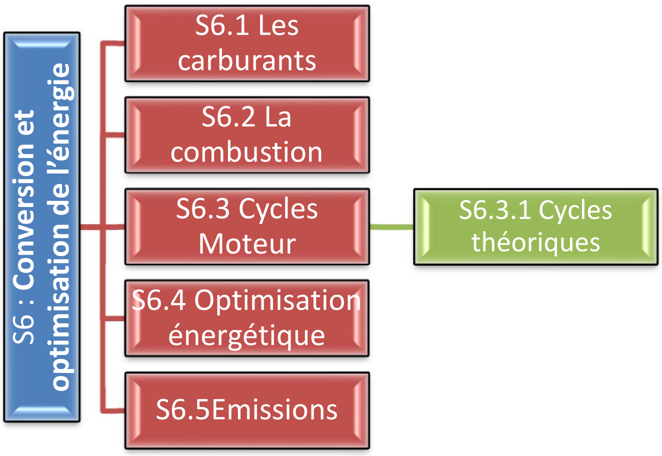
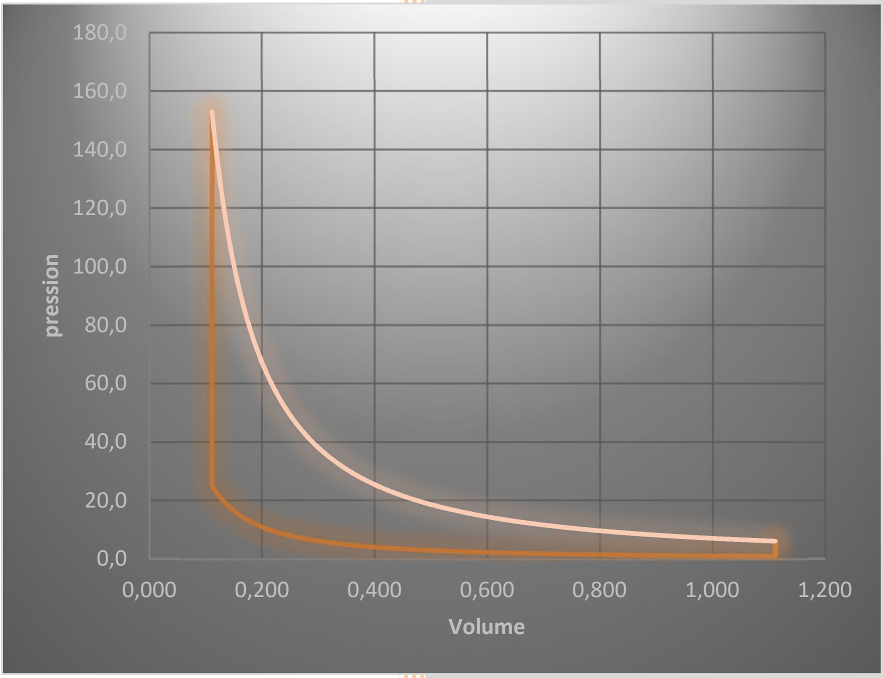


Cycles théoriques
Beau de Rochas
Séquence 2



STS MCI

MCI Brest

TABLE

SEQUENCE 2 : CYCLE THEORIQUE A 4 TEMPS BEAU DE ROCHAS

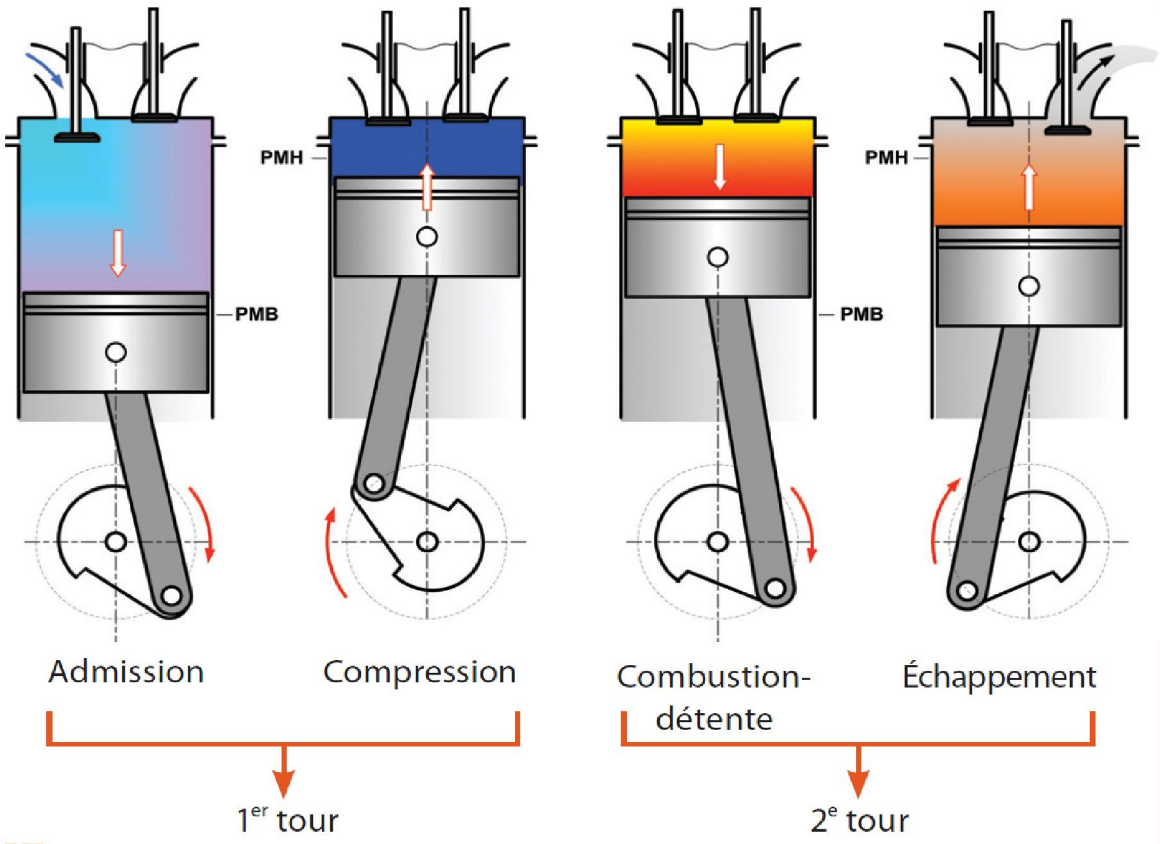
1. Objectifs

- Tracer le cycle théorique Beau de Rochas sur un tableur (Excel) :
  - ✓ En diagramme de Clapeyron
  - ✓ En diagramme « log – log » (log (p) – log(v))
- Calculer le travail du cycle par intégration discrète.
- Vérifier la formule du rendement théorique et calculer l'énergie perdue.

Ce travail permet de confronter les calculs analytiques aux calculs discrets sur tableur. Ces derniers correspondent aux calculs effectués sur les cycles réels à partir des acquisitions p-α.

2. Rappels

2.1. Cycle à 4 temps



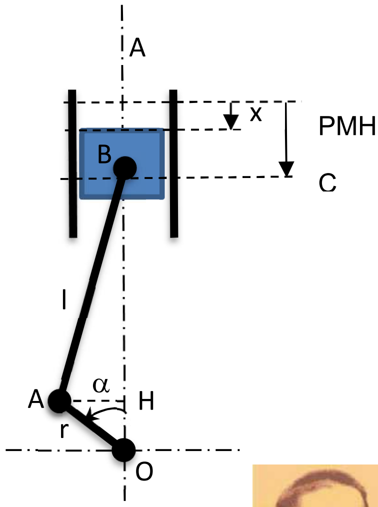
Le cycle dit à 4 temps est bien connu : c'est le principe de la plupart des moteurs à combustion interne depuis l'origine. On sait aussi qu'il existe le cycle dit à 2 temps, pour de petits moteurs généralement, ou alors pour de très gros moteurs.

phase	commentaire
Admission	L'augmentation de volume créée par le déplacement du piston provoque le mouvement de l'air (ou du mélange) dans le cylindre (remplissage). La soupape d'admission est ouverte.
Compression	Les 2 soupapes sont fermées. Le gaz est comprimé : pression et température augmentent.

Combustion-détente	Au PMH, le mélange s'enflamme. La pression et la température augmentent fortement. La pression génère une force sur le piston : c'est la phase motrice.
Echappement	La soupape d'échappement est ouverte. Le piston repousse les gaz brûlés à l'extérieur.

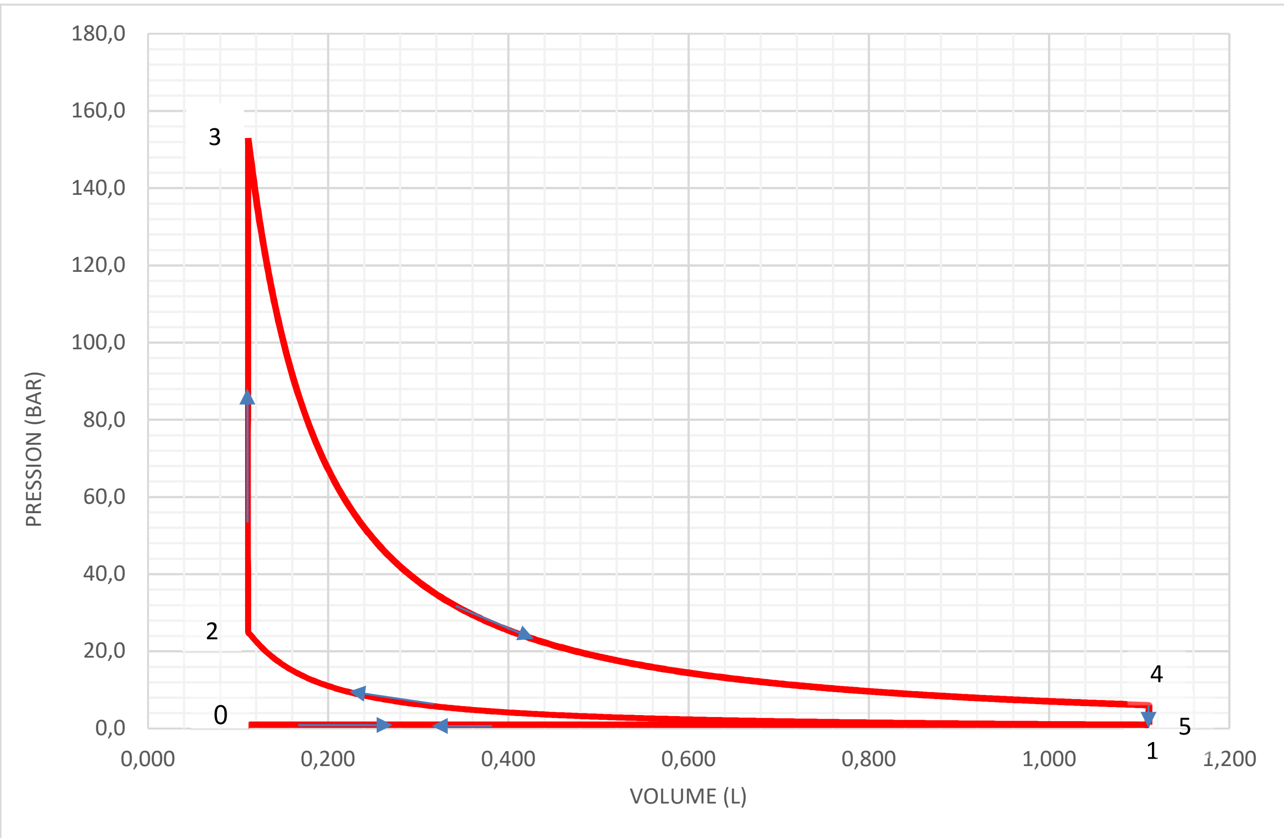
2.2. Caractéristiques géométriques

- Un moteur est structurellement défini par des données géométriques. On définit ainsi :
  - ✓ L'alésage A (diamètre du cylindre).
  - ✓ La course C : déplacement du piston entre ses extremum (Point Mort Haut et Point Mort Bas). La course est le double du rayon de manivelle r : $C = 2r$.
  - ✓ La cylindrée unitaire (1 cylindre) : $V_u = \frac{\pi A^2}{4} \cdot C$. Pour un moteur polycylindrique avec n cylindres on a bien sûr la cylindrée totale $V_t = n \cdot V_u$.
  - ✓ Le volume mort V_m : volume de la chambre de combustion lorsque le piston est au PMH.
  - ✓ Le rapport volumétrique $\varepsilon = \frac{V_u + V_m}{V_m}$.



2.3. Représentation et définition du cycle Beau de Rochas

- La réalité d'un tel système est complexe : les mouvements des gaz, la combustion, sont des phénomènes dépendant de beaucoup de facteurs.
- On a donc été amené à établir un **modèle théorique de référence** : c'est le cycle Beau de Rochas, défini plus précisément ci-après. Ce modèle est décrit à l'aide des lois de la thermodynamique.



On représente généralement le cycle dans un diagramme de Clapeyron (p=f(v)). Les différentes phases sont alors :

- De 0 à 1 : admission isobare à la pression atmosphérique fixée arbitrairement à : p= 1bar
- De 1 à 2 : compression isentropique : $p \cdot v^{\gamma} = cte$
- De 2 à 3 : combustion isochore. Le carburant apporte une énergie notée Q_1. La combustion est **instantanée** (isochore donc !). En reprenant le résultat de l'exercice §4.5.3 on a :

$$Q_1 = m \cdot c_v \cdot (T_4 - T_3)$$

- De 3 à 4 : détente isentropique. $p \cdot v^{\gamma} = cte.$
- De 4 à 5 : détente isochore : la soupape d'admission s'ouvre et la pression chute instantanément à la pression atmosphérique.
- De 5 à 0 : évacuation des gaz brûlés : isobare à p= 1bar.
  - ✓ Les tracés 0-1 et 5-0 sont donc superposés.
- Le rapport volumétrique est : $\varepsilon = \frac{V_1}{V_0} = \frac{V_4}{V_3}$...

2.4. Données

- Moteur unitaire : cylindrée $V_u = 1\ dm^3$; rapport volumétrique : $\varepsilon = 10$
- Pression et température initiales : $p_0 = p_1 = 1\ bar; T_0 = T_1 = 298\ K$
- Combustion :
  - ✓ Richesse : $\phi = 1$
  - ✓ $PCO = 14{,}5$
  - ✓ $PCI = 44\ MJ.kg^{-1}$
- Air : $\gamma = 1{,}4$; $M = 29.10^{-3}\ kg.mol^{-1}$

2.5. Hypothèses

- Le calcul se fera pour un système thermodynamique fermé (pas de transfert de matière), c'est-à-dire pour le cycle 1-2-3-4-5.
- Gaz parfaits : $p.v = n.R.T = m.r.T$, avec $R = 8{,}314\ J.kg^{-1}.K^{-1}$.
- Compression et détente isentropiques : loi de Laplace $p.v^{\gamma} = cte.$
- Combustion isochore.
- La masse de carburant correspond à celle de la masse d'air déplacée à la richesse 1.
- La masse de gaz mise en œuvre dans le cycle est la masse d'air seule « enfermée » dans le cylindre à la pression et température initiales.

3. Travail à effectuer

3.1. Déterminer les données manquantes de la feuille de calcul

Cycle Beau de Rochas

Données		
T1	298	K
P1	1	bar
M air	29	$g.mol^{-1}$
R	8,314	$J.kg^{-1}.K^{-1}$
γ	1,4	
PCI	44	$kJ.g^{-1}$
PCO	14,5	su
ϕ	1	su
V	1	dm^3
ε	10	su

A calculer…		
r		$J.kg^{-1}.K^{-1}$
cp		$J.kg^{-1}.K^{-1}$
cv		$J.kg^{-1}.K^{-1}$
vm		dm^3
m air déplacé		kg
m carb		kg
énergie Q1		J
m air en œuvre		kg
masse volumique air		$kg.m^{-3}$
rendement th		
rendement th		"exact"

volume (dm^3)	compression	temp_comp	temp det	pression détente	travail compression	travail détente	Wcycle

3.1.1. Caractéristiques de l'air :

- ✓ Constante de l'air : $r = \frac{R}{M} = \frac{8,314}{29.10^{-3}} = 286,7\, J.kg^{-1}.K^{-1}$
- ✓ Capacités thermiques massique à volume constant et à pression constante : on utilise les **relations de Mayer :**
  - $\frac{c_p}{c_v} = \gamma$
  - $c_p - c_v = r$
    - D'où l'on tire : $\frac{c_v}{r} = \frac{1}{\gamma - 1} \Rightarrow c_v = \frac{r}{\gamma - 1}$ et $c_p = \frac{\gamma . r}{\gamma - 1}$
    - AN : $c_v = \frac{286,7}{1,4-1} = 716,7\, J.kg^{-1}.K^{-1}$; $c_p = 1,4 \times 716,7 = 1003,4\, J.kg^{-1}.K^{-1}$

3.1.2. Volume mort :

$$vm = \frac{V_u}{\varepsilon - 1}$$

- ✓ AN : $vm = \frac{1}{10-1} = 0,111\, dm^3$

3.1.3. Masse d'air déplacée :

$$m_{a\_d} = \frac{P_1 . V_u}{r . T_1}$$

- ✓ AN : $m_{a\_d} = \frac{10^5 \cdot 10^{-3}}{286,7 \times 298} = 1,17.10^{-3} kg$

3.1.4. Masse de carburant :

$$m_{carb} = \phi \cdot m_{a\_d} \cdot \frac{1}{PCO}$$

- ✓ AN : $m_{carb} = 1 \times 1{,}17.10^{-3} \times \frac{1}{14{,}5} = 8{,}07 \cdot 10^{-5}\ kg$

3.1.5. Energie mise en œuvre :

$$Q_1 = m_{carb} \cdot PCI$$

- ✓ AN : $Q_1 = 8{,}07 \cdot 10^{-5} \times 44 \cdot 10^{6} = 3552\ J$

3.1.6. Masse d'air en œuvre :

$$m_{a\_o} = \frac{P_1.(V_u + vm)}{r.T_1}$$

- ✓ AN : $m_{a\_o} = \frac{10^5 \cdot 1{,}111 \cdot 10^{-3}}{286{,}7 \times 298} = 1{,}30.10^{-3} kg$

Dans un souci de clarté dans la suite, on pose : $\boldsymbol{m_{a\_o} = m}$

3.2. Calcul des "points clés" du cycle

- Il s'agit de déterminer l'état de la masse de gaz à chaque point du cycle. L'état est défini par les valeurs de pression, volume et température.

3.2.1. Point 0

- $p_0 = 1\ bar; V_0 = vm = 0{,}111\ dm^3; T_0 = 298\ K$

3.2.2. Point 1

- $p_1 = 1\ bar; V_1 = V_u + vm = 1{,}111\ dm^3; T_1 = 298\ K$

3.2.3. Point 2

- Utilisons la loi de Laplace $p \cdot v^{\gamma} = cte$: le produit $p \cdot v^{\gamma}$ a donc la même valeur quel que soit le point de transformation considéré, et à fortiori pour les points initial et final.

$$p_1 \cdot v_1^{\gamma} = p_2 \cdot v_2^{\gamma} \Longrightarrow p_2 = p_2 \cdot \frac{v_1^{\gamma}}{v_2^{\gamma}} = p_1 \cdot \varepsilon^{\gamma}$$

$$p_2 = p_1 \cdot \varepsilon^{\gamma} \text{ ou } \frac{p_2}{p_1} = \varepsilon^{\gamma}$$

- ✓ AN : $p_2 = 1 \cdot 10^{1,4} = 25{,}12\ bar$

- L'équation des gaz parfaits nous donne par ailleurs :

$$p(Pa).v(m^3) = m(kg).r(J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}).T(K)$$

- ✓ On peut donc écrire : $p_1.v_1 = m.r.T_1$ et $p_2.v_2 = m.r.T_2$
- ✓ On en tire : $\frac{p_1.v_1}{p_1.v_1} = \frac{T_1}{T_1} \Longrightarrow \frac{p_1}{p_1} = \frac{T_1}{T_1} \cdot \frac{v_1}{v_1} = \frac{T_1}{T_1} \cdot \varepsilon$
- ✓ En reprenant l'expression du rapport des pressions : $\frac{p_3}{p_2} = \varepsilon^{\gamma} = \frac{T_3}{T_2} \cdot \varepsilon \Longrightarrow T_3 = T_2 \cdot \varepsilon^{\gamma - 1}$

$$T_2 = T_1 \cdot \varepsilon^{\gamma-1} \text{ ou } \frac{T_2}{T_1} = \varepsilon^{\gamma-1}$$

⚠ La température doit être en Kelvin !

- ✓ AN : $T_2 = 298 \cdot 10^{0,4} = 748{,}5\ K$

3.2.4. Point 3

- Reprenons le résultat déjà obtenu précédemment : $Q_1 = m \cdot c_v \cdot (T_3 - T_2)$

- Il vient donc : $T_3 = \frac{Q_1}{m \cdot c_v} + T_2$

$$T_3 = \frac{Q_1}{m \cdot c_v} + T_1 \cdot \varepsilon^{\gamma - 1}$$

⚠ La température doit être en Kelvin !

- AN : $T_3 = \frac{3552}{1{,}30.10^{-3} \times 716{,}7} + 748{,}5 = 4561\ K$

- On en déduit la pression :
  - $p_2 . v_2 = m . r . T_2$ et $p_3 . v_3 = m . r . T_3$
  - $v_2 = v_3$
  - $\frac{p_3}{p_2} = \frac{T_3}{T_2} \Longrightarrow p_3 = p_2 \cdot \frac{T_3}{T_2}$
  - AN : $p_3 = 25{,}12 \times \frac{4561}{748{,}5} = 153\ bar$
  - ⚠ Attention, avec la formule $p_3 . v_3 = m . r . T_3$, si on veut P_3 en bar, avec V_3 en dm^3, un coefficient de 10^{-2} apparaît…

$$P_3(bar) * 10^5 (Pa. bar^{-1}) = \frac{m . r . T_3}{V_3(dm^3) . 10^{-3} (m^3 . dm^{-3})}$$

3.2.5. Point 4

- Le calcul est similaire à celui du point 3. Il suffit d'adapter les indices…
  - $p_3 \cdot v_3^{\gamma} = p_4 \cdot v_4^{\gamma} \Longrightarrow p_4 = p_3 \cdot \frac{v_3^{\gamma}}{v_4^{\gamma}} = p_3 \cdot \varepsilon^{-\gamma}$

$$p_4 = p_3 \cdot \varepsilon^{-\gamma} \Longrightarrow \frac{p_4}{p_3} = \varepsilon^{-\gamma}$$

  - AN : $p_4 = 153 \cdot 10^{-1{,}4} = 6{,}09\ bar$
- De même pour la température : $\frac{p_4}{p_3} = \frac{T_4}{T_3} \cdot \frac{v_3}{v_4} = \frac{T_4}{T_3} \cdot \varepsilon^{-1} = \varepsilon^{-\gamma} \Longrightarrow \frac{T_4}{T_3} = \varepsilon^{1-\gamma}$

$$T_4 = T_3 \cdot \varepsilon^{1-\gamma}$$

  - AN : $T_4 = 4561 \cdot 10^{1-1{,}4} = 1816\ K$

3.2.6. Point 5

- $p_5 = 1\ bar ; V_5 = V_u + vm = 1{,}111\ dm^3$
- $\frac{p_5 . v_5}{p_4 . v_4} = \frac{T_5}{T_4} \Longrightarrow T_5 = T_4 \cdot \frac{p_5}{p_4}$
  - AN : $T_5 = 1816 \cdot \frac{1}{6{,}09} = 298\ K$

3.2.7. Point 6

- $p_6 = 1\ bar ; V_6 = vm = 0{,}111\ dm^3 ; T_6 = T_1$

4. Calcul discret du cycle

- On appelle "calcul discret" un calcul non pas en fonction d'une variable continue au sens mathématique du terme, mais en fonction d'un "tableau" de valeurs discontinues. Les logiciels de calcul fonctionnent ainsi (d'où le nom générique de "tableurs").
- La variable de fonctionnement du cycle est le volume. On va donc créer un tableau de volume : une colonne de valeurs de V, en partant du PMH vers le PMB, par pas de $V/400$ (V : cylindrée).
  - Le point courant (un point dans le tableau) est noté avec l'indice *i.*

- On pourra alors calculer l'évolution de la pression et de la température en fonction du volume, puis le travail du cycle…

4.1. Compression

- Pression de compression : prenons comme point de référence (la "constante") le point initial (1).
  Pour chaque point *i* de la transformation on a : $p_1 \cdot v_1^\gamma = p_\mathrm{i} \cdot v_\mathrm{i}^\gamma \Rightarrow p_\mathrm{i} = p_1 \cdot \frac{v_1^\gamma}{v_\mathrm{i}^\gamma} = p_1 \cdot \left(\frac{V_1}{V_i}\right)^\gamma$

$$p_\mathrm{i} = p_1 \cdot \left(\frac{V_1}{V_i}\right)^\gamma$$

  - On retrouve bien sûr pour le point 2 : $p_2 = p_1 \cdot \varepsilon^\gamma$

- Température de compression :
  - ✓ On a : $P = \frac{m.r.T}{V}$
  - ✓ Par conséquent : $\frac{m.r.T_i}{V_i} = \frac{m.r.T_1}{V_1} \cdot \left(\frac{V_1}{V_i}\right)^\gamma \Rightarrow T_i = T_1 \cdot \left(\frac{V_1}{V_i}\right)^{\gamma-1}$
    - On retrouve bien sûr : $T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = T_1 \cdot \varepsilon^{\gamma-1}$

4.2. Combustion

- Température de combustion (point 3) : $T_3 = \frac{Q_1}{m \cdot cv} + T_2 = \frac{Q_1}{m \cdot cv} + T_1 \cdot \varepsilon^{\gamma-1}$
- Pression de combustion : $P_3 = \frac{m.r.T_3}{V_3}$ ou $p_3 = p_2 \cdot \frac{T_3}{T_2}$

4.3. Détente

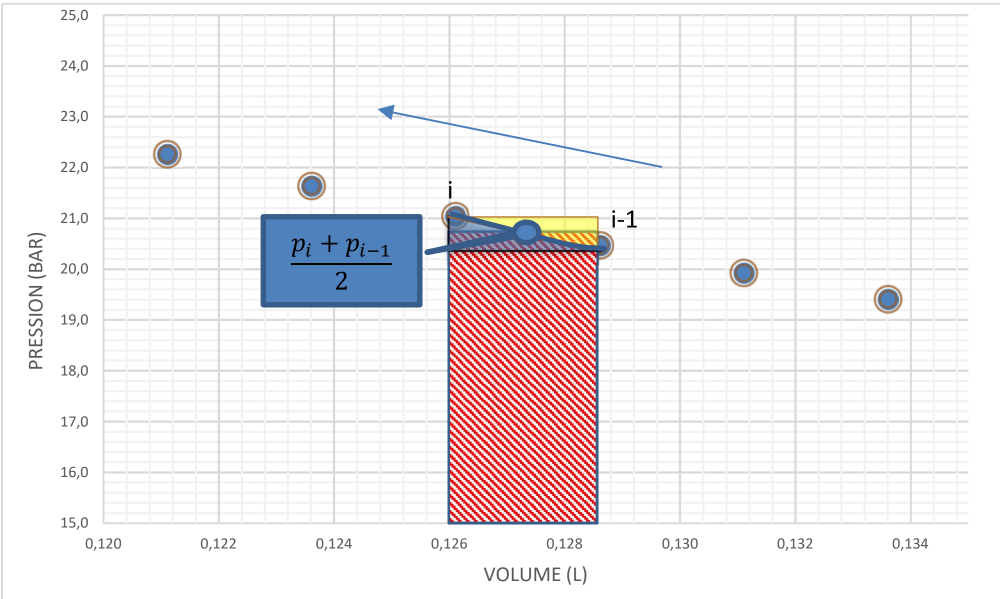
- Température de détente : en reprenant les calculs de la compression et en « adaptant » les indices, il vient $T_i = T_3 \cdot \left(\frac{V_3}{V_i}\right)^{\gamma-1}$
- Pression de détente : on peut encore reprendre les calculs de la compression : $P_i = P_3 \cdot \left(\frac{V_3}{V_i}\right)^\gamma$

5. Calculs des travaux

5.1. Principe

- On a vu que le travail "élémentaire" est donné par : $dW = -p \cdot dv$
- En calcul discret, on peut considérer le travail "d'une tranche" définie par 2 points consécutifs tel que $\Delta W_i = -p_i \cdot \Delta v_i$
- Il faut néanmoins préciser comment on détermine p_i et Δv_i. Pour minimiser l'erreur, on prendra par exemple $p_i = \frac{p_i + p_{i-1}}{2}$ et $\Delta v_i = (v_i - v_{i-1})$. On aura donc :

$$\Delta W_i = -\frac{p_i + p_{i-1}}{2} \cdot (v_i - v_{i-1})$$



- Il suffira ensuite de faire la somme des ΔW_i pour obtenir le travail total.

5.2. Travaux de compression et détente

- En respectant le sens de la transformation :

$$W_i = \Delta W_i + W_{i-1} = -\frac{(p_i + p_{i-1})}{2} \cdot (V_i - V_{i-1}) + W_{i-1}$$

  - ✓ ⚠ Attention, pour obtenir le travail en Joules avec les pressions en bar et le volume en dm³, il apparaît un coefficient 10^2 :

$$dW = -p(bar).10^5(Pa.bar^{-1}).dv(dm^3).10^{-3}(m^3.dm^{-3})$$

6. Calcul du rendement :

- Pour un cycle, le rendement est défini par le rapport de l'énergie récupérée de façon utile (par conséquent ici le travail du cycle) à l'énergie introduite (Q_1) :

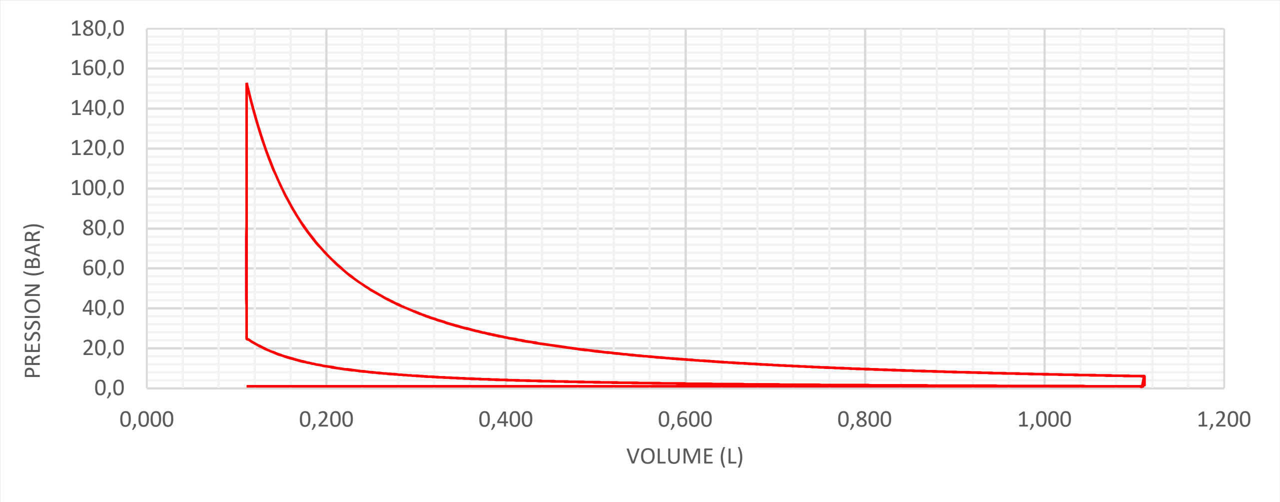
$$\eta_{th} = \left|\frac{W_{cycle}}{Q_1}\right|$$

- On peut calculer le rendement du cycle BdR :
  - ✓ A partir de la formule analytique bien connue : $\eta_{th} = 1 - \varepsilon^{1-\gamma}$
  - ✓ A partir des travaux calculés par intégration discrète : $\eta_{th} = \left|\frac{W_{comp+W_{det}}}{Q_1}\right|$

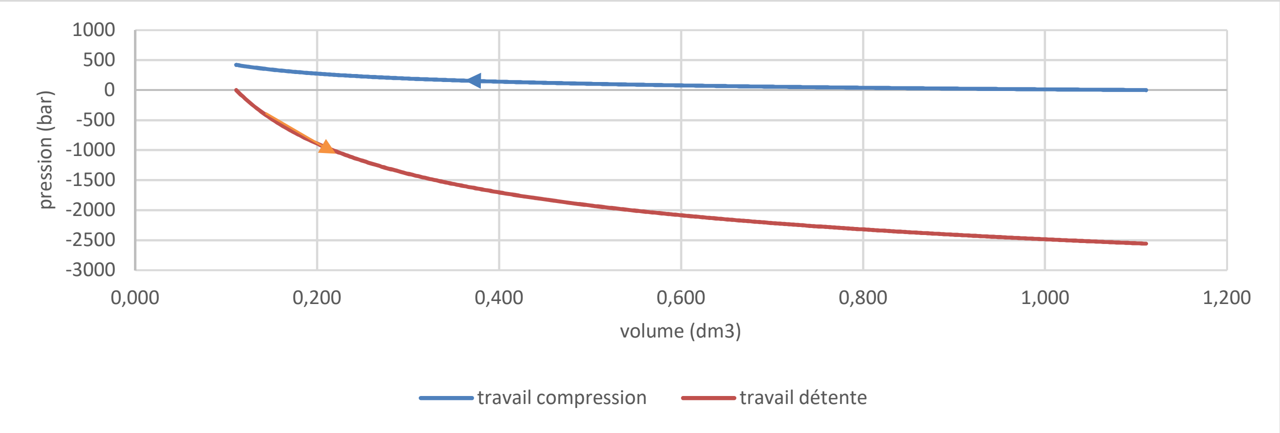
7. Résultats (voir fichier Excel)

7.1. Graphe pression – volume (diagramme de Clapeyron)

Les graphiques sont tracés en "nuage de points". De cette façon, on peut tracer les verticales (isochores) en insérant une ligne au PMH et au PMB (2 lignes avec le même volume et les pressions mini et maxi).

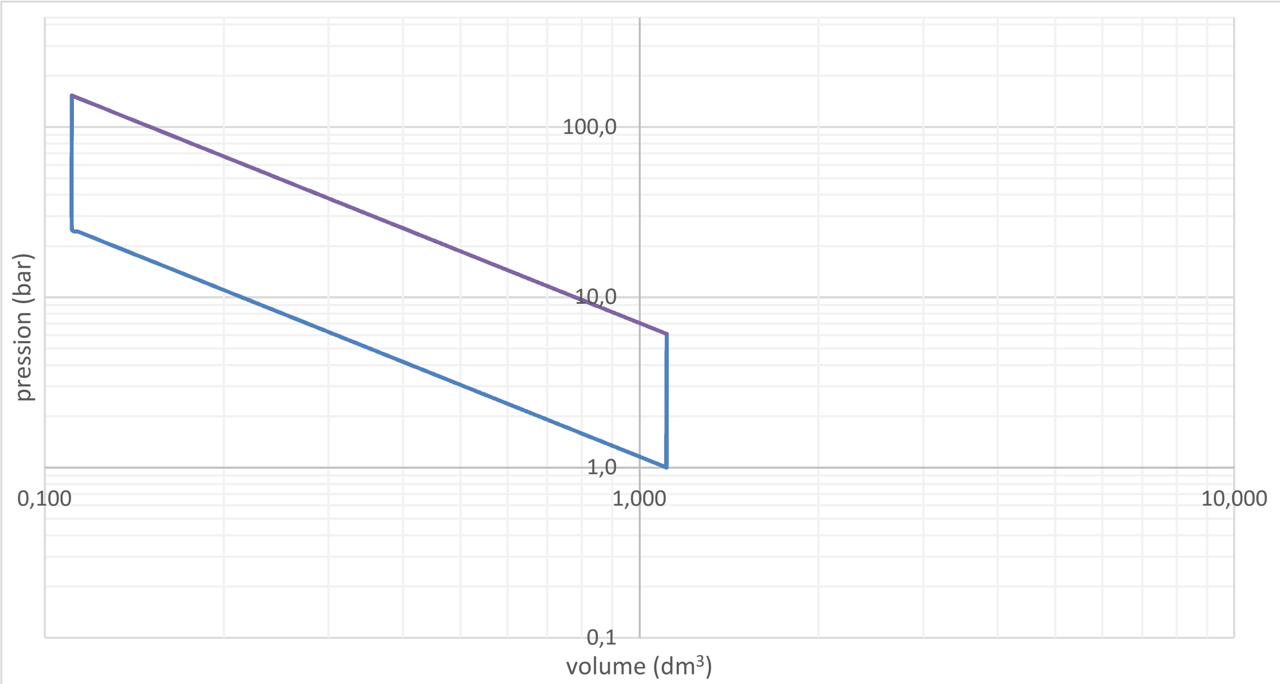


7.2. Graphe des travaux



- Le travail de compression "part" de 0 (au PMB) à 420 J. Ce travail est positif : le gaz reçoit de l'énergie. $W_{comp} = 420\,J$.
- Le travail de détente "part" de 0 (au PMH) à -2556 J. Ce travail est négatif : le gaz cède de l'énergie. $W_{det} = -2556\,J$.
- Le rendement sera donc : $\eta_{th} = \left|\frac{W_{comp}+W_{det}}{Q_1}\right| = \left|\frac{420-2556}{3552}\right| = 0{,}601$, soit 60,1%. On appelle ce rendement le rendement thermodynamique théorique, ou plus simplement le rendement théorique, que l'on note η_{th}.

7.3. Graphe log(p)-log(v)



- Le graphe log(p) – log(v) permet de retrouver l'exposant isentropique. En effet l'utilisation des propriétés des logarithmes nous donne :

$$\log(p) = \log(k \cdot v^{-\gamma}) = K - \gamma \cdot \log(v)$$

Dans un repère $X = \log(v)\,, Y = \log(p)$ il vient :

$$Y = -\gamma \cdot X + K$$

- On a ainsi réalisé une anamorphose : dans ce repère, la courbe de compression (ou de détente) devient une droite dont la pente est l'exposant isentropique. On peut facilement le calculer par :

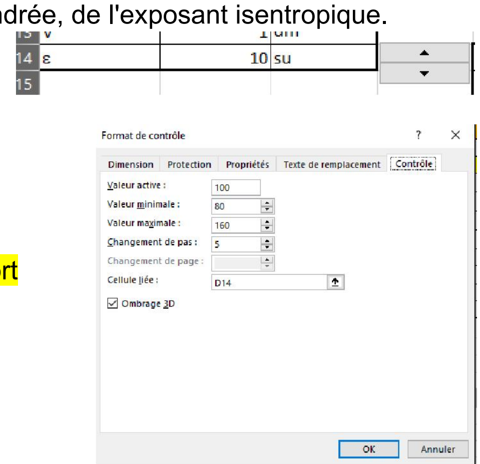
$\gamma = -\frac{\Delta Y}{\Delta X} = -\frac{\log\left(\frac{p_i}{p_j}\right)}{\log\left(\frac{v_i}{v_j}\right)}$, avec i et j des indices des « lignes » dans le tableau p-v.

γ calculé	**1,4**

7.4. Facteurs d'influence sur le rendement théorique

Changer la valeur du rapport volumétrique, de la richesse, de la cylindrée, de l'exposant isentropique. Observer la valeur du rendement.

On peut ajouter des "toupies" pour faire varier un paramètre, voir l'exemple ci-contre…



Quels sont les paramètres qui influent sur le rendement ?

Le rendement théorique du cycle BdR ne dépend donc que du rapport volumétrique et de l'exposant isentropique.