Optimisation d'un système de désenfumage

PREMIÈRE PARTIE

LUC CHEVALIER*, DAVID MAILLART**

Issu d'une collaboration industrielle entre l'École supérieure d'ingénieurs Paris-Est (Ésipe) et l'entreprise Souchier-Boullet, voici une étude portant sur l'optimisation d'un système de désenfumage. La première partie porte sur l'étude géométrique et mécanique du système.

MOTS-CLÉS

mécanique, cinématique, liaison, modélisation

L'Ésipe propose à ses étudiants de la filière génie mécanique de travailler sur de véritables problèmes industriels dans le cadre de collaborations avec des entreprises. Notamment, en 3e année, les enseignements de synthèse sont très concrets et l'étude développée ici entre dans le cadre de l'une de ces collaborations. Cet article présente dans une première partie l'étude mécanique qui permet la détermination de l'évolution géométrique du système et des efforts qui y règnent, et reprend un par un les composants clefs du système pour discuter de la tenue du mécanisme en regard des contraintes supportées. L'ensemble est traité quasiment analytiquement d'un bout à l'autre de l'étude, permettant ensuite une étude paramétrique visant à optimiser les performances.

Contexte et objectif de l'étude

L'entreprise Souchier-Boullet SAS (http://souchier-boullet.com/), dont le siège se trouve à Lognes (77), produit entre autres des dispositifs d'évacuation naturelle de fumées et de chaleur (DENFC) complets, alimentés en énergie et équipés de leurs propres mécanismes : mécanique, pneumatique ou électrique. Le site de production est à Héricourt en Haute-Saône (70).

Les DENFC sont constitués de lames en aluminium extrudé, isolé ou non (thermique ou acoustique), en polycarbonate de 10 mm ou en verre armé, trempé ou feuilleté. Ces lames pivotent sur un cadre en aluminium de section variable 1.

Le système peut être installé en façade ou sur la toiture d'un bâtiment et doit s'ouvrir en cas d'incendie en respectant la réglementation en vigueur concernant le temps d'ouverture et les cas de charge proposés par les normes. La résistance à l'ouverture vient soit du vent, lorsque le DENFC est situé en façade, soit aux effets conjugués du vent et de la neige, lorsqu'il est situé en toiture.

La figure 2 montre la cinématique typique du système permettant d'ouvrir ou de fermer les lames. Un vérin actionne un levier, lui-même relié à une bielle qui tire ou pousse le support de lame. Une tringle permet d'actionner plusieurs lames simultanément *via* un système de parallélogramme déformable.

L'appareil est défini par la dimension de la « trémie », qui correspond à la surface de l'ensemble des lames d'obturation. L'aire de cette trémie définit le dispositif DENFC. Elle varie de moins de 1 m^2, comme le modèle en photo sur la figure 1, jusqu'à 6 m^2. La motorisation est donc dimensionnée en conséquence et fait l'objet d'une homologation.

Problématique

L'entreprise Souchier-Boullet souhaite élargir sa gamme de produit et, notamment, augmenter la surface de la trémie afin d'équiper des bâtiments de plus grandes dimensions. La collaboration porte sur une optimisation de l'architecture du système de transformation de mouvement afin de conserver les motorisations homologuées, limiter les modifications de composants complexes (et donc coûteux) tout en garantissant l'ouverture sous charge normalisée dans le temps requis.

L'étude est découpée en plusieurs phases :

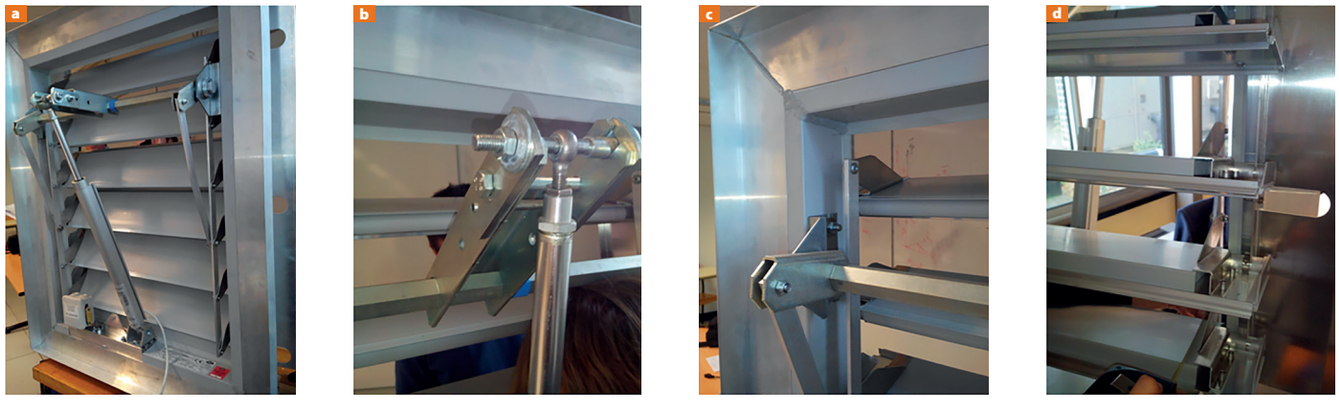
– le paramétrage et la modélisation du système font l'objet de ce premier article : la modélisation touche à la détermination des lois de mouvement, des efforts dans les liaisons et le vérin de commande ;

– l'évaluation des contraintes dans les différents éléments susceptibles d'être modifiés dans le processus d'optimisation, à savoir les deux leviers, la bielle et l'axe hexagonal de transmission, sera l'objet d'un prochain article ;

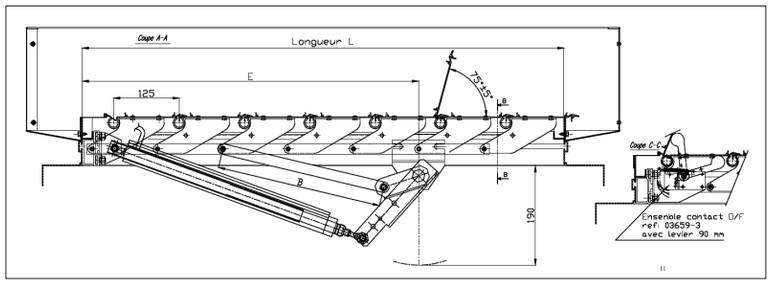
– l'optimisation de l'architecture, c'est-à-dire la recherche d'une géométrie permettant de réduire la

* Professeur des universités, directeur de l'Ésipe, l'École supérieure d'ingénieur de l'université Paris-Est Marne-la-Vallée

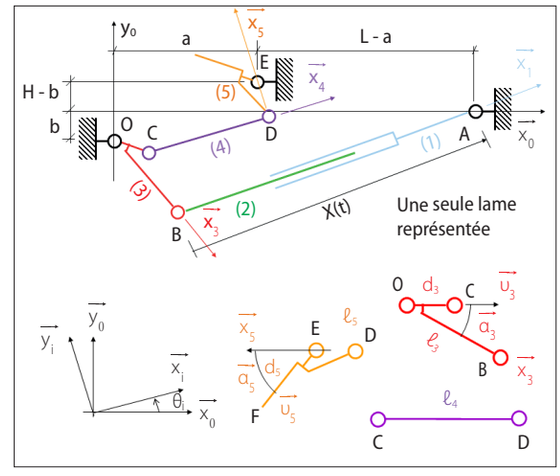
** Responsable recherche et développement Souchier-Boullet SAS avec la contribution des apprentis ingénieurs en génie mécanique de l'Ésipe



1 Système DENFC : (a) vue d'ensemble du côté cinématique ; (b) liaison entre le vérin et le levier ; (c) liaison entre le levier et la biellette (notons qu'il y a deux biellettes de part et d'autre du système ; (d) liaison entre les lames et le bâti



2 Architecture du système DENFC quels que soient la surface de la trémie et le nombre de lames : les dimensions des leviers, bielles et goussets, les points d'attache sur le cadre et le nombre de lames avant le point d'accroche de la bielle sont identiques sur tous les modèles. On limite ainsi le nombre de composants à gérer. Seul le nombre de lames au-delà du point d'accroche varie d'un modèle à l'autre, ainsi que la longueur des lames dans la direction normale à la figure



3 Schématisation du système DENFC (en haut) et définition des axes et des longueurs (en bas)

charge sur le vérin sans effectuer de modifications majeures sur les composants complexes, tels les goussets et le cadre du DENFC. Cette partie ne sera pas abordée, car elle constitue le principal résultat de l'étude et l'entreprise Souchier-Boullet en garde l'exclusivité pour l'amélioration de ses produits.

Paramétrage et modélisation du DENFC

L'objectif de ce premier article est de modéliser le système d'ouverture d'une lame de DENFC afin : 1) d'établir les relations permettant de déterminer l'évolution de l'angle d'ouverture des lames en fonction du déplacement du vérin et 2) de déterminer les efforts dans les différents composants et notamment l'effort F_v demandé au niveau du vérin. Les outils classiques de la cinématique et de la statique sont mobilisés.

Sur la figure 3, on peut noter que chaque axe $\overrightarrow{x_i}$ est paramétré par rapport à l'axe $\overrightarrow{x_0}$ *via* un angle θ_i. Les longueurs dans les directions $\overrightarrow{x_i}$ sont notées ℓ_i. Lorsqu'il y a deux directions privilégiées, comme pour les pièces (3) et (5), alors la seconde direction est notée et l'angle fixe entre $\overrightarrow{x_i}$ et $\overrightarrow{u_i}$ est noté α_i (c'est une constante éventuellement réglable mais fixe durant le mouvement du système).

L'étude de la position du système se fait en développant les relations géométriques dans les deux boucles OAB et OCDE (les calculs et la résolution classique mais intéressante d'un système quatre barres sont présentés en annexe).

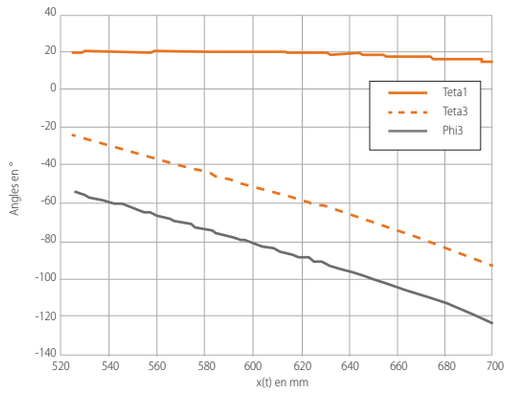
La première fermeture géométrique s'écrit :

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} \Rightarrow L\overrightarrow{x_0} + b\overrightarrow{y_0} = \ell_3\overrightarrow{x_3} + x(t)\overrightarrow{x_1}$$

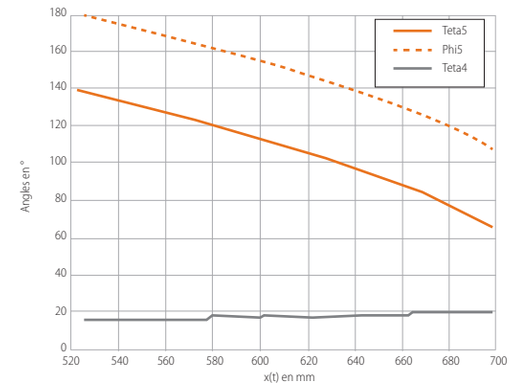
Ce qui donne deux relations scalaires :

$$L = \ell_3 \cos\theta_3 + x(t)\cos\theta_1$$
$$b = \ell_3 \sin\theta_3 + x(t)\sin\theta_1$$

Ici, l'entrée est le déplacement de la tige du vérin par rapport au corps qui peut s'écrire : $x(t) = x_0 + V\,t$ où V est la vitesse de la tige et t le temps. On cherche l'évolution des rotations θ_3 et θ_1 : une petite manipulation est expliquée dans l'encadré et les conditions d'existence de la solution y sont discutées.



4 **Évolution des rotations θ_1 et θ_3 du système DENFC. Compte tenu du décalage de 30 degrés (l'angle α_3 est nécessairement un multiple de 30° puisque les deux parties du levier (3) sont fixées sur un axe à section hexagonale) entre les deux leviers de la pièce (3), la courbe pointillée donne l'évolution de $\varphi_3 = \theta_3 + \alpha_3$**



5 **Évolution des rotations θ_4 et θ_5 du système DENFC. On détermine le décalage α_5 de telle façon que la lame (dirigée suivant u_5) soit fermée pour $t = 0$. La courbe pointillée donne alors l'évolution de $\varphi_5 = \theta_5 + \alpha_5$. Cet angle est bien égal à 180° (position fermée) pour $x = x_0$**

En guise d'illustration, le graphe **4** représente l'évolution des deux angles θ_1 et θ_3 en fonction de la longueur $x(t)$ du vérin. Les valeurs numériques retenues pour les dimensions du système correspondent au système de démonstration vu sur les photos de la figure **1** :

L = 590 mm ; b = 45 mm ; ℓ_3 = 160 mm ;

x varie de 525 à 700 m en 20 s.

On peut noter que le vérin oscille très peu, mais que l'amplitude de θ_3 est conséquente : environ 70°. L'angle $\phi_3 = \theta_3 + \alpha_3$ est désormais connu à chaque instant et la seconde fermeture géométrique de la boucle OCDE va permettre de déterminer l'évolution de l'angle θ_5 d'ouverture des lames :

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} \Rightarrow a\overrightarrow{x_0} + H\overrightarrow{y_0} = d_3\overrightarrow{u_3} + \ell_4\overrightarrow{x_4} + \ell_5\overrightarrow{x_5}$$

On procède de la même manière que précédemment :

$$a = d_3\cos\varphi_3 + \ell_4\cos\theta_4 + \ell_5\cos\theta_5$$

$$H = d_3\sin\varphi_3 + \ell_4\sin\theta_4 + \ell_5\sin\theta_5$$

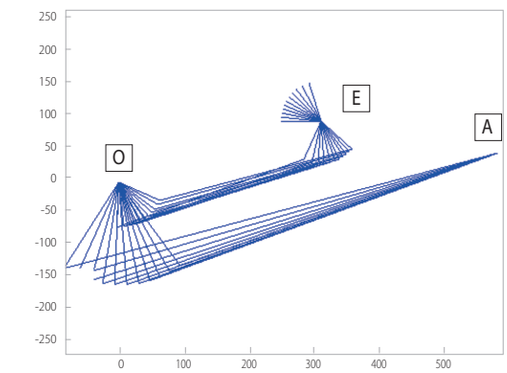
Là encore, la résolution et la discussion sur l'existence d'une solution sont reportées en annexe. Pour illustrer les relations obtenues, on trace les courbes pour les dimensions du système :

H = 95 mm ; a = 315 mm ; d_3 = 70 mm ;

ℓ_4 = 310 mm ; ℓ_5 = 65 mm.

Le graphe **5** montre que la bielle (4) oscille peu et que l'amplitude de la lame est de 73°, ce qui correspond au cahier des charges du système pour lequel les lames doivent s'ouvrir de 75° avec une tolérance de ±5°. La figure **6** montre l'évolution du système.

Intéressons-nous maintenant aux actions mécaniques dues au vent ou à la neige qui agissent sur les lames du DENFC. Par une étude statique (les vitesses et accélérations sont faibles ici : la vitesse V de sortie de tige du vérin n'est que de 8 mm/s), nous déterminerons les efforts sur chacune des pièces, dans les



6 **Visualisation de l'évolution du système DENFC**

articulations, et l'effort que doit délivrer le vérin. Dans un premier temps, nous ferons deux hypothèses que nous validerons ultérieurement :

– le poids propre des pièces du système est faible devant les forces dues aux charges extérieures ;

– les liaisons et articulations s'effectuent sans frottement.

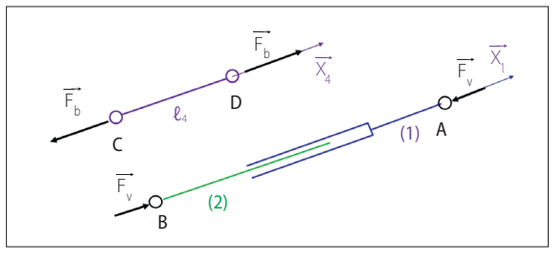
Deux solides ou ensembles sont rapidement identifiés comme uniquement soumis à deux forces, ce qui permet de déterminer la direction de ces efforts. Ainsi, les forces F_b agissant sur la bielle sont dirigées suivant l'axe x_4 et, de même, la poussée F_v du vérin est portée par l'axe x_1 **7**.

Connaissant ces directions, il est possible de déterminer la relation entre F_v et F_b en développant l'équilibre des moments en O sur le levier (3) **8** :

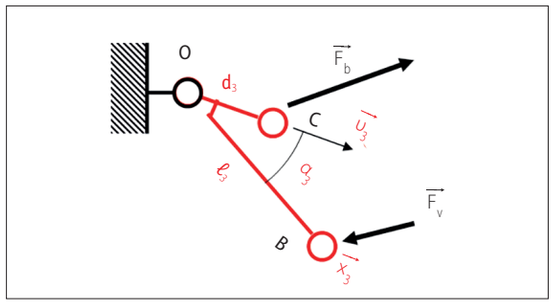
$$\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{F_b} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{F_v} = \vec{0} \Rightarrow F_v = \frac{d_3\sin(\theta_4 - \varphi_3)}{\ell_3\sin(\theta_1 - \theta_3)} F_b$$

Avec l'équilibre des forces, on obtient l'action dans l'articulation en O :

$$\overrightarrow{F_v} + \overrightarrow{F_b} + \overrightarrow{F_O} = \vec{0} \Rightarrow F_O = \sqrt{F_v^2 + F_b^2 - 2F_vF_b\cos(\theta_4 - \theta_1)}$$



7 Modélisation des efforts F_b et F_v dans le système DENFC



8 Équilibre du levier (3)

On peut noter que toutes ces relations font intervenir les différents angles et que l'analyse géométrique préalable sera utile pour obtenir l'évolution des diverses forces durant la phase d'ouverture des lames.

Compte tenu du système de parallélogramme déformable, le PFS serait d'un usage complexe, c'est pourquoi nous utilisons le théorème de conservation de la puissance pour déterminer la relation entre F_b et les forces surfaciques f_{ext} exercées par la neige ou le vent sur les lames.

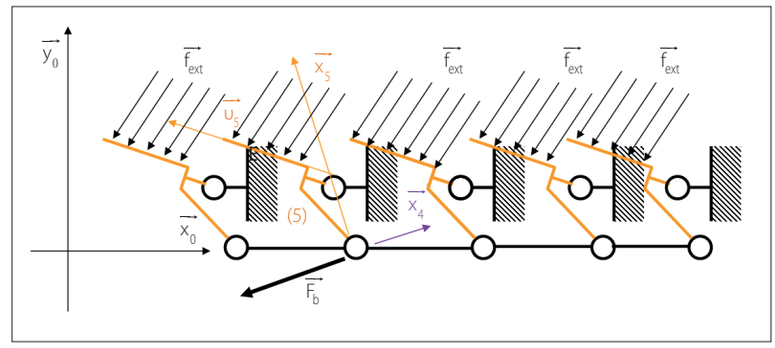
On calcule la puissance de la répartition de charge f_{ext} et celle de l'effort F_b et, puisque toutes les articulations sont supposées parfaites et que nous sommes en quasi-statique, la somme de ces deux puissances est nulle. Ce qui donne :

$$\vec{F_b}\cdot\underbrace{\vec{V_D}}_{\vec{\Omega_5}\wedge\vec{ED}}+\sum_{i=1}^{N}A_{lame}\,\vec{f_{ext}}\cdot\underbrace{\vec{V_G}}_{\vec{\Omega_5}\wedge\vec{EG}}=0$$

G est le barycentre de la lame confondu avec le centre de poussée de la répartition de forces surfaciques f_{ext} si cette dernière est uniforme. Notons d_5 la distance EG et A_{lame} l'aire d'une lame qui peut aussi s'écrire $A_5 = 2d_5L_5$, avec L_5 la longueur de la lame ou la largeur du système. Pour un système de N lames, la somme revient à multiplier par N le calcul de la puissance, puisque toutes les lames tournent à la même vitesse et sont soumises à la même distribution de forces **9**

$$F_b=-\frac{A_{totale}d_5p_{ext}}{\ell_5\sin(\theta_4-\theta_5)}$$

Grâce à cette relation où p_{ext} est la pression normale à la lame et A_{totale} l'aire totale de la trémie, on peut déterminer F_b, puis, grâce à la relation précédente, on obtient F_O et F_v la force de poussée du vérin.



9 Prise en compte des actions sur les N lames du système DENFC

Pour illustrer les résultats, nous avons le cas d'un système disposé en toiture et d'une épaisseur de neige qui provoque une charge surfacique de 50 kg/m² (ou 500 Pa). L'aire totale de la trémie du système de démonstration vaut : A_{totale} = 0,54 m². Lorsque le système s'ouvre, la lame est horizontale et le poids de la neige donne une pression $p_{ext} = p_{neige}$. Mais cette pression évolue au fur et à mesure que la lame se soulève. Bien sûr, la neige peut glisser et l'épaisseur est susceptible de diminuer au cours de l'ouverture ; néanmoins, pour se mettre dans les conditions les plus défavorables, on considère que le poids reste constant tout au long de la phase d'ouverture. Compte tenu du changement d'orientation, la pression évolue donc sous la forme :

$$p_{ext} = -\cos\varphi_5\, p_{neige}$$

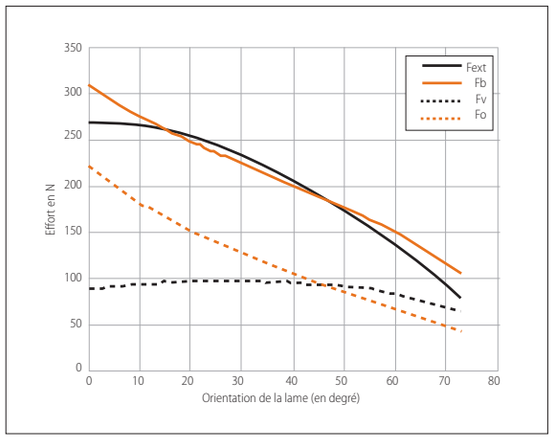
La figure **10** montre l'évolution des charges dans ce cas. La force F_{ext} est la résultante des forces de pression sur l'ensemble des lames : $F_{ext} = A_{tot}p_{ext}$. Elle vaut 270 newtons (soit l'équivalent d'une masse de 27 kg) au démarrage et décroît ensuite.

F_b et F_v sont positifs, ce qui, compte tenu des orientations choisies a priori dans l'étude des efforts, représente une force de traction dans la bielle et une compression sur le vérin.

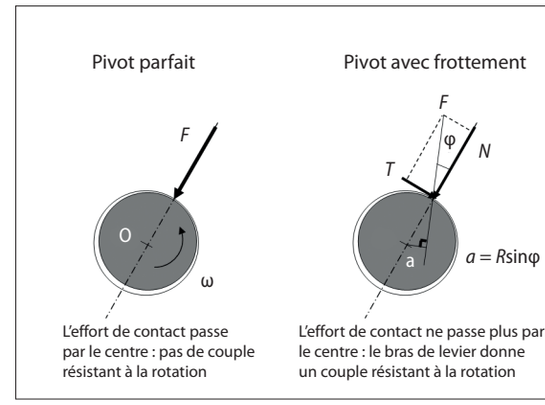
L'effort maximal de traction sur la bielle est de 310 N ; rappelons qu'il y a deux bielles, une de chaque côté de la trémie, soit une traction de 155 N sur chacune. Le vérin, actionneur unique, doit fournir une poussée qui peut atteindre 100 N sur ce modèle. Sachant que le vérin électrique est affiché pour générer jusqu'à 650 N de poussée, ce dernier est donc capable d'assurer l'ouverture des lames dans ces conditions et éventuellement pour une surface de trémie jusqu'à 6,5 fois plus grande, soit une trémie de 3,5 m².

Lorsque le système est fermé, il doit rester fermé même en cas de dépression à l'extérieur du bâtiment. La norme prévoit que le système résiste à une dépression de 1 500 Pa. Seule la valeur au démarrage est utile, car, une fois les lames ouvertes, la pression s'égalise de chaque côté et l'effort disparaît. En position fermée, donc, la pression est égale à la dépression du vent :

$$p_{ext} = -p_{vent}$$



10 Évolution des efforts durant la phase d'ouverture du DENFC



11 Articulation avec ou sans frottement : évaluation du couple résistant

Le signe négatif de F_{ext} inverse l'ensemble des signes et, par ailleurs, l'intensité des forces est multipliée par trois par rapport au cas « neige ». Les bielles sont sollicitées en compression et encaissent une charge de F_b = –930 N. Dans ce cas, il y a un risque de flambage d'autant plus grand que la surface de la trémie sera grande. Nous reviendrons sur la tenue des composants dans le prochain article.

Le vérin ne pousse pas les lames. Il doit retenir le système, car la dépression du vent tend à ouvrir la lame tout seul. Il est donc nécessaire que l'actionneur ne soit pas réversible pour que le maintien en position fermée soit efficace.

Conclusion

Pour conclure cette partie, reconsidérons l'hypothèse émise sur le frottement. Le frottement dans les articulations génère un couple résistant qui s'oppose au mouvement. Sur la figure **11**, à gauche, on voit que si le contact entre l'axe et l'alésage de rayon R se fait sans frottement, la force de contact F passe par le centre O de la liaison et ne génère aucun couple résistant par rapport au centre de la liaison : c'est une liaison pivot parfaite ! En revanche, sur la figure, à droite, s'il y a du frottement au contact, alors la force F s'incline de φ par rapport à la normale au contact et un bras de levier « a » apparaît : ce bras de levier vaut $R\sin\varphi$, où φ est l'angle de frottement.

Comparons le couple généré par le frottement dans le guidage en rotation du levier (3) avec ceux de F_v et F_b qui entraînent ou résistent au mouvement du levier. Les moments de F_v et F_b sont égaux bien sûr et valent :

$$M = d_3 F_b \sin(\theta_4 - \varphi_3) = \ell_3 F_v \sin(\theta_1 - \theta_3)$$

Le couple de frottement quant à lui est proportionnel à l'effort F_O et vaut :

$$C = R\sin\varphi F_O = R\sin\varphi\sqrt{F_v^{\,2} + F_b^{\,2} - 2F_v F_b \cos(\theta_4 - \theta_1)}$$

	Trémie 0,54 m P_{neige} = 500 Pa	Trémie 7 m P_{neige} = 250 Pa
Force bielle (neige)	155 N	1 010 N
Force bielle (dépression)	–470 N	–6 060 N
Force vérin	98 N	630 N

12 Efforts estimés en fonction de la trémie

L'application numérique avec un coefficient de frottement tanφ = 0,1 et un rayon de 10 mm pour le guidage en rotation montre que ce couple ne dépasse pas 1,6 % du moment M. On peut donc largement négliger cette influence. Même dans le cas plus critique d'un frottement de 0,2 avec un arbre de 30 mm de diamètre (R = 15 mm), le couple de frottement ne dépasse pas 5 % de celui transmis. En conséquence, les évaluations effectuées plus haut pour une trémie de 0,54 m^2 sont légitimes.

Le tableau **12** récapitule les efforts F_v maximum estimés dans le vérin et sur chaque bielle (l'effort F_b est divisé par deux, car il y a une bielle de chaque côté des lames à soulever) pour les deux cas suivants : trémie de 0,54 m^2 du matériel de démonstration et trémie de 7 m^2 qui est l'objectif recherché par l'entreprise Souchier-Boullet.

Dans le cas de grandes surfaces, la norme prévoit une performance moindre en termes de hauteur de neige à soulever et réduit la pression à 250 Pa au lieu de 500. Ainsi, le vérin utilisé pourra effectivement fonctionner jusqu'à 7 m^2 de surface de trémie, mais nous serons alors à la limite de la capacité du vérin sans marge de sécurité. Il faut aussi noter la charge élevée dans la bielle et tout particulièrement pour le cas de la dépression du vent de 1 500 Pa où une compression de plus de 6 000 N peut conduire à un flambage. ■

Annexe : résolution des boucles géométriques

Les relations entre les angles θ_i et la course du vérin paramétrée par la longueur $x(t)$ sont données par la fermeture géométrique :

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} \Rightarrow L\overrightarrow{x_0} + b\overrightarrow{y_0} = \ell_3\overrightarrow{x_3} + x(t)\overrightarrow{x_1}$$

La projection sur les axes x_0 et y_0 donne deux relations scalaires :

$$L = \ell_3\cos\theta_3 + x(t)\cos\theta_1$$
$$b = \ell_3\sin\theta_3 + x(t)\sin\theta_1$$

On peut chercher la relation entre la rotation θ_3 et le déplacement $x(t)$ en éliminant l'angle θ_1 :

$$\left.\begin{array}{l} x(t)\cos\theta_1 = L - \ell_3\cos\theta_3 \\ x(t)\sin\theta_1 = b - \ell_3\sin\theta_3 \end{array}\right\} \Rightarrow x(t)^2 = \left(L - \ell_3\cos\theta_3\right)^2 + \left(b - \ell_3\sin\theta_3\right)^2$$

$$\Rightarrow x(t)^2 = L^2 + b^2 + \ell_3^{\,2} - 2\ell_3\left(L\cos\theta_3 + b\sin\theta_3\right)$$

Pour « sortir » l'angle θ_3 de cette dernière expression, on considère le changement de variable suivant :

$$\tau_3 = \tan\left(\frac{\theta_3}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta_3 = \dfrac{1-\tau_3^{\,2}}{1+\tau_3^{\,2}} \\ \sin\theta_3 = \dfrac{2\tau_3}{1+\tau_3^{\,2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(x(t)^2 - L^2 - b^2 - \ell_3^{\,2}\right)\left(1+\tau_3^{\,2}\right) + 2\ell_3\left(L\left(1-\tau_3^{\,2}\right) + 2\tau_3 b\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(x(t)^2 - L^2 - b^2 - \ell_3^{\,2} - 2\ell_3 L\right)\tau_3^{\,2} + 4\ell_3 b\tau_3 + \left(x(t)^2 - L^2 - b^2 - \ell_3^{\,2} + 2\ell_3 L\right) = 0$$

En posant
$$A = x(t)^2 - L^2 - b^2 - \ell_3^{\,2} - 2\ell_3 L$$
$$B = 4\ell_3 b$$
$$C = x(t)^2 - L^2 - b^2 - \ell_3^{\,2} + 2\ell_3 L$$

la relation précédente apparaît clairement comme une équation du second degré en t_3 dont la solution est une des deux racines :

$$A\tau_3^{\,2} + B\tau_3 + C = 0 \Rightarrow \tau_3 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \Rightarrow \theta_3 = 2\arctan\left(\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}\right)$$

Le choix de la racine est fait en considérant la position du système : une des deux racines donne un angle θ_3 pour lequel le vérin passe au travers du système de lames (position B′ sur la figure 13), ce qui n'est guère réaliste.

Il faut noter aussi que la détermination de solution n'est pas toujours possible. D'un point de vue « calcul », il faut que le discriminant $B^2 - 4AC$ soit positif pour que la racine ait un sens :

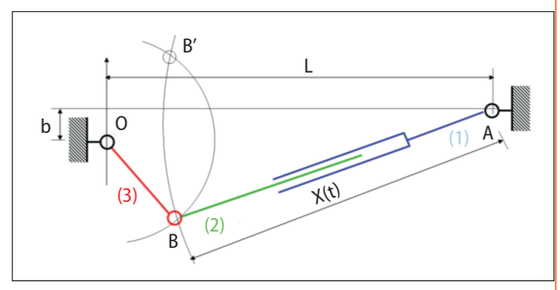
$$B^2 - 4AC$$
$$= \left(4\ell_3 b\right)^2 - 4\underbrace{\left(x(t)^2 - L^2 - b^2 - \ell_3^{\,2} - 2\ell_3 L\right)\left(x(t)^2 - L^2 - b^2 - \ell_3^{\,2} + 2\ell_3 L\right)}_{\left(x(t)^2 - L^2 - b^2 - \ell_3^{\,2}\right)^2 - \left(2\ell_3 L\right)^2} > 0$$

$$\Rightarrow \left(2\ell_3 b\right)^2 - \left(x(t)^2 - L^2 - b^2 - \ell_3^{\,2}\right)^2 + \left(2\ell_3 L\right)^2 > 0$$

$$\Rightarrow \left(2\ell_3\right)^2\underbrace{\left(b^2 + L^2\right)}_{OA^2} - \left(x(t)^2 \underbrace{- L^2 - b^2}_{-OA^2} - \ell_3^{\,2}\right)^2 > 0$$

$$\Rightarrow \left(2\ell_3 OA - x(t)^2 + OA^2 + \ell_3^{\,2}\right)\left(2\ell_3 OA + x(t)^2 - OA^2 - \ell_3^{\,2}\right) > 0$$

$$\Rightarrow \left(\underbrace{OA^2 + 2\ell_3 OA + \ell_3^{\,2}}_{(OA+\ell_3)^2} - x(t)^2\right)\left(\underbrace{OA^2 - 2\ell_3 OA + \ell_3^{\,2}}_{(OA-\ell_3)^2} - x(t)^2\right) < 0$$



13 Résolution de la boucle OAB, visualisation des deux racines

La figure 14 illustre la condition mathématique : en effet, si $x(t)$ est plus grand que OA – ℓ_3 et plus petit que OA + ℓ_3, alors la condition est bien vérifiée. Effectivement, si le vérin est trop court, alors l'assemblage est impossible en B_{min} et, si le vérin est trop long, alors l'assemblage n'est plus possible en B_{max}. Cette condition limite la course du vérin entre les deux positions :

$$x_{min} = OA - \ell_3 \quad \text{et} \quad x_{max} = OA + \ell_3$$

Une fois l'angle θ_3 déterminé, on peut obtenir l'angle θ_1 par le rapport des deux premières expressions :

$$\left.\begin{array}{l} x(t)\cos\theta_1 = L - \ell_3\cos\theta_3 \\ x(t)\sin\theta_1 = b - \ell_3\sin\theta_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \tan\theta_1 = \frac{L - \ell_3\cos\theta_3}{b - \ell_3\sin\theta_3}$$

Ainsi, il est possible de déterminer l'évolution des deux angles θ_1 et θ_3 en fonction de la longueur x du vérin, notamment θ_3 qui devient l'entrée de la seconde boucle.

Pour déterminer l'évolution de l'angle θ_5 d'ouverture des lames, on procède de la même façon avec la boucle OCDE :

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} \Rightarrow a\overrightarrow{x_0} + H\overrightarrow{y_0} = d_3\overrightarrow{u_3} + \ell_4\overrightarrow{x_4} + \ell_5\overrightarrow{x_5}$$

On projette sur les axes x_0 et y_0 :

$$a = d_3\cos(\theta_3 + \alpha_3) + \ell_4\cos\theta_4 + \ell_5\cos\theta_5$$
$$H = d_3\sin(\theta_3 + \alpha_3) + \ell_4\sin\theta_4 + \ell_5\sin\theta_5$$

L'évolution de θ_3 étant connue, on cherche à éliminer θ_4 pour déterminer l'évolution de θ_5 :

$$\left(a - d_3\cos(\theta_3 + \alpha_3) - \ell_5\cos\theta_5\right)^2 + \left(H - d_3\sin(\theta_3 + \alpha_3) - \ell_5\sin\theta_5\right)^2 = \ell_4^{\,2}$$

$$\Rightarrow \left(a - d_3\cos(\theta_3 + \alpha_3)\right)^2 + \left(H - d_3\sin(\theta_3 + \alpha_3)\right)^2$$
$$-2\ell_5\cos\theta_5\left(a - d_3\cos(\theta_3 + \alpha_3)\right)$$
$$-2\ell_5\sin\theta_5\left(H - d_3\sin(\theta_3 + \alpha_3)\right) + \ell_5^{\,2} - \ell_4^{\,2} = 0$$

Malgré la longueur de la relation finale, on « voit » qu'il s'agit d'une équation de la même forme que dans la boucle précédente et que l'inconnue θ_5 apparaît au travers des sinus et des cosinus. On pose donc le changement de variable :

$$\tau_5 = \tan\left(\frac{\theta_5}{2}\right) \Rightarrow A\tau_5^{\,2} + B\tau_5 + C = 0$$

Annexe : résolution des boucles géométriques (suite)

avec cette fois :

$$A=\left(a-d_3\cos(\theta_3+\alpha_3)\right)^2+\left(H-d_3\sin(\theta_3+\alpha_3)\right)^2+\ell_5^{\,2}-\ell_4^{\,2}+2\ell_5\left(a-d_3\cos(\theta_3+\alpha_3)\right)$$

$$B=-4\ell_5\left(H-d_3\sin(\theta_3+\alpha_3)\right)$$

$$C=\left(a-d_3\cos(\theta_3+\alpha_3)\right)^2+\left(H-d_3\sin(\theta_3+\alpha_3)\right)^2+\ell_5^{\,2}-\ell_4^{\,2}-2\ell_5\left(a-d_3\cos(\theta_3+\alpha_3)\right)$$

Grâce au calcul du discriminant, en vérifiant qu'il est bien positif, on tire les racines τ_5 et finalement l'évolution de θ_5 :

$$\tau_5=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}\Rightarrow\theta_5=2\arctan\left(\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}\right)$$

Pour l'angle θ_4, on peut l'extraire de la tangente en formant le rapport des deux projections de la fermeture géométrique :

$$\tan\theta_4=\frac{\ell_4\sin\theta_4}{\ell_4\cos\theta_4}=\frac{H-d_3\sin(\theta_3+\alpha_3)-\ell_5\sin\theta_5}{a-d_3\cos(\theta_3+\alpha_3)-\ell_5\cos\theta_5}$$

Pour obtenir l'évolution de l'angle de la lame par rapport à l'axe x_0, il reste à corriger avec l'angle α_5 entre les directions x_5 et u_5. Cet angle vaut 180° lorsque le vérin est en début de course (u_5 est opposé à x_0) et vaut donc 41°. Le graphe 15 montre qu'il atteint 73° d'amplitude en fin de course avec les valeurs retenues pour les longueurs.

On peut reconduire une étude d'existence d'une position afin de déterminer les conditions géométriques à satisfaire en vérifiant que le discriminant est bien positif. On peut remarquer que :

$$\left(a-d_3\cos(\theta_3+\alpha_3)\right)^2+\left(H-d_3\sin(\theta_3+\alpha_3)\right)^2=CE^2$$

$$\Downarrow$$

$$A=CE^2+\ell_5^{\,2}-\ell_4^{\,2}+2\ell_5\left(a-d_3\cos(\theta_3+\alpha_3)\right)$$

$$B=-4\ell_5\left(H-d_3\sin(\theta_3+\alpha_3)\right)$$

$$C=CE^2+\ell_5^{\,2}-\ell_4^{\,2}-2\ell_5\left(a-d_3\cos(\theta_3+\alpha_3)\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta=16\ell_5^{\,2}\left(H-d_3\sin(\theta_3+\alpha_3)\right)^2$$

$$-4\left(CE^2+\ell_5^{\,2}-\ell_4^{\,2}+2\ell_5\left(a-d_3\cos(\theta_3+\alpha_3)\right)\right)\left(CE^2+\ell_5^{\,2}-\ell_4^{\,2}-2\ell_5\left(a-d_3\cos(\theta_3+\alpha_3)\right)\right)$$

Si on se rappelle que $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, ce dernier terme peut s'écrire :

$$\Delta=4\left[\left(2\ell_5\right)^2\left(H-d_3\sin\varphi_3\right)^2-\left(CE^2+\ell_5^{\,2}-\ell_4^{\,2}\right)^2+\left(2\ell_5\right)^2\left(a-d_3\cos\varphi_3\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow\Delta=4\left[\left(2\ell_5\right)^2CE^2-\left(CE^2+\ell_5^{\,2}-\ell_4^{\,2}\right)^2\right]$$

Au passage, on a posé $\varphi_3=\theta_3+\alpha_3$. On reconnaît à nouveau une expression de la forme a^2-b^2 que nous allons réécrire sous la forme $(a-b)(a+b)$:

$$\Delta=4\left(2\ell_5CE+CE^2+\ell_5^{\,2}-\ell_4^{\,2}\right)\left(2\ell_5CE-CE^2-\ell_5^{\,2}+\ell_4^{\,2}\right)$$

$$\Rightarrow\Delta=4\left(\left(CE+\ell_5\right)^2-\ell_4^{\,2}\right)\left(\ell_4^{\,2}-\left(CE-\ell_5\right)^2\right)$$

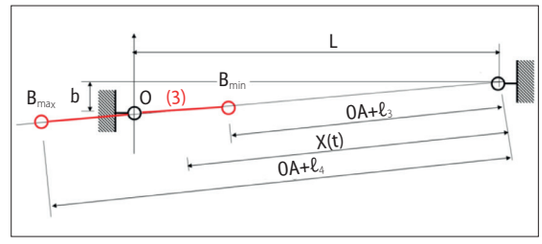
Cette dernière expression est bien positive si :

$$0<CE-\ell_5<\ell_4<CE+\ell_5$$

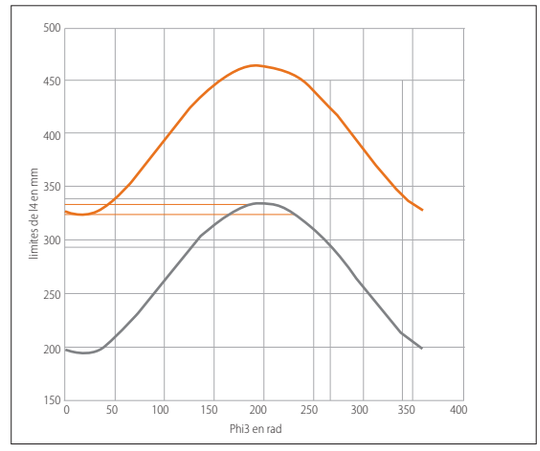
Ce qui limite les possibilités de longueur pour la bielle (4). Par exemple, avec les valeurs retenues pour le système et si le débattement possible de φ_3 réalise un tour complet, alors la plage possible des longueurs de la bielle est représentée sur le graphe 15. La longueur doit être comprise entre les deux courbes verte et bleue sur toute la plage d'utilisation.

Le graphe montre qu'une rotation complète d'un tour pour φ_3 ne sera pas possible, car la longueur doit être plus grande que 335 mm (φ_3 = 200°), mais doit aussi être plus petite que 325 (φ_3 = 20°), ce qui n'est pas possible !

Avec nos valeurs, la plage de fonctionnement de φ_3 est plutôt entre 270 et 340° et donc la longueur de la bielle peut être comprise entre 295 et 340 mm (310 mm sur le système de démonstration).



14 Conditions extrêmes pour que le discriminant soit positif



15 Discussion sur la boucle OCDE