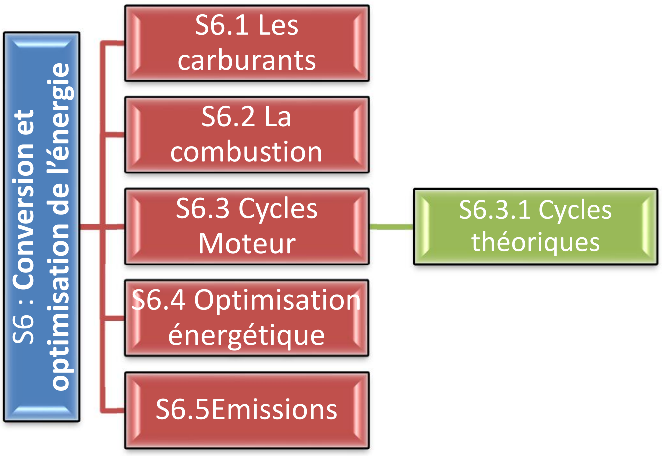
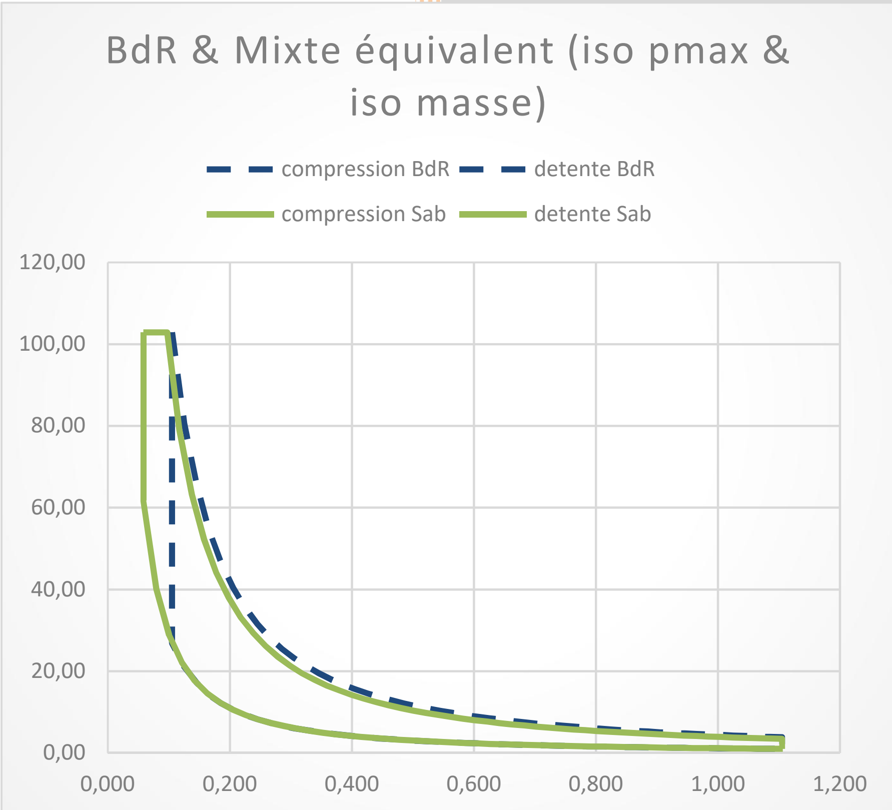


Cycles théoriques
Document de référence 2
Comparaison cycles BdR – Sabathé - Diesel



STS MCI

MCI Brest

TABLE

DOCUMENT DE REFERENCE 2 : COMPARAISON CYCLES DIESEL-SABATHE-BDR

1. Objectifs

Il s'agit de comparer le rendement des cycles théoriques Beau de Rochas, Diesel et Sabathé.
L'analyse comparative doit s'effectuer en faisant certaines hypothèses, qui déterminent 3 cas d'étude :

- Etude à iso cylindrée et iso rapport volumétrique.
- Etude à iso cylindrée et iso pression maximale.
- Etude à iso masse de gaz et iso pression maximale.

2. Notions abordées

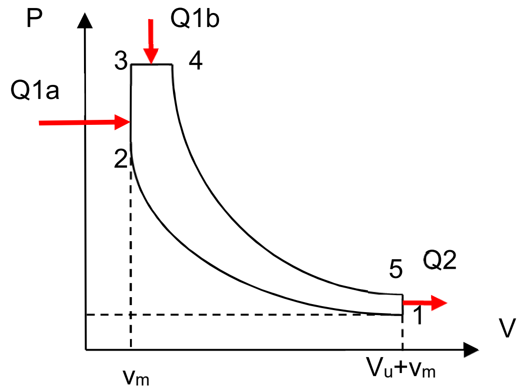
- Thermodynamique : premier principe et lois usuelles des transformations isochore, isobare et isentropique.
- Résolution numérique d'équations par solveur.

3. Calcul du rendement théorique

3.1. Modèle de Sabathé

On fera les calculs à partir du modèle de Sabathé.
Le cycle de Sabathé est constitué :

- D'une compression et d'une détente isentropiques.
- D'une combustion « en deux parties » :
  - ✓ Isochore
  - ✓ Isobare.



On peut « moduler » la répartition isochore / isobare en posant :

$$Q_1 = Q_{1a} + Q_{1b}$$
$$\tau = \frac{Q_{1a}}{Q_1}$$

On note par ailleurs :

$$\varepsilon = \frac{V_1}{V_2}; \quad \alpha = \frac{P_3}{P_2}; \quad \delta = \frac{V_4}{V_3} = \frac{V_4}{V_2}$$

3.2. Expression du rendement

Par définition le rendement du cycle s'écrit :

$$\eta_{th} = \left|\frac{W_{cycle}}{Q_1}\right| = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1}$$

3.3. Expression des quantités de chaleur

Q_2 : pour l'isochore 5-1 la chaleur échangée s'écrit :

$$Q_2 = m \cdot c_v \cdot (T_1 - T_5)$$

Q_{1a} : pour l'isochore 2-3 on a de même :

$$Q_{1a} = m \cdot c_v \cdot (T_3 - T_2)$$

Q_{1b} : pour l'isobare 3-4 on a :

$$Q_{1b} = m \cdot c_p \cdot (T_4 - T_3)$$

3.4. Expression du rendement en fonction des températures

Il vient donc :

$$\eta_{th} = 1 + \frac{m \cdot c_v \cdot (T_1 - T_5)}{m \cdot c_v \cdot (T_3 - T_2) + m \cdot c_p \cdot (T_4 - T_3)}$$

Soit après simplification :

$$\eta_{th} = 1 + \frac{(T_1 - T_5)}{(T_3 - T_2) + \gamma \cdot (T_4 - T_3)}$$

3.5. Expression du rendement en fonction des pressions et des volumes

On préfère généralement exprimer le rendement en fonction des pressions et des volumes plutôt que des températures. Pour cela on peut par exemple exprimer numérateur et dénominateur en fonction de T_2, de façon à obtenir une fonction du type :

$$\eta_{th} = 1 - \frac{T_2 \cdot f(\varepsilon, \alpha, \delta, \gamma)}{T_2 \cdot g(\varepsilon, \alpha, \delta, \gamma)} = 1 - \frac{f(\varepsilon, \alpha, \delta, \gamma)}{g(\varepsilon, \alpha, \delta, \gamma)}$$

Il suffit pour cela d'utiliser les propriétés des différentes transformations.

- ✓ Isentropiques : loi de Laplace $p \cdot V^{\gamma} = cte$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} = \varepsilon^{\gamma} \; ; \; \frac{p_4}{p_5} = \frac{p_3}{p_5} = \left(\frac{V_5}{V_4}\right)^{\gamma} = \left(\frac{V_1}{V_4}\right)^{\gamma}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \varepsilon^{\gamma-1} \; ; \; \frac{T_4}{T_5} = \left(\frac{V_5}{V_4}\right)^{\gamma-1}$$

- ✓ Isochores :

$$\frac{T_3}{T_2} = \frac{p_3}{p_2} = \alpha \; ; \; \frac{T_5}{T_1} = \frac{p_5}{p_1}$$

- ✓ Isobare :

$$\frac{T_4}{T_3} = \frac{V_4}{V_3} = \delta$$

On peut donc accéder immédiatement à $T_3 - T_2$ et à $T_4 - T_3$:

$$T_3 - T_2 = T_2 \cdot (\alpha - 1)$$

$$T_4 - T_3 = T_3 \cdot (\delta - 1) = T_2 \cdot \alpha \cdot (\delta - 1)$$

Pour $T_1 - T_5$:

$$T_5 = T_1 \cdot \frac{p_5}{p_1} = T_2 \cdot \varepsilon^{1-\gamma} \cdot \frac{p_5}{p_1}$$

$$\frac{p_5}{p_1} = \frac{p_3 \cdot \left(\frac{V_1}{V_4}\right)^{-\gamma}}{p_2 \cdot \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{-\gamma}} = \alpha \cdot \delta^{\gamma}$$

Par conséquent :

$$T_5 = T_2 \cdot \varepsilon^{1-\gamma} \cdot \alpha \cdot \delta^{\gamma}$$

$$T_1 - T_5 = T_2 \cdot \varepsilon^{1-\gamma} - T_2 \cdot \varepsilon^{1-\gamma} \cdot \alpha \cdot \delta^{\gamma} = T_2 \cdot \varepsilon^{1-\gamma} \cdot (1 - \alpha \cdot \delta^{\gamma})$$

Finalement :

$$\eta_{th} = 1 + \frac{T_2 \cdot \varepsilon^{1-\gamma} \cdot (1 - \alpha \cdot \delta^{\gamma})}{T_2 \cdot (\alpha - 1) + \gamma \cdot \left(T_2 \cdot \alpha \cdot (\delta - 1)\right)}$$

$$\eta_{th} = 1 - \varepsilon^{1-\gamma} \cdot \frac{\alpha \cdot \delta^{\gamma} - 1}{(\alpha - 1) + \gamma \cdot \alpha \cdot (\delta - 1)}$$

En posant $k = \frac{\alpha \cdot \delta^{\gamma} - 1}{(\alpha-1)+\gamma \cdot \alpha \cdot (\delta-1)}$:

$$\eta_{th} = 1 - k \cdot \varepsilon^{1-\gamma}$$

4. Evolution vers les cycles Diesel et Beau de Rochas

- Pour un cycle Diesel, la combustion est purement isobare. On a donc $\alpha = 1$ et par conséquent :

$$\eta_{th} = 1 - \varepsilon^{1-\gamma} \cdot \frac{\delta^{\gamma} - 1}{\gamma \cdot (\delta - 1)}$$

- Pour un cycle BdR, on a une combustion purement isochore et donc $\delta = 1$. Le rendement devient sans surprise :

$$\eta_{th} = 1 - \varepsilon^{1-\gamma} \cdot \frac{\alpha - 1}{\alpha - 1} = 1 - \varepsilon^{1-\gamma}$$

5. Comparaison à iso-rapport volumétrique

Les rapports α et δ dépendent de la répartition de l'énergie $\tau = \frac{Q_{1a}}{Q_1}$

Il est donc judicieux d'exprimer α et δ en fonction de τ :

- Pour α :

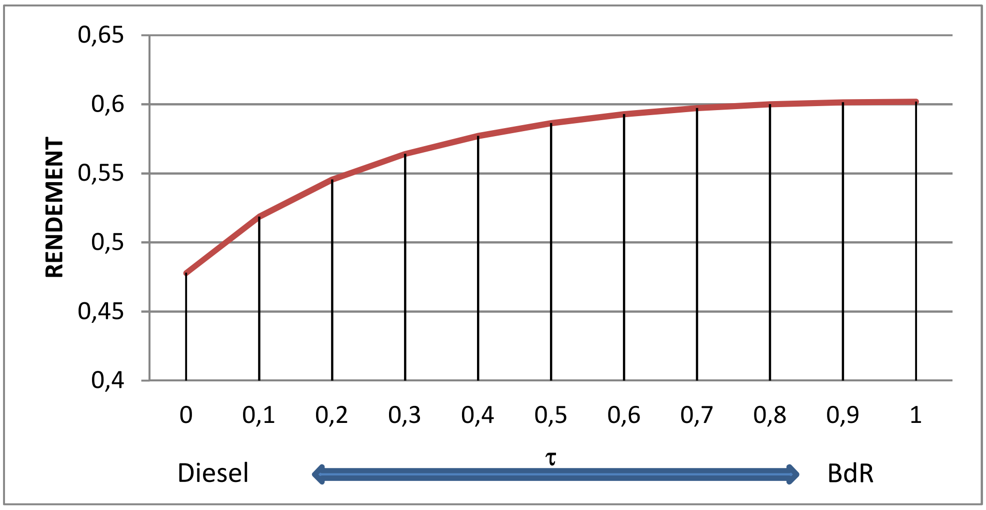
$$\alpha = \frac{P_3}{P_2} = \frac{T_3}{T_2}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \varepsilon^{\gamma-1}$$
$$Q_{1a} = m \cdot c_v \cdot (T_3 - T_2) = m \cdot c_v \cdot T_2 \cdot (\alpha - 1) = m \cdot c_v \cdot T_1 \cdot \varepsilon^{\gamma-1} \cdot (\alpha - 1)$$
$$\alpha = 1 + \frac{Q_{1a}}{m \cdot c_v \cdot T_1 \cdot \varepsilon^{\gamma-1}} = 1 + \frac{\tau \cdot Q_1}{m \cdot c_v \cdot T_1 \cdot \varepsilon^{\gamma-1}}$$

- Pour δ :

$$\delta = \frac{V_4}{V_3} = \frac{V_4}{V_2} = \frac{T_4}{T_3}$$
$$Q_{1b} = m \cdot c_p \cdot (T_4 - T_3) = m \cdot c_p \cdot T_3 \cdot (\delta - 1) = m \cdot c_p \cdot T_2 \cdot \alpha \cdot (\delta - 1) = m \cdot c_p \cdot T_1 \cdot \varepsilon^{\gamma-1} \cdot \alpha \cdot (\delta - 1)$$
$$\delta = 1 + \frac{Q_{1b}}{m \cdot c_p \cdot T_1 \cdot \varepsilon^{\gamma-1} \cdot \alpha} = 1 + \frac{(1-\tau) \cdot Q_1}{m \cdot c_p \cdot T_1 \cdot \varepsilon^{\gamma-1} \cdot \alpha}$$

- On peut alors tracer l'évolution du rendement en fonction de τ , ici pour $V = 1\,L\,; \varepsilon = 10; Q_1 = 2000\,J$:
- **Voir feuille "cas 1_iso_p" du classeur "TD_compa_cycles.xlsm".**



6. Comparaison à iso-pmax

On voit que dans ces conditions (iso-cylindrée et iso-rapport volumétrique) le cycle Diesel a un rendement moins bon que celui du BdR. Pour faire une comparaison plus significative, il faudrait que les cycles aient une même pression maximale. On peut donc ajouter une contrainte : comparaison à iso-pmax. Cela revient à calculer un rapport volumétrique différent qui permettrait d'obtenir la pression maximale de référence, c'est-à-dire celle du BdR.

6.1. Expression de la condition iso_pmax

La condition d'iso-pression s'écrit :

$$p_{\max\_sabathé} - p_{\max\_BdR} = 0$$

La pression maxi des cycles est p_3 :

$$p_3 = p_2 \cdot \alpha = p_1 \cdot \varepsilon^{\gamma} \cdot \alpha = p_1 \cdot \varepsilon^{\gamma} \cdot \left(1 + \frac{\tau \cdot Q_1}{m \cdot c_v \cdot T_1 \cdot \varepsilon^{\gamma-1}}\right)$$
$$p_3 = p_1 \cdot \left(\varepsilon^{\gamma} + \frac{\varepsilon \cdot \tau \cdot Q_1}{m \cdot c_v \cdot T_1}\right)$$

La masse de gaz en œuvre est, si l'on introduit la cylindrée unitaire V_u telle que $\mathrm{V}_1 = \frac{\varepsilon \cdot V_u}{\varepsilon - 1}$:

$$m = \frac{p_1 \cdot \mathrm{V}_1}{r \cdot T_1} = \frac{p_1 \cdot \varepsilon \cdot V_u}{r \cdot T_1 \cdot (\varepsilon - 1)}$$

Et donc :

$$p_3 = p_1 \cdot \left(\varepsilon^{\gamma} + \frac{\varepsilon \cdot \tau \cdot Q_1}{\frac{p_1 \cdot \varepsilon \cdot V_u}{r \cdot T_1 \cdot (\varepsilon - 1)} \cdot c_v \cdot T_1}\right) = p_1 \cdot \left(\varepsilon^{\gamma} + \frac{r \cdot (\varepsilon - 1) \cdot \tau \cdot Q_1}{p_1 \cdot V_u \cdot c_v}\right)$$

En utilisant les indices ad hoc, la condition devient (pour le BdR $\tau = 1$) :

$$\left(\varepsilon_{Sab}{}^{\gamma} + \frac{r \cdot (\varepsilon_{Sab} - 1) \cdot \tau \cdot Q_1}{p_1 \cdot V_u \cdot c_v}\right) - \left(\varepsilon_{BdR}{}^{\gamma} + \frac{r \cdot (\varepsilon_{BdR} - 1) \cdot Q_1}{p_1 \cdot V_u \cdot c_v}\right) = 0$$

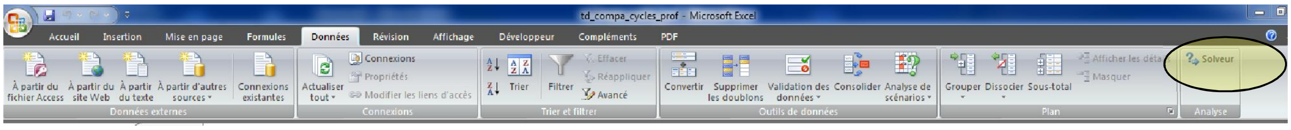
Il s'agit d'une équation du type :

$$\varepsilon_{sab}{}^{\gamma} + A \cdot \varepsilon_{sab} + B = 0$$

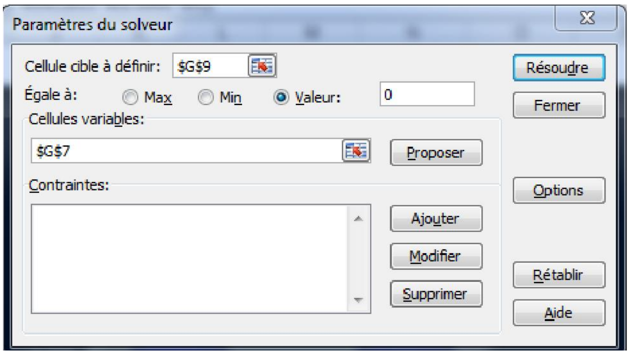
On ne peut résoudre cette équation que par des méthodes numériques. On propose donc d'utiliser les fonctions de solveur d'Excel.

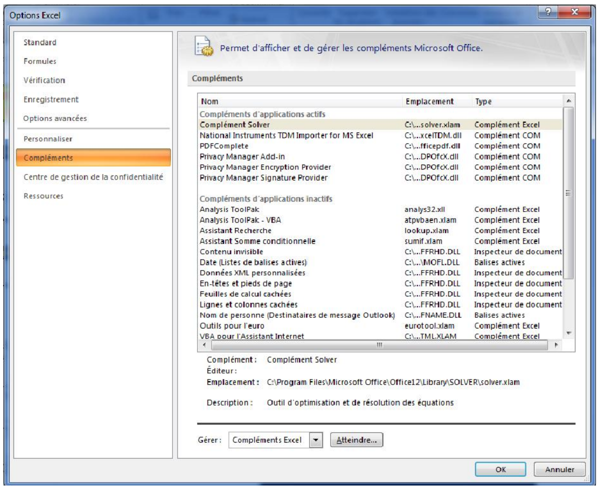
6.2. Calcul du rapport volumétrique équivalent dans Excel

Il faut utiliser le **complément solveur**. Cette fonctionnalité est disponible dans le menu « données ».



- Si la fonction n'apparaît pas, il faut configurer les options dans la rubrique « compléments ».
- **Voir feuille "cas 2_iso_p" du classeur "TD_compa_cycles.xlsm".**
- La vue ci-dessous montre comment utiliser le solveur pour résoudre notre équation…





- On peut améliorer le fichier en créant une macro très simple que l'on affecte aux « toupies » :

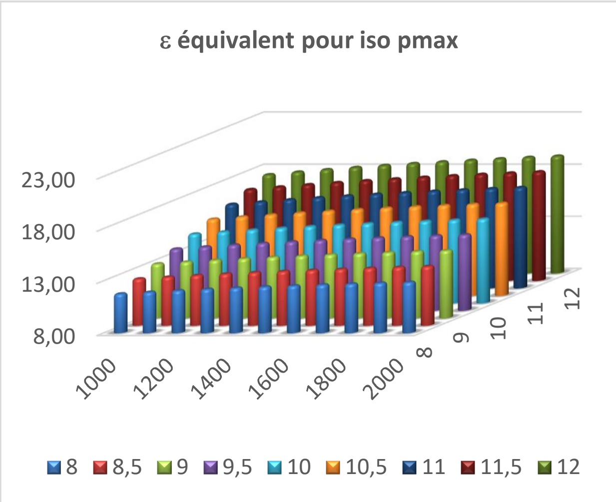
```
Sub calcul_eps()
'utilise le solveur pour calculer le rapport volumétrique nécessaire pour obtenir la même
'pression que pour un cycle BdR

    SolverOk SetCell:="$G$9", MaxMinVal:=3, ValueOf:="0", ByChange:="$G$7"
    SolverSolve UserFinish:=True

End Sub
```

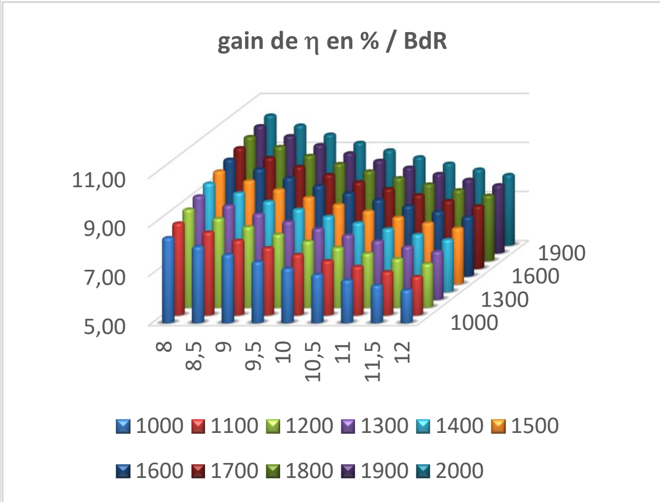
- Aide sur le solveur VBA : https://msdn.microsoft.com/fr-fr/vba/excel-vba/articles/using-the-solver-vba-functions.

- Résultats :

On donne deux graphiques montrant le rapport volumétrique calculé et le gain de rendement relatif du Sabathé par rapport au BdR, et ceci pour $\boldsymbol{\tau = 0,5}$.
Ces 2 graphiques sont tracés pour :

- Des valeurs de rapport volumétrique de base (BdR) de 8 à 12,
- Une énergie introduite Q1 de 1000 à 2000 Joules.





Avec les hypothèses de calcul définies plus haut, le rendement du Sabathé est toujours meilleur que celui du BdR, au prix d'un rapport volumétrique nettement plus élevé…

7. Comparaison à iso-pmax et iso-masse

On peut remarquer que si on calcule une nouvelle valeur de rapport volumétrique à iso-cylindrée, la masse de gaz participant au cycle n'est plus la même. On peut ajouter une contrainte pour recalculer une cylindrée telle que la masse de gaz soit constante. La comparaison entre les cycles sera alors vraiment objective.
Cette contrainte peut se formuler par :

$$m_{Sab} - m_{BdR} = 0 \text{ ou } V_{1\_Sab} = V_{1\_BdR}$$

Reprenons la formule vue plus haut donnant la masse de gaz :

$$m = \frac{p_1 \cdot V_1}{r \cdot T_1} = \frac{p_1 \cdot \varepsilon \cdot V_u}{r \cdot T_1 \cdot (\varepsilon - 1)}$$

La contrainte devient donc double :

$$\left(\varepsilon_{Sab}{}^{\gamma} + \frac{r \cdot (\varepsilon_{Sab} - 1) \cdot \tau \cdot Q_1}{p_1 \cdot V_{u\_Sab} \cdot c_v}\right) - \left(\varepsilon_{BdR}{}^{\gamma} + \frac{r \cdot (\varepsilon_{BdR} - 1) \cdot Q_1}{p_1 \cdot V_{u\_BdR} \cdot c_v}\right) = 0$$

$$\frac{\varepsilon_{Sab} \cdot V_{u\_Sab}}{(\varepsilon_{Sab} - 1)} - \frac{\varepsilon_{BdR} \cdot V_{u\_BdR}}{(\varepsilon_{BdR} - 1)} = 0$$

Il s'agit donc de résoudre, à l'aide du solveur, un système de 2 équations à 2 inconnues. La macro ci-dessous propose une solution de calcul. **Voir la feuille "cas 3_iso_p_iso_m" du classeur**.

```
Sub epsilonetVu()
'
   'attribution de valeurs arbitraires aux variables d'ajustement(évite des aléas de calcul)
    'ce : variable condition sur epsilon
    'cv : variable condition sur cylindrée

 Dim ce
 Dim cv
 ce = 5
 cv = 5
 Range("g7").Value = 20
 Application.StatusBar = "calcul d'epsilon et de Vu en cours..."

 'boucle itérative
    'il est impossible d'avoir les deux paramètres = 0 ensemble : on pose donc des tolérances
  SolverReset
SolverOptions Precision:=0.0001

    Do Until ce <= 0.001 And ce >= -0.001 And cv <= 0.001
        SolverOk SetCell:="$G$9", MaxMinVal:=3, ValueOf:="0", ByChange:="$G$7"
        SolverSolve UserFinish:=True
        SolverOk SetCell:="$G$10", MaxMinVal:=3, ValueOf:="0", ByChange:="$G$8"
        SolverSolve UserFinish:=True
        cv = Range("g10").Value
        ce = Range("g9").Value
     Loop

    Application.StatusBar = "solveur OK"
End Sub
```