Compte tenu de la simplicité des calculs, l'approximation RDM reste un bon ordre de grandeur de ce point de vue. Néanmoins, nous allons expliquer les raisons de cette divergence et peut-être trancher entre les deux modèles RDM.

- Comparer les contraintes σ_{xy} avec les approximations classiques de la RDM. On justifiera :
 - que ces contraintes sont sensiblement paraboliques en y ;
 - qu'elles sont non nulles sur les bords $\pm h(x)$;

– que le sens de la concavité de la parabole peut changer d'une abscisse x à l'autre.

Le deuxième point a déjà été vu à la question précédente : les conditions limites sur la face inclinée d'un angle α impliquent des valeurs non nulles sur le bord. Les deux autres points peuvent être mis en évidence à l'aide des équations d'équilibre. En MMC, sans force de volume ni effet d'inertie, les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\vec{\text{div}} \underline{\underline{\sigma}} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Si la solution RDM est valide dans la zone centrale, on peut développer la première équation d'équilibre. On obtient :

$$-\frac{\partial(M_f/I)}{\partial x} y + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \Rightarrow \sigma_{xy} = \frac{\partial(M_f/I)}{\partial x} \frac{y^2}{2} + f(x)$$

La fonction f(x) est identifiée à partir des conditions sur les bords $y = \pm h(x)/2$, et on obtient bien une solution parabolique dans l'épaisseur. Le moment fléchissant croît en x de même que le moment quadratique I. Le graphique de la figure 10 montre l'évolution du rapport M_f/I qui croît dans un premier temps, puis décroît.

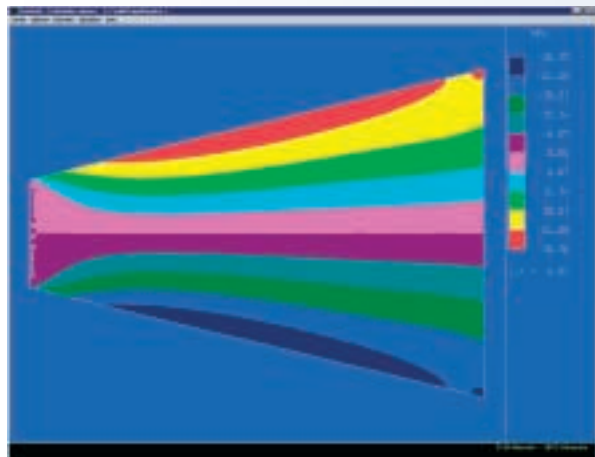
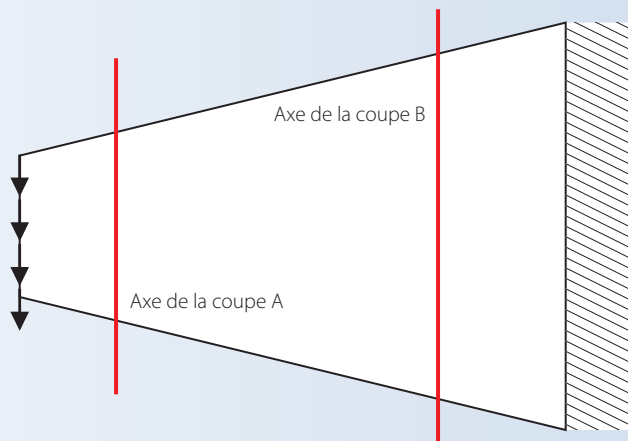
$$\frac{M_f(x)}{I(x)} = \frac{12 FL}{bh_0^3} \cdot \frac{\xi}{(1+(k-1)\xi)^3} \Phi(\xi)$$

La section où $\partial(M_f/I)/\partial x$ change de signe est située en $x = 55 \text{ mm}$ ($\xi = 0,25$) et correspond bien à la section où σ_{xy} est constante dans le graphe des isocontraintes. Les concavités sont différentes de part et d'autre de cette section.

ANNEXE 1

Calculs par éléments finis sur poutre trapézoïdale

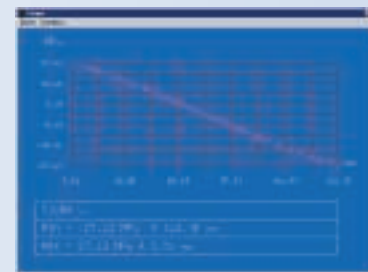
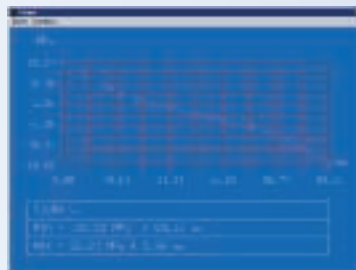
Les calculs ont été réalisés avec le logiciel RDM5 développé par Yves Debard de l'IUT du Mans



◀ Isocontraintes longitudinales σ_{xx}

▼ Coupe A

▶ Coupe B



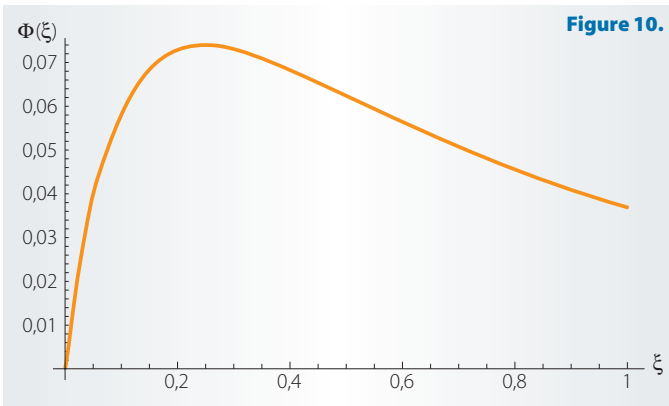


Figure 10.

Une fois de plus, c'est parce que la section est variable que les distributions de contraintes RDM sont prises en défaut. Au niveau de la section $x = 55 \text{ mm}$, la distribution de contrainte tangentielle est uniforme : c'est donc la meilleure approximation. Mais, dès que l'on s'éloigne de cette section dans un sens ou dans l'autre, le profil des contraintes tangentielles devient parabolique. L'étude précédente montre que, si la section avait été uniforme, alors le profil serait identique dans toutes les sections et correspondrait très exactement au modèle :

$$\sigma_{xy} = \frac{T}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

C'est donc vers ce dernier que penche notre préférence, même si l'on s'éloigne de la simplicité proposé par Bernoulli.

- Justifier les irrégularités que l'on peut observer dans les répartitions de contraintes au voisinage de l'encastrement ($x = L$) et

de la face ($x = 0$) sur laquelle on applique la charge répartie verticale constante de résultante égale à F .

Dans les deux cas, on a affaire à ce que l'on qualifie d'effets de bord. D'après Saint-Venant, à torsion résultant équivalent, dès que l'on est loin des liaisons ou zone d'application de charge, ces effets s'estompent et la solution « régulière » devient prépondérante. Dans le cas de la flexion, la solution régulière est celle pour laquelle σ_{xx} est linéaire en y , ce qui est effectivement le cas dans la zone centrale, mais moins vrai lorsque l'on se rapproche des extrémités de la poutre.

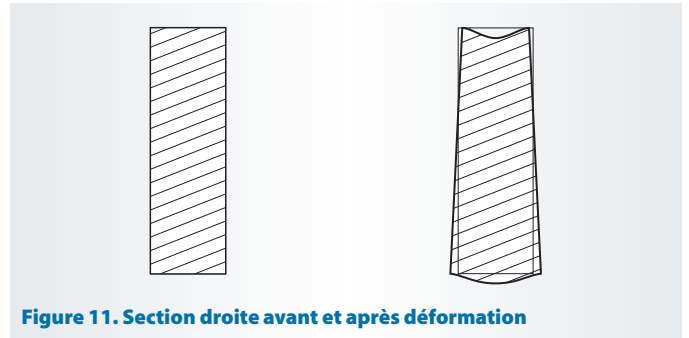
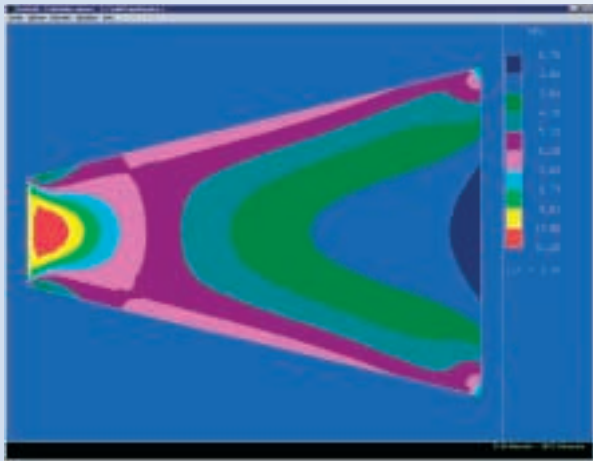


Figure 11. Section droite avant et après déformation

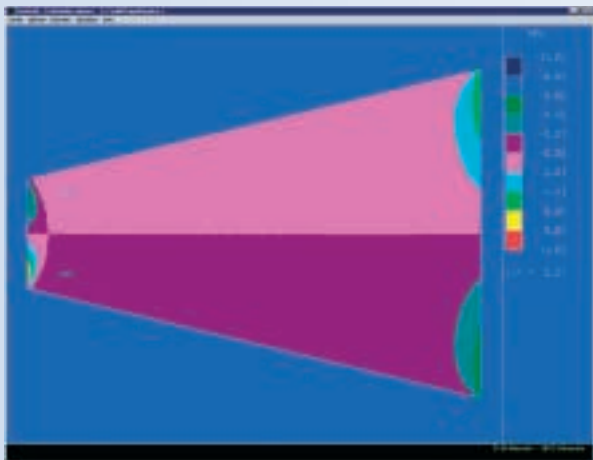
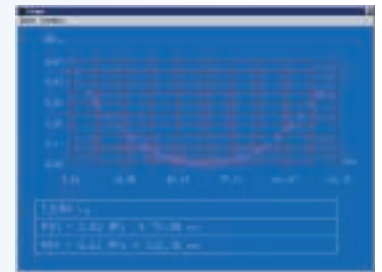
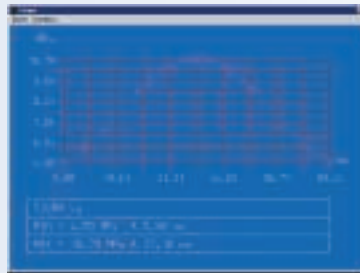
Considérons d'abord le cas de l'encastrement. Lors de la flexion de la poutre, les génératrices de la partie supérieure sont tendues, alors que celles de la partie inférieures sont comprimées. Il s'ensuit un effet de gonflement transversal de la section droite dans la partie basse (comprimée) et un effet de contraction dans la partie haute (tendue). La section tend à se mettre dans la configuration déformée illustrée figure 11.



◀ Contraintes de cisaillement σ_{xy}

▼ Coupe A

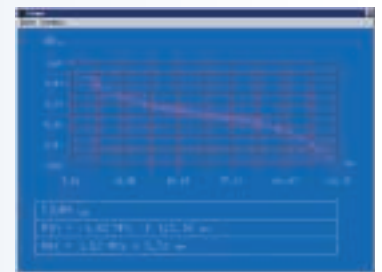
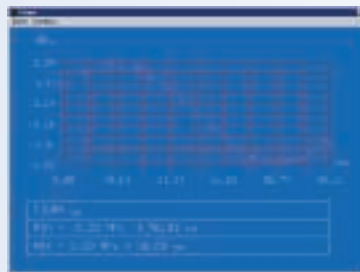
Coupe B ▶



◀ Contraintes σ_{yy}

▼ Coupe A

Coupe B ▶



Au niveau de l'encastrement, cette disposition n'est pas compatible avec un déplacement nul de tous les points de la section encastree. Des contraintes viennent se superposer au champ « régulier » pour empêcher les déplacements de la face encastree : il faut notamment des contraintes σ_{yy} positives pour étirer la partie haute qui tend à se contracter dans la direction Y. De même, il faut des contraintes σ_{yy} négatives dans la partie basse pour comprimer la section qui tend à se dilater dans la direction Y.

Le champ de contraintes supplémentaires doit aussi vérifier les équations d'équilibre ; ainsi les contraintes σ_{yy} dont nous venons de parler sont à l'origine de perturbations dans la répartition des contraintes σ_{xx} et σ_{xy} , qui ne sont pas tout à fait linéaires ni paraboliques près du bord encastree.

Considérons maintenant le cas de la surface de chargement. Les forces concentrées n'existent pas en MMC : elles conduisent à des contraintes infinies et n'ont pas de sens physique. Pour le calcul par éléments finis, nous avons choisi de distribuer la charge F uniformément sur la face $x = 0$. On obtient donc une répartition de charge tangentielle q d'intensité F/S (soit 9,8 N). Or, d'après les équations d'équilibres, la solution régulière en $x = 0$ est :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{M_f}{I} y \\ \sigma_{xy} = \frac{\partial(M_f/I)}{\partial x} \left(\frac{y^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right) \end{cases}$$

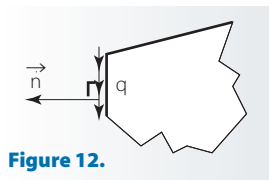


Figure 12.

Pour vérifier les conditions limites sur la face $x = 0$, la contrainte σ_{xx} doit être nulle, ce qui est le cas car

M_f est nul. De plus, la contrainte σ_{xy} doit être égale à q, ce qui ne peut pas être vérifié puisque σ_{xy} est parabolique.

Dans ces conditions, le champ de contrainte régulier ne vérifie pas les conditions limites pour σ_{xy} , et il en découle une perturbation qui se propage aux autres composantes de manière à ce que les équations d'équilibre soient satisfaites. Au voisinage de la face $x = 0$, la distribution de contraintes σ_{xy} va passer de constante à parabolique (voir la figure 13). Dans l'épaisseur, on peut donc distinguer deux zones : une zone centrale ($-y^* < y < +y^*$), dans laquelle σ_{xy} va augmenter lorsque l'on passe de $x = 0$ à $x > 0$; une zone constituée des deux parties extrêmes de la hauteur de la poutre ($y < -y^*$ et $y > y^*$), dans laquelle σ_{xy} décroît avec x.

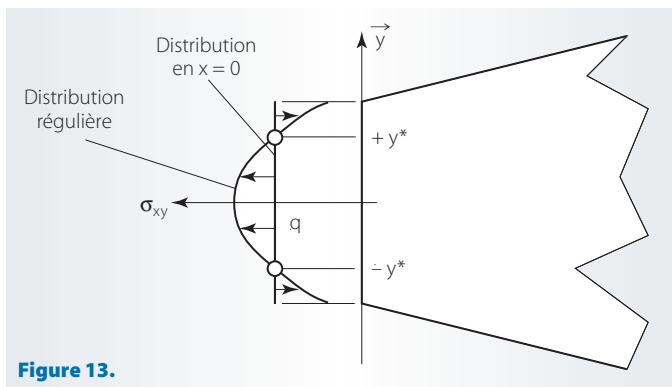


Figure 13.

D'après la seconde équation d'équilibre, les variations de σ_{yy} suivant y seront opposées aux variations de σ_{xy} suivant x. Sur la coupe A du graphique des isocontraintes σ_{yy} (voir l'annexe 1), on distingue effectivement une évolution de σ_{yy} , d'abord croissante puis décroissante entre deux valeurs de y symétriques par rapport à $y = 0$, et enfin une nouvelle zone où σ_{yy} est croissante. Un raisonnement analogue sur la première équation d'équilibre permet d'expliquer les perturbations de σ_{xx} au voisinage de la face $x = 0$.

Calcul des contraintes par la méthode des éléments finis

On se propose de comparer les résultats de la modélisation précédente avec ceux d'un calcul élastique effectué par la méthode des éléments finis sur une géométrie plus proche de celle du levier (2). Pour cela, on modélise la géométrie du levier (voir la figure 4), on maille la forme correspondante et on précise des conditions limites en effort et en déplacement le plus proches possible de la réalité technologique :

- les trois cylindres qui correspondent aux alésages pour le passage des vis sont bloqués en déplacement. Cette condition moins sévère que l'encastrement devrait être moins rigide comparée à la première modélisation ;

- pour contourner le problème de l'application de la charge, on impose un déplacement δ vertical à l'ensemble de l'alésage qui reçoit l'axe support de bielle (en A). Le problème est élastique et linéaire, on effectue donc un premier calcul avec une valeur quelconque de δ^* (par exemple 0,1 mm). Le calcul nous donne une certaine résultante F^* (par exemple 17 000 N) : il ne reste plus qu'à relancer le calcul avec une nouvelle valeur de δ .

$$\delta = \frac{F}{F^*} \delta^*$$

Dans le cas présent, pour obtenir une résultante F de 13 000 N, on a imposé un déplacement δ de 77 μm . L'annexe 2 donne les répartitions des contraintes σ_{xx} , σ_{xy} , σ_{yy} .

- Quelles sont les principales divergences par rapport au calcul précédent ? Développer la réponse sur les répartitions des contraintes σ_{xx} , σ_{xy} , σ_{yy} , les conditions limites en effort et en déplacement, les effets de bord et les concentrations de contraintes.

Le déplacement est bloqué dans les alésages de passage des vis de blocage, et globalement la poutre va être un peu moins rigide qu'avec l'encastrement proposé précédemment. En effet, cette manière de bloquer le déplacement augmente légèrement le bras de levier OA. L'énoncé précise que la flèche vaut 77 μm , soit une différence de 32 % par rapport au cas de l'encastrement.

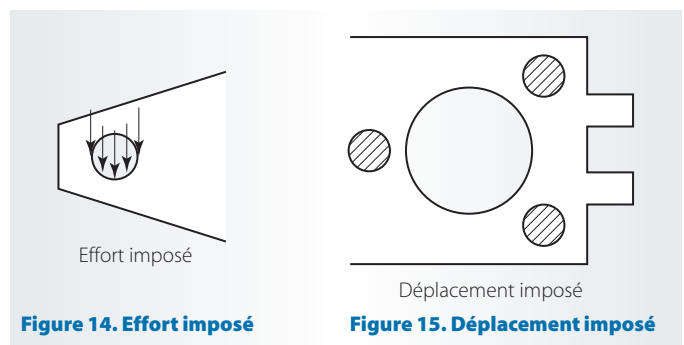


Figure 14. Effort imposé

Figure 15. Déplacement imposé

La localisation des conditions en déplacement induit des concentrations de contraintes au voisinage de ces trous.

- Rappeler l'expression de la contrainte équivalente de von Mises. Quels sont les points critiques au sens de von Mises ? Commenter l'écart entre le coefficient de sécurité obtenu par la MMC et celui obtenu par la modélisation RDM.

La contrainte équivalente de von Mises est définie par l'expression :

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \text{trace}(\underline{\underline{\sigma}}_D^2)}$$

On peut aussi l'exprimer en fonction des composantes de la matrice des contraintes :

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2} \{ (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{xz}^2) \}}$$

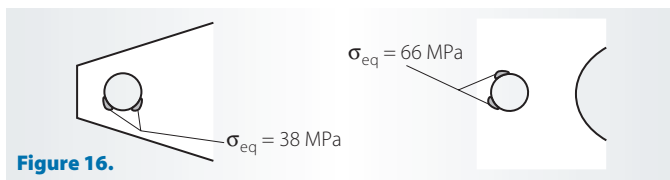
Dans le cas des contraintes planes, l'expression est réduite car tous les termes contenant un indice z sont nuls :

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}^2 + 3\sigma_{xy}^2}$$

Sur les graphes des isocontraintes σ_{xx} , σ_{yy} et σ_{xy} (voir l'annexe 2), il apparaît des concentrations au niveau de l'alésage pour le passage des vis de fixation et au niveau de l'axe où la charge est appliquée. Pour chacune de ces deux zones, on peut calculer la contrainte équivalente de von Mises.

Alésage pour le passage de l'axe de liaison avec les biellettes : les valeurs de σ_{xy} sont faibles dans les zones où σ_{xx} et σ_{yy} sont maximales. Ces zones sont situées de part et d'autre de l'alésage dans la partie basse. Notons que lorsque σ_{xx} est positif alors σ_{yy} est négatif et vice versa. Les deux contraintes sont de l'ordre de 38 MPa. En conséquence de quoi, la contrainte équivalente reste de l'ordre de 38 MPa près de la zone d'application de la charge.

Alésage pour la fixation sur la seconde partie du levier : les valeurs de σ_{xy} sont faibles dans les zones où σ_{xx} et σ_{yy} sont maximales. Ces zones sont situées de part et d'autre de l'alésage dans la partie gauche. Cette fois, lorsque σ_{xx} est positif, σ_{yy} est aussi positif. Même chose lorsque σ_{xx} est négatif. Les deux contraintes sont de l'ordre de 38 MPa. En conséquence, la contrainte équivalente passe à environ $\sqrt{3} \times 38$, soit 66 Mpa, près de la zone d'application de la charge.



Ces concentrations de contraintes restent localisées au voisinage des alésages (principe de Saint-Venant). Néanmoins, le calcul fait apparaître des valeurs assez fortes dans ces zones. Le facteur de concentration de contraintes est donc assez élevé :

$$K_T = \frac{66}{30} \approx 2,2$$

En conclusion, le facteur de sécurité, de l'ordre de 10, descend à 4,5 dans ces zones, ce qui est déjà beaucoup moins large.

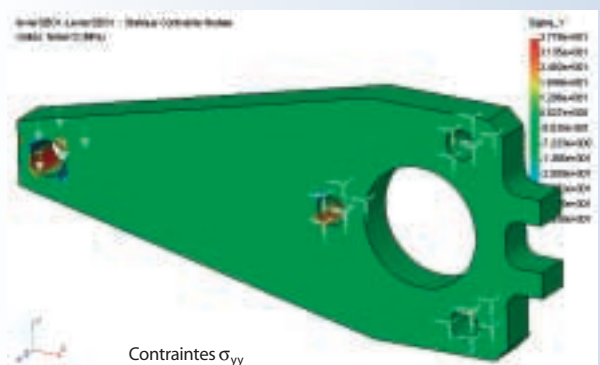
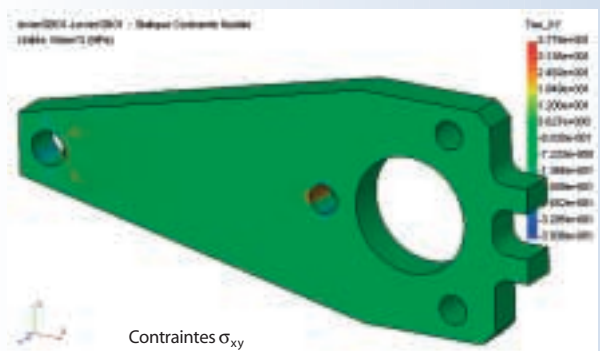
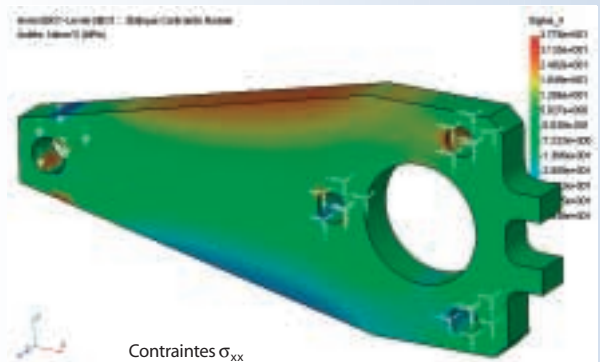
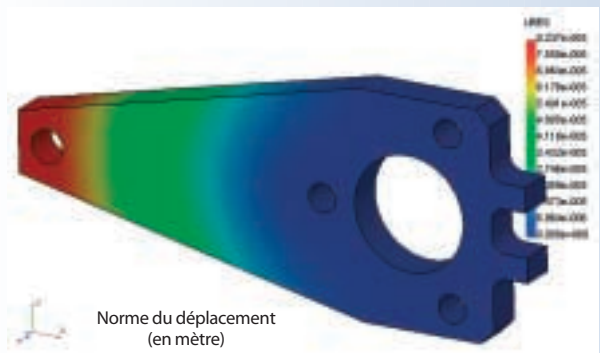
Conclusions

La RDM (théorie approchée valable pour les milieux élancés) donne des résultats comparables à ceux obtenus par une méthode qui vérifie les équations de la théorie de l'élasticité tridimensionnelle. Les valeurs de contraintes obtenues par les deux premières modélisations sont du même ordre de grandeur, et, même si quelques effets de bord ne sont pas pris en compte par la RDM, celle-ci donne dans les zones régulières d'excellents résultats. Le faible élanement n'est pas rédhibitoire et ne constitue pas un frein à l'utilisation de cet outil.

Avec la prise en compte plus fine de la manière dont la charge s'applique et dont les déplacements sont effectivement bloqués, il apparaît des concentrations de contraintes dont le calcul est tout à fait hors de portée de la RDM. La « sécurité » relative du calcul des premières modélisations est réduite plus de deux fois par l'analyse par éléments finis sur la géométrie réelle du levier. Le coefficient 4,5 restant peut être jugé satisfaisant, mais c'est oublier la nature des sollicitations.

Comme indiqué dans le préambule, la sollicitation subie par le levier n'est pas quasi statique comme pour l'essai qui a servi à déterminer la résistance élastique σ_e . La sollicitation est périodique. Dans ces conditions, la valeur de comparaison devrait

ANNEXE 2 *Calculs par éléments finis sur le levier*



plutôt être la limite d'endurance du matériau, à déterminer comme asymptote de la courbe de Woehler. Sans autres résultats issus d'essais de fatigue, on peut estimer cette limite d'endurance entre 0,3 ou 0,4 fois la limite élastique : soit entre 100 et 130 MPa.

En conclusion, notre coefficient de sécurité « très large » n'est plus que de 2, ce qui est juste suffisant pour compenser d'éventuelles surcharges que l'étude dynamique n'aurait pas pris en compte : résistances dans les liaisons ou irrégularité de fonctionnement, chocs à l'entrée du galet dans la piste de came ou autre phénomène difficile à estimer. ■