

Le point sur les pressions de contact entre les solides (première partie)

BRUNO LOUARN, CHRISTIAN TEIXIDO¹

Dans tous les mécanismes, la transmission des efforts en fonctionnement se fait par l'intermédiaire des surfaces de liaisons. Le problème de la détermination des pressions de contact au niveau de ces surfaces est complexe. Il met en jeu leur géométrie et la nature de la déformation des matériaux en présence.

MOTS-CLÉS mécanique, liaison, modélisation, postbac

En pratique, au bureau d'études, on peut se servir d'un certain nombre de modèles simples qui permettront d'obtenir des résultats dans le cas d'un contact où la surface commune est petite (contact étroit) et dans celui où elle est grande (contact large ou étendu), l'objectif final restant pour le concepteur le dimensionnement des liaisons.

LE CONTACT ÉTROIT : PONCTUEL OU LINÉIQUE (THÉORIE DE HERTZ)

La théorie de Hertz permet de déterminer :

- les dimensions de la surface de contact ;
- le rapprochement des deux solides ;
- la pression de contact maximale ;
- les contraintes engendrées en surface et en profondeur.

Les résultats de cette théorie ne sont pas sans erreurs, mais ils donnent un ordre d'idée qui permet avec l'expérience de dimensionner les liaisons ponctuelles ou linéiques, et de choisir les matériaux et les traitements thermiques adaptés (voir annexe).

Deux solides sont en contact ponctuel ou linéique lorsqu'ils sont tangents en un point ou suivant un segment de droite.

Pratiquement, on rencontre ce type de contact : au contact came-poussoir, au contact d'un galet sur un rail, aux appuis des pièces dans les montages d'usinages, dans les engrenages, dans les roues libres, etc.

Hypothèses

On suppose que (figure 1) :

- l'aire de contact est très petite par rapport aux surfaces latérales respectives des solides en contact ;
- les rayons de courbures sont connus au point de contact ;
- les corps sont élastiques, homogènes et isotropes ;
- la surface de contact est plane ; le contact se fait sans frottement et les solides sont sans mouvement relatif.

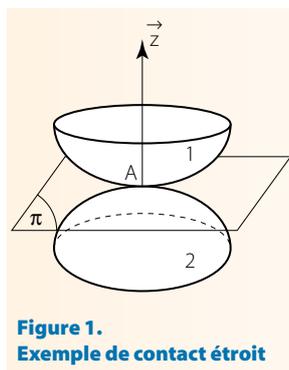


Figure 1. Exemple de contact étroit

$$\{T_{2/1}\}_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_A & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_A \cdot \vec{z} & \vec{0} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les matériaux composant les corps sont caractérisés par leurs modules d'élasticité longitudinale : E_1 et E_2 .

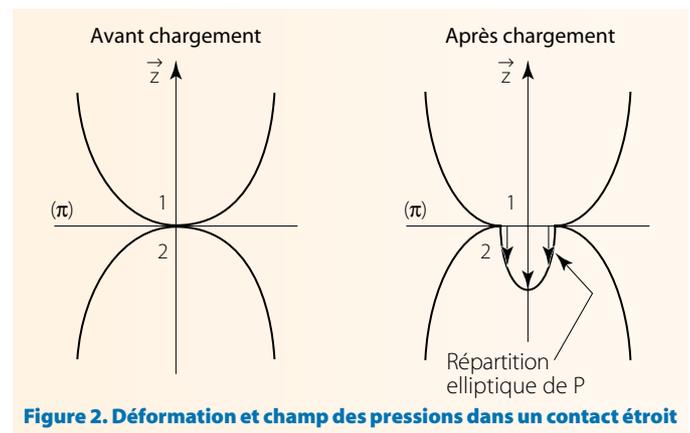


Figure 2. Déformation et champ des pressions dans un contact étroit

Les résultats

Tout d'abord, rappelons que :

- la surface de contact appartient au plan tangent (π) des deux surfaces ; elle dépend de la nature des surfaces en contact ;
- le rapprochement δ des deux solides est la différence de distance prise perpendiculairement au plan (π) de deux points situés loin des zones de déformation, entre la position initiale et la position finale ; il dépend lui aussi de la nature des surfaces en contact ;
- la répartition du champ de pression de contact est modélisée :
 - de manière uniforme dans le sens de la longueur et selon une demi-ellipse dans le sens de la largeur pour un contact linéique,
 - selon une demi-ellipse dans n'importe quel sens de regard pour un contact ponctuel (figure 2).

On définit :

- le rayon de courbure relatif r_r : $\frac{1}{r_r} = \frac{1}{r_1} \pm \frac{1}{r_2}$ (figures 3 et 4)

signe + pour une tangence extérieure
signe – pour une tangence intérieure ;

- le module d'élasticité E pour les calculs : $\frac{1}{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right)$

1. Professeurs de construction mécanique au lycée Jean-Jaurès d'Argenteuil.

Figure 3. Contact cylindre-cylindre

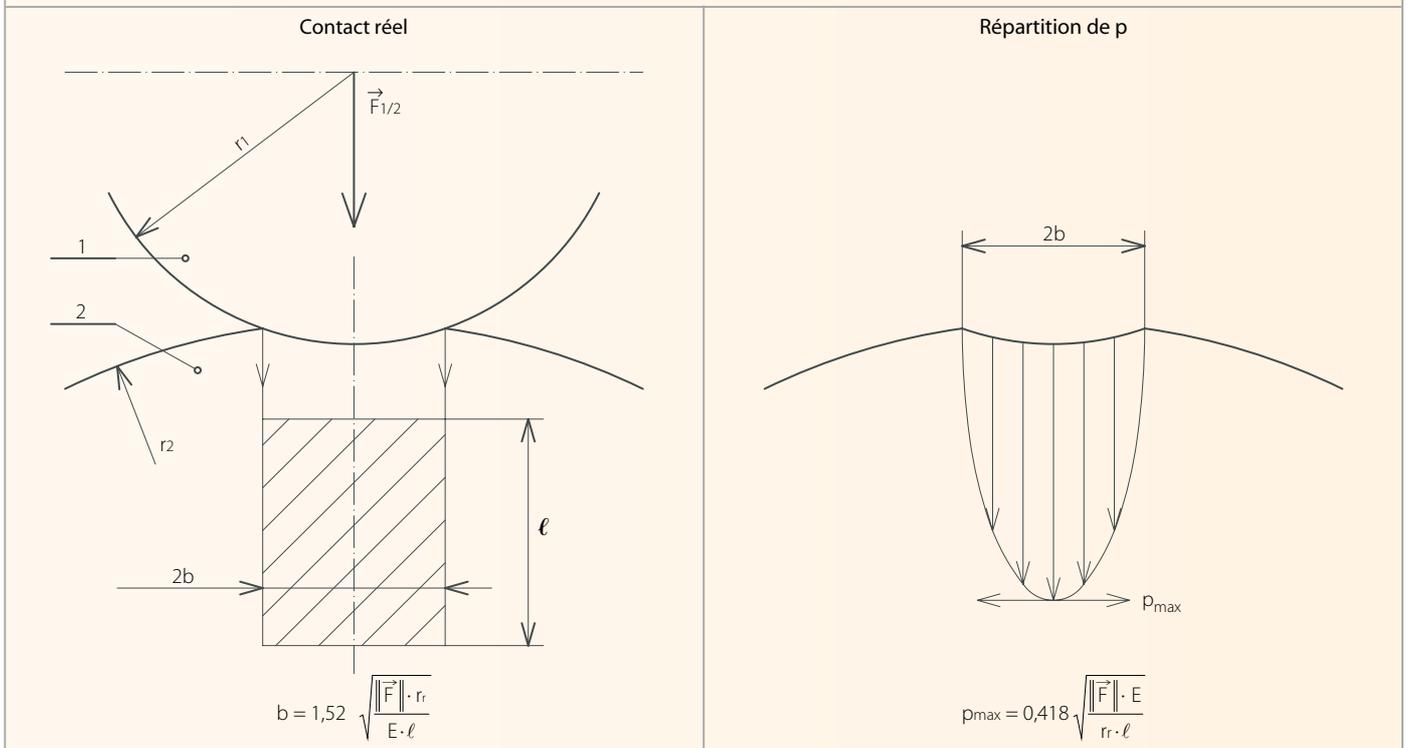
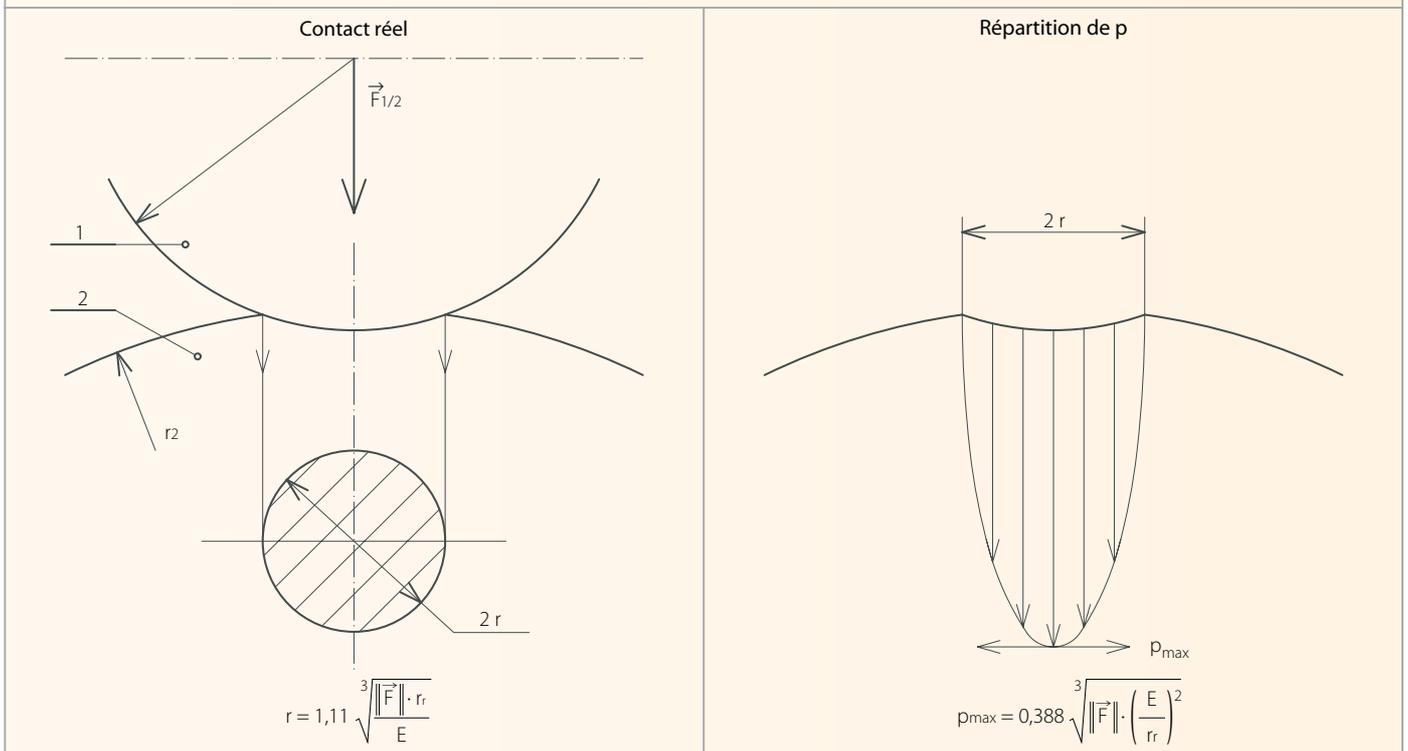


Figure 4. Contact sphère-sphère



Les conséquences sur les contraintes engendrées

Contraintes en surface

En surface, la contrainte normale est égale à la pression de contact. Pour dimensionner et choisir les matériaux devant servir à réaliser les surfaces de contact, la première étape consiste à comparer la pression maximale à la pression admissible par le matériau (fournie par les laboratoires d'essais).

$$p_{maxi} \leq p_{admissible}$$

N.B. : cette pression admissible s'appelle aussi pression de matage.

Valeurs de pressions admissibles

Le tableau ci-dessous donne les pressions limites admissibles entre deux pièces mobiles ou en mouvement dans des conditions d'utilisation déterminées.

Contact entre pièces fixes	Pression admissible (en MPa)
Sur acier ou fonte sans matage	80 à 100
Sur acier ou fonte avec léger matage (ou sur béton)	200 à 250
Contact entre filets (ex.: vis d'assemblage)	15 à 30

Contact entre pièces mobiles	Pression admissible (en MPa)
Contact entre filets (mobiles en fonctionnement)	2 à 6
Articulation en porte-à-faux	0,5 à 8
Articulation en chape (ou fourchette)	1 à 25
Paliers rigides avec flexion de l'arbre; acier/fonte	1 à 1,5
Paliers à rotule, acier sur bronze à graissage intermittent	1,5 à 2,5
Paliers acier trempé/bronze; lubrification sur film d'huile	2,5 à 4
Paliers rectifiés de bielle; graissage normal ou sans pression	6 à 9 ou 9 à 15
Paliers de moteur (automobile, aviation); rotules de coussinets	10 à 25

Contraintes en profondeur

Une deuxième étape serait de vérifier que les contraintes en profondeur ne dépassent pas les limites admises par le matériau. Nous ne rentrerons pas dans cette étude car elle nécessite des connaissances en mécanique qui sortent du cadre de l'analyse (théorie de L'élasticité et critère de Tresca entre autres).

LE CONTACT EN GRANDE SURFACE (LARGE OU ÉTENDUE)

Lorsque l'étendue de la surface nominale devient importante, le contact entre les pièces se fait de manière aléatoire sur les aspérités. Quantifier avec précision les pressions réelles reste un problème non résolu.

Pour pallier ce manque de connaissances, le concepteur du bureau d'études utilise certains modèles simples, la validation de ses résultats se faisant souvent à partir d'essais.

Le premier modèle : pression uniforme

Les hypothèses et les résultats

Ce modèle suppose que la répartition des pressions de contact est uniforme sur toute la surface de contact.

$$p(M) = p_0 = \text{constante}$$

Ceci impose :

- une géométrie parfaite des surfaces en contact (les défauts macro et micro-géométriques sont négligés) ;

- des solides indéformables ;
- une liaison sans jeu ;
- un mode de chargement qui donne un torseur à résultante parfaitement centré.

L'avantage de ce modèle réside dans le fait que la pression p_0 se calcule aisément puisqu'elle est égale au quotient de la force appliquée par l'aire de la surface de contact projetée sur un plan perpendiculaire à cette force (figure 5).

$$p_0 = \frac{\|\vec{F}_{2/1}\|}{\text{Surface projetée}}$$

Pour dimensionner et choisir les matériaux devant servir à réaliser les surfaces de contact, on compare la pression de contact p_0 à la pression conventionnelle de matage (fournie par les laboratoires d'essais).

$$p_0 \leq p_{\text{matage}} (p_{\text{adm}})$$

Le cas des paliers lisses

Un palier lisse est un organe mécanique dont le rôle est de :

- supporter les charges appliquées à un arbre ;
- permettre la rotation de l'arbre autour d'un axe fixe.

On rencontre deux types de solutions réalisant des liaisons pivot ou pivot glissant.

Premier cas

La liaison est réalisée à partir de deux paliers « courts ». Pour les valeurs usuelles de jeu, le rapport L/D est pris pour chacun inférieur à 0,8 de manière à pouvoir leur associer un comportement de rotule ou de linéaire annulaire. De plus, les deux paliers sont séparés par une distance importante.

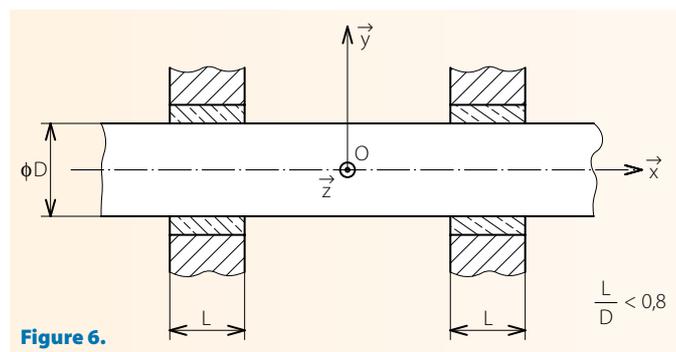


Figure 6.

En appelant G le centre géométrique de chaque liaison arbre-palier, les efforts appliqués par l'arbre sur le palier sont

Figure 5. Exemples de contacts en grandes surfaces et à pression uniforme

Surfaces	Couronne	Demi-cylindre	Demi-sphère
Action mécanique			
Pression p_0	$p_0 = \frac{\ \vec{F}_{2/1}\ }{\pi(R_2^2 - R_1^2)}$	$p_0 = \frac{\ \vec{F}_{2/1}\ }{D \cdot l}$	$p_0 = \frac{\ \vec{F}_{2/1}\ }{\pi R^2}$

représentables par un torseur qui s'écrit dans le repère $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

– dans le cas de la liaison linéaire annulaire parfaite:

$$\{T \text{ Arbre/Palier}\}_G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ Y_G & 0 \\ Z_G & 0 \end{bmatrix}$$

– dans le cas de la liaison rotule:

$$\{T \text{ Arbre/Palier}\}_G = \begin{bmatrix} X_G & 0 \\ Y_G & 0 \\ Z_G & 0 \end{bmatrix}$$

N.B.: Dans le cas de la rotule, la composante X_G est supportée par une surface latérale du palier et non par sa surface cylindrique (voir cas de la couronne).

Comme le chargement est centré et appartient au plan de symétrie du palier (G, \vec{y}, \vec{z}) , pour les deux liaisons précédemment citées, la pression en un point M est égale à:

$$p(M) = \frac{W}{D \cdot 1} \leq p_{adm} \quad \text{sachant que } W = \sqrt{Y_G^2 + Z_G^2}$$

Ce mode de détermination de la pression de matage est utilisé par les manufacturiers de bagues.

Second cas

La liaison est réalisée à partir d'un seul palier « long ». Pour les valeurs usuelles de jeu, le rapport L/D est pris supérieur à 1,5 pour conférer à l'ensemble le comportement d'une liaison pivot ou pivot glissant.

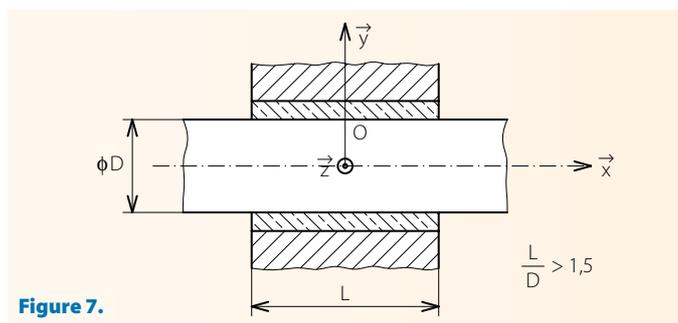


Figure 7.

Soit O le centre géométrique de la liaison, les efforts appliqués par l'arbre sur le palier sont représentables par un torseur qui s'écrit dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

– dans le cas de la liaison pivot glissant:

$$\{T \text{ Arbre/Palier}\}_O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ Y_o & M_o \\ Z_o & N_o \end{bmatrix}$$

– dans le cas de la liaison pivot:

$$\{T \text{ Arbre/Palier}\}_O = \begin{bmatrix} X_o & 0 \\ Y_o & M_o \\ Z_o & N_o \end{bmatrix}$$

N.B.: Dans le cas du pivot, la composante X_o est supportée par une surface latérale du palier et non par sa surface cylindrique (voir cas de la couronne).

Si le chargement est centré (cas très rare), on a alors:

– $W = \sqrt{Y_o^2 + Z_o^2}$ qui appartient au plan de symétrie du palier (O, \vec{y}, \vec{z}) ;

– $M_o = N_o = 0$.

On se retrouve dans le cas d'un palier « court »; la pression en un point M est égale à:

$$p(M) = \frac{W}{D \cdot 1} \leq p_{adm}.$$

Si le chargement est excentré, alors $M_o \neq 0$ et $N_o \neq 0$. La répartition des pressions de contact n'est plus uniforme: $p(M) \neq \text{constante}$. Ce cas sera développé dans le prochain numéro.

Le deuxième modèle: pression fonction de la déformation

Ce modèle suppose que l'un ou les deux solides se déforment et qu'il existe une relation entre la déformation $\delta(M)$ en un point de la surface de contact et la pression $p(M)$ en ce point.

Cette relation s'écrit: $p(M) = K \cdot \delta(M)^\alpha$.

K : coefficient lié à la rigidité des matériaux en contact.

α : coefficient qui traduit le comportement des matériaux en contact.

$\alpha = 1$ pour les matériaux métalliques.

$\alpha > 1$ pour les matières plastiques.

Ceci impose que:

- les surfaces en contact sont globalement parfaites;
- les solides sont globalement rigides à l'exception de la zone située au voisinage immédiat de la surface de contact;
- la liaison se fait sans ou avec jeu.

Le cas du contact plan

On ne prend en compte que la déformation locale d'un des deux solides; ainsi la surface plane avant déformation reste plane après déformation (figure 8).

On adopte $\alpha = 1$, d'où $p(M) = K \cdot \delta(M)$

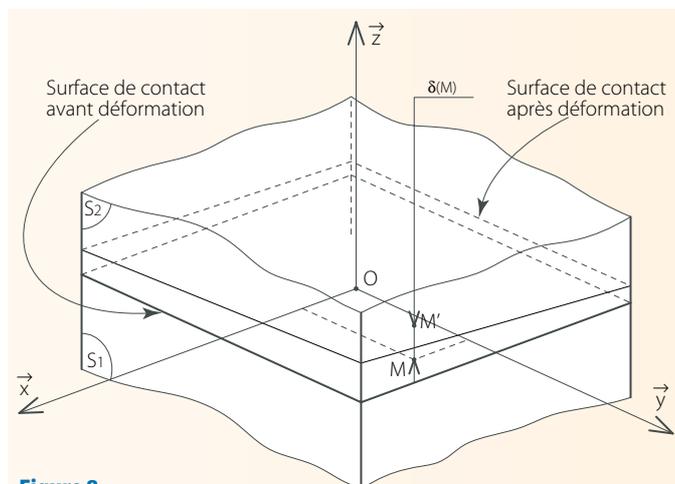


Figure 8. Déformation pour un contact plan

$\delta(M)$ est de la forme: $\delta(M) = Ax + By + C$,

d'où $p(M) = K \cdot \delta(M) = Kax + Kby + Kc = ax + by + c$.

La répartition des pressions de contact $p(M)$ est donc linéaire.

La détermination des coefficients a , b et c s'effectue à partir de l'expression du torseur d'efforts transmissibles correspondant à une liaison parfaite:

$$\{T_{\text{effort trans}}\}_O = \left\{ \begin{array}{l} \vec{Z} \\ \vec{L}x + M\vec{y} \end{array} \right\}_O$$

Il est égal au torseur d'action

$$\begin{aligned} \text{de contact, soit: } \vec{Z} &= \int_S -p(M)\vec{n}(M) \, dS \\ \vec{L}x + M\vec{y} &= \int_S \vec{OM} \wedge -p(M)\vec{n}(M) \, dS \\ p(M) &= ax + by + c. \end{aligned}$$

La normale au plan de contact s'écrit $\vec{n}(M) = -\vec{z}$.

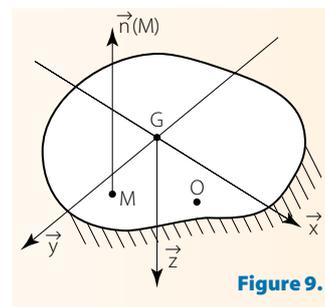


Figure 9.

$OM = x\vec{y} + y\vec{x}$ (si O appartient à la surface de contact)

$$\vec{OM} \wedge \vec{n}(M) = -x\vec{y} + y\vec{x}$$

$$Z = \int_S (ax + by + c) ds = a \int_S x dS + b \int_S y dS + c \int_S dS$$

$$L\vec{x} + M\vec{y} = \int_S [(x\vec{x} + y\vec{y}) \wedge (ax + by + c)] dS$$

$$L = a \int_S xy dS + b \int_S y^2 dS + c \int_S y dS$$

$$M = -a \int_S x^2 dS - b \int_S xy dS + c \int_S x dS$$

En se plaçant au centre de gravité de la surface de contact et en supposant que celle-ci est symétrique par rapport à l'un des deux axes (condition qui est vérifiée pour les surfaces de contact des liaisons usuelles), on a alors :

– les moments statiques $\int_S x dS = \int_S y dS = 0$;

– le produit d'inertie $\int_S xy dS = 0$.

$\int_S x^2 dS$ et $\int_S y^2 dS$ sont les moments quadratiques de la surface IG_y et IG_x . Ce qui nous donne :

$$Z = c s,$$

$$L = b IG_x,$$

$$M = -a IG_y.$$

L'expression de la pression pour un point M de coordonnées x et y par rapport à son centre de gravité s'écrit :

$$p(M) = -\frac{M}{IG_y} x + \frac{L}{IG_x} y + \frac{Z}{S}.$$

Recherchons le point central de cette surface ; c'est le point où l'axe central du torseur d'effort transmissible par la liaison coupe la surface de contact. Soit Q ce point :

$$\vec{M}(Q) = \vec{0} = \vec{M}(G) + Z\vec{z} \wedge \vec{GQ};$$

$$\text{Posons } \vec{GQ} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$$

$$\vec{M}(Q) = L\vec{x} + M\vec{y} + Z\alpha\vec{y} - Z\beta\vec{x};$$

$$\alpha = -\frac{M}{Z} \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{L}{Z}.$$

$$p(M) = \left[\frac{\alpha}{IG_y} x + \frac{\beta}{IG_x} y + \frac{1}{S} \right] Z$$

À partir de cette expression, on peut déterminer la pression de contact en tout point de la surface, si l'on connaît la valeur et la position de l'effort presseur.

Dans le calcul du contact plan, deux conditions doivent être vérifiées :

- le non-décollement des surfaces de contact (cas de liaison appui plan unilatérale, par exemple) ;
- la résistance de la surface à la pression de contact maximale.

Première condition

Pour avoir non-décollement, il faut que la pression de contact en tout point de la surface commune aux deux solides soit positive. Ce qui se traduit par la condition, si Z est positif :

$$0 \leq \left[\frac{\alpha}{IG_y} x + \frac{\beta}{IG_x} y + \frac{1}{S} \right].$$

x et y représentent les coordonnées du point du contour de la surface commune où le décollement risque de se produire.

Si l'on connaît la forme de la surface de contact, à partir de cette inéquation, on peut déterminer un domaine à l'intérieur duquel doit passer le glisseur Z pour que les deux surfaces restent totalement en contact. On appelle ce domaine le noyau central de non-décollement.

Exemple 1

La surface commune est plane rectangulaire (figure 10). À partir de l'inéquation précédente et de la forme de la surface, on a :

$$\frac{12\alpha}{ba^3} x + \frac{12\beta}{ab^3} y + \frac{1}{ab} \geq 0 \quad \text{car } S = ab; \quad IG_y = \frac{ba^3}{12}; \quad IG_x = \frac{ab^3}{12}$$

$$\frac{12\alpha}{a^2} x + \frac{12\beta}{b^2} y + 1 \geq 0.$$

Cette condition est vérifiée si le point central se trouve à l'intérieur du losange tracé sur la figure 10.

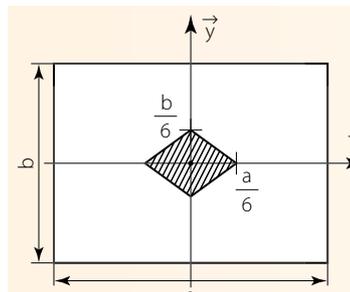


Figure 10. Contact plan, surface rectangulaire

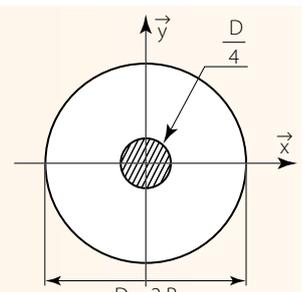
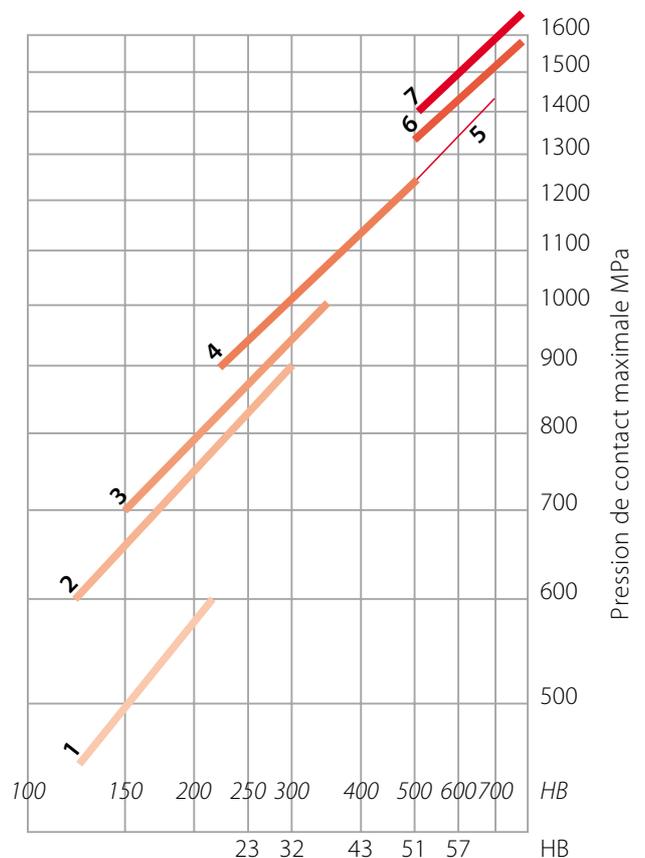


Figure 11. Contact plan, surface circulaire

ANNEXE

PRESSIION DE CONTACT MAXIMALE SUIVANT LES MATÉRIAUX CAS DES ENGRENAGES



- 1 Fontes
- 2 Aciers au carbone
- 3 Aciers alliés coulés
- 4 Aciers alliés forgés
- 5 + trempe superficielle
- 6 Aciers de nituration
- 7 Aciers de cémentation alliés

Ergot dans rainure

Fixe : 150 Mpa
Glissant sous charge : 10 Mpa

Vis de pression

Matage nul : 100 Mpa
Matage léger : 100 à 250 Mpa
Matage fort : 250 Mpa

Clavettes et cannelures

Conditions de fonctionnement	Mauvaises	Moyennes	Excellentes
Glissant sous charge	3 à 10	5 à 15	10 à 20
Glissant sans charge	15 à 30	20 à 40	30 à 50
Fixes	40 à 70	60 à 100	80 à 150

Figure 12. Exemples de répartition des pressions de contact

Liaisons	Glissière d'axe (O, \vec{x})	Appui plan de normale (O, \vec{y})
Actions mécaniques		
Répartition des pressions de contact		
Pression maximale	$p_{\max i} = \frac{6 \ \vec{M}_{o2/1}\ }{b \cdot l^2}$	$p_{\max i} = \frac{6 \ \vec{F}_{2/1}\ }{L \cdot l} \cdot \left[1 + 6 \left(\frac{d}{l} + \frac{c}{L} \right) \right]$ <p>(en P1)</p>

Exemple 2

La surface de contact est plane circulaire (figure 11).

$$S = \pi R^2; \quad IG_x = IG_y = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$\frac{4 \alpha}{\pi R^4} x + \frac{4 \beta}{\pi R^4} y + \frac{1}{\pi R^2} \geq 0;$$

$$\frac{4 \alpha}{R^2} x + \frac{4 \beta}{R^2} y + 1 \geq 0.$$

Cette condition est vérifiée si le point central se trouve à l'intérieur d'un cercle de rayon $R/4$.

Deuxième condition

On recherche les points de la surface où la pression de contact est maximale, ainsi on peut la comparer à la pression admissible par les matériaux ($p_{\max} \leq p_{\text{admissible}}$).

Naturellement, on se place dans le cas où la condition de non-décollement est remplie.

$$\left[\frac{\alpha}{IG_y} x + \frac{\beta}{IG_x} y + \frac{1}{S} \right] Z \leq p_{\text{admissible}}$$

Exemple

Pour la surface de contact rectangulaire :

$$p_{\max} = \left[1 + \frac{6 \alpha}{a} + \frac{6 \beta}{b} \right] \frac{Z}{ab}$$

Pour la surface de contact circulaire :

$$p_{\max} = \frac{Z}{\pi R^2} \left[1 + \frac{4}{R} \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)} \right]$$

La figure 12 synthétise la réflexion développée précédemment à propos de deux cas usuels d'appuis plans. ■