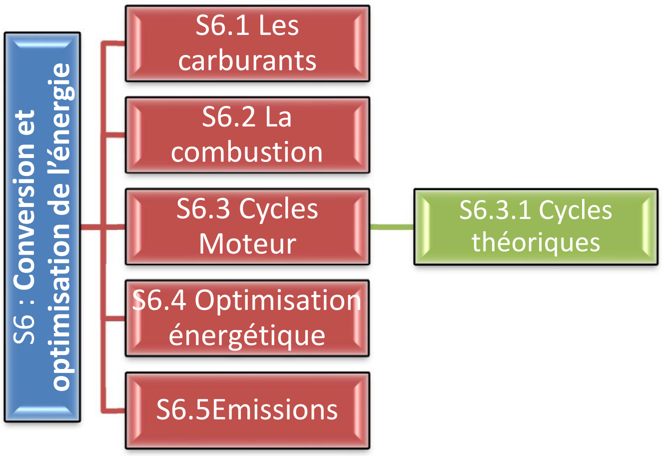
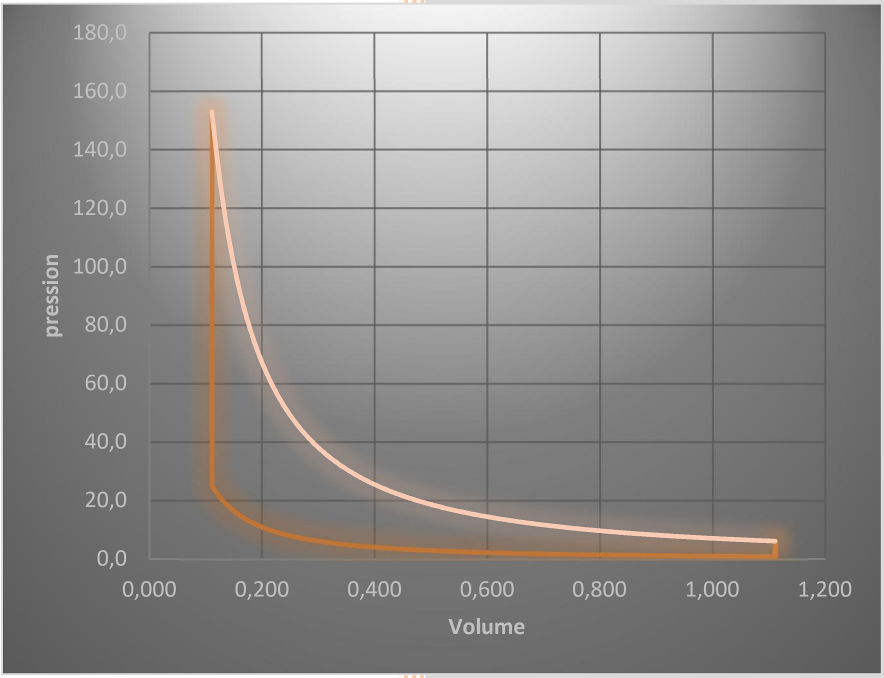


Cycles théoriques
Beau de Rochas
Document de référence 1



STS MCI

MCI Brest

TABLE

DOCUMENT DE REFERENCE 1 : CALCULS ANALYTIQUES

1. Calcul analytique des travaux

1.1. Calcul sur une isobare

- Le travail s'écrit entre les points i (initial) et f (final) :

$$W_i^f = -\int_i^f p \cdot dv$$

La pression étant constante, on a :

$$W_i^f = -p \cdot \int_i^f dv = -p \cdot [v_f - v_i]$$

- Pour l'admission et l'échappement on aura : $W_0^1 = -p_0 \cdot V$ et $W_5^6 = +p_0 \cdot V$. Ces 2 travaux s'annulent.

1.2. Principe du calcul sur une isentropique :

1.2.1. Calcul par le premier principe

- Pour une transformation isentropique on a, par définition : $\Delta U = \Delta W = m \cdot c_v \cdot \Delta T$
- On a déjà déterminé T_2, T_3 et T_4 : $T_2 = T_1 \cdot \varepsilon^{\gamma-1}$; $T_3 = \frac{Q_1}{m \cdot c_v} + T_1 \cdot \varepsilon^{\gamma-1}$; $T_4 = T_3 \cdot \varepsilon^{1-\gamma}$
- Il vient donc :

$$W_1^2 = m \cdot c_v \cdot (T_2 - T_1) = m \cdot c_v \cdot (T_1 \cdot \varepsilon^{\gamma-1} - T_1) = m \cdot c_v \cdot T_1 \cdot (\varepsilon^{\gamma-1} - 1)$$

$$W_3^4 = m \cdot c_v \cdot (T_4 - T_3) = m \cdot c_v \cdot T_3 \cdot (\varepsilon^{1-\gamma} - 1)$$

- AN :
  - ✓ $W_1^2 = 1{,}3 \cdot 10^{-3} \cdot 716{,}7 \cdot 298 \cdot (10^{0{,}4} - 1) = 420\,J$
  - ✓ $W_3^4 = 1{,}3 \cdot 10^{-3} \cdot 716{,}7 \cdot 748{,}5\,(10^{-0{,}4} - 1) = -2558\,J$

1.2.2. Par calcul intégral

- Sur une isentropique, on a selon la loi de Laplace $p.v^\gamma = cte$. On peut donc exprimer facilement la pression en fonction du volume et d'une constante (conditions au point initial i) :

$$p = p_i.{v_i}^\gamma.v^{-\gamma}$$

- Le travail s'écrit donc entre les points i (initial) et f (final) :

$$W_i^f = -\int_i^f p \cdot dv = -p_i.{v_i}^\gamma \int_i^f v^{-\gamma} \cdot dv = \frac{p_i.{v_i}^\gamma}{\gamma - 1} \cdot \left[v_f^{1-\gamma} - v_i^{1-\gamma}\right]$$

$$W_i^f = \frac{p_i.{v_i}^\gamma}{\gamma - 1} \cdot \left[v_f^{1-\gamma} - v_i^{1-\gamma}\right]$$

1.3. Travail de compression

- Pour la compression, on a ainsi : $W_{comp} = \frac{p_1.v_1{}^\gamma}{\gamma-1} \cdot \left[v_2^{1-\gamma} - v_1^{1-\gamma}\right]$, et en remarquant que : $\varepsilon = \frac{v_1}{v_2}$, il vient :

$$W_{comp} = \frac{p_1.v_1}{\gamma - 1} \cdot \left[\varepsilon^{\gamma-1} - 1\right]$$

  - ✓ AN : $W_{comp} = 100\,\frac{1 \times 1{,}111}{1{,}4-1} \cdot \left[10^{1{,}4-1} - 1\right] = 420\,J$

1.4. Travail de détente

- Pour la détente on aura de même : $W_{det} = \frac{p_3.v_3{}^\gamma}{\gamma-1} \cdot \left[v_4^{1-\gamma} - v_3^{1-\gamma}\right]$, $\varepsilon = \frac{v_4}{v_3}$ et donc :

$$W_{det} = \frac{p_3.v_3}{\gamma - 1} \cdot \left[\varepsilon^{1-\gamma} - 1\right]$$

  - ✓ AN : $W_{det} = 100\,\frac{153 \times 0{,}111}{1{,}4-1} \cdot \left[10^{1-1.4} - 1\right] = -2555\,J$

2. Bilan du cycle

- En remarquant que $p_3.v_3 = m \cdot r \cdot T_3$, on a : $W_{det} = \frac{m \cdot r \cdot T_3}{\gamma-1} \cdot \left[\varepsilon^{1-\gamma} - 1\right]$

On sait déjà que : $T_3 = \frac{Q_1}{m \cdot cv} + T_1 \cdot \varepsilon^{\gamma-1}$ et $\frac{cv}{r} = \frac{1}{\gamma-1}$

Il vient : $W_{det} = \frac{m \cdot r}{\gamma-1} \cdot \left[\frac{Q_1}{m \cdot cv} + T_1 \cdot \varepsilon^{\gamma-1}\right] \cdot \left[\varepsilon^{1-\gamma} - 1\right] = Q_1 \cdot \varepsilon^{1-\gamma} + \frac{m \cdot r}{\gamma-1} \cdot T_1 - Q_1 - \frac{m \cdot r}{\gamma-1} \cdot T_1 \cdot \varepsilon^{\gamma-1}$

Soit : $W_{det} = Q_1 \cdot (\varepsilon^{1-\gamma} - 1) + \frac{p_1.v_1}{\gamma-1} \cdot (1 - \varepsilon^{\gamma-1})$

- Bilan du cycle : $W_{cycle} = W_{comp} + W_{det} = \frac{p_1.v_1}{\gamma-1} \cdot \left[\varepsilon^{\gamma-1} - 1\right] + Q_1 \cdot (\varepsilon^{1-\gamma} - 1) + \frac{p_1.v_1}{\gamma-1} \cdot (1 - \varepsilon^{\gamma-1})$

$$W_{cycle} = Q_1 \cdot (\varepsilon^{1-\gamma} - 1) = 3552 \times (10^{-0{,}4} - 1) = -2138\,J$$

Pour un cycle BdR, le travail ne dépend que de l'énergie introduite et du rapport volumétrique.

- On en déduit l'énergie perdue Q_2 : $W_{cycle} + Q_1 + Q_2 = 0 \Longrightarrow Q_2 = -\left(W_{cycle} + Q_1\right) = -Q_1 \cdot \varepsilon^{1-\gamma}$

$$Q_2 = -Q_1 \cdot \varepsilon^{1-\gamma} = -3552 \times 10^{-0{,}4} = -1414\,J$$

Et le rendement est : $\eta = \left|\frac{W_{cycle}}{Q_1}\right| = \left|\frac{Q_1 \cdot (\varepsilon^{1-\gamma} - 1)}{Q_1}\right| = 1 - \varepsilon^{1-\gamma}$

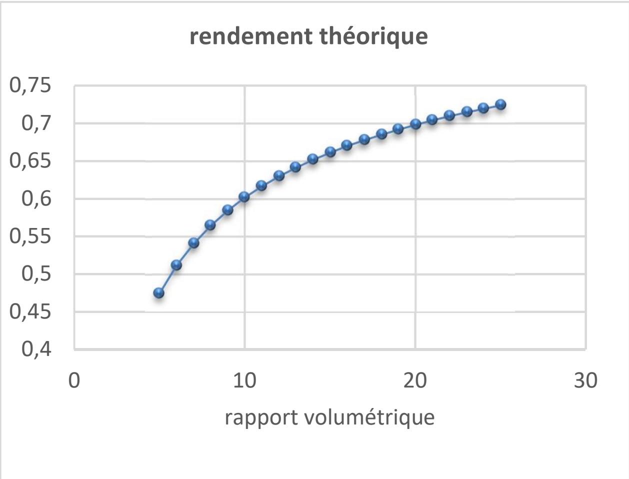
- On peut également calculer le rendement de façon très simple :

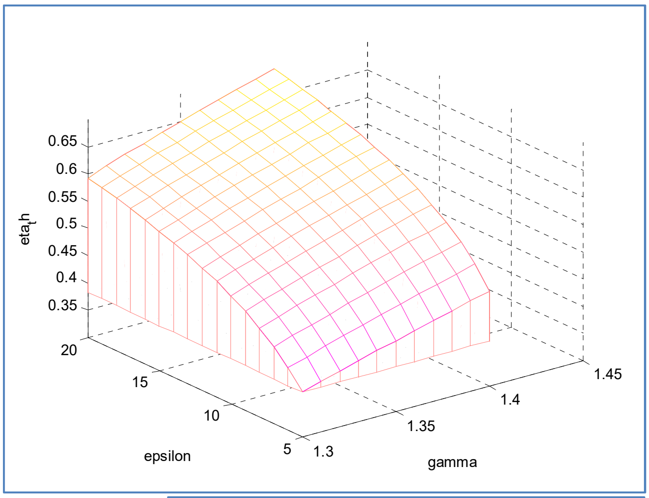
$$\eta_{th} = \left|\frac{W_{cycle}}{Q_1}\right| = \left|\frac{Q_1 + Q_2}{Q_1}\right| = 1 + \frac{m \cdot cv \cdot (T_1 - T_4)}{m \cdot cv \cdot (T_3 - T_2)} = 1 - \frac{(T_4 - T_1)}{(T_3 - T_2)}$$

On sait que $\frac{T_1}{T_2} = \frac{T_4}{T_3} = \varepsilon^{1-\gamma}$ (voir séquence 2)).

En remarquant la propriété des fractions : $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{A-C}{B-D}$, il vient : $\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \varepsilon^{1-\gamma}$

Le rendement théorique du cycle BdR ne dépend donc que du rapport volumétrique et de l'exposant isentropique.





3. Exercice complémentaire : script Matlab pour graphique 3D…

Editor - C:\Users\remy\Documents\travail\MCI_2016\savoirs\S6_Conversion_optimisation_energie\S6.3_

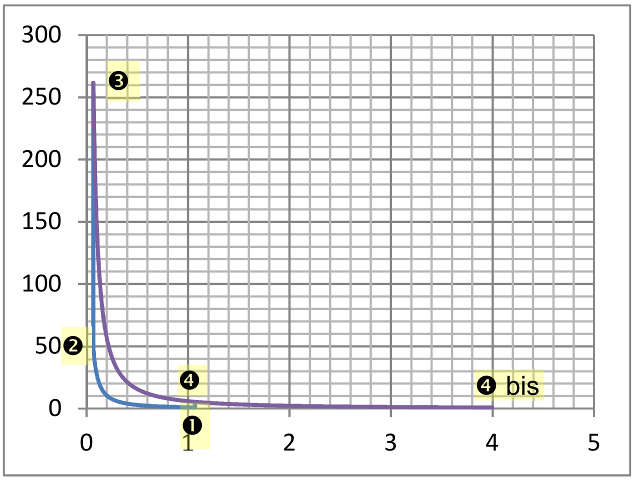
```
%vecteur rapport volumétrique
epsilon=5:1:20
%vecteur gamma
gamma=1.3:0.01:1.4
%boucles
for c=1:size((epsilon),2)
    for d=1:size((gamma),2)
        eta(c,d)=1-epsilon(c)^(1-gamma(d))
    end
end
%graphique
meshz(gamma,epsilon,eta)
xlabel 'gamma'
ylabel 'epsilon'
zlabel 'eta_th'
```

4. Energie récupérable

- On peut évidemment voir que si la détente se « prolonge » jusqu'à revenir au niveau de la pression initiale de 1 bar, on peut récupérer du travail. On peut facilement calculer le travail de détente complet W_3^{4bis}.

$$p.v^{\gamma} = cte = p_3.{v_3}^{\gamma}$$

$$W_3^{4bis} = \int_3^{4bis} -p.dv$$



- On cherche le travail pour $p = p_{4bis} = 1\ bar$. Il faut donc effectuer un changement de variable d'intégration en p, et non en v.

$$v = (p_3 \cdot {v_3}^{\gamma} \cdot p^{-1})^{\frac{1}{\gamma}} = {p_3}^{\frac{1}{\gamma}} \cdot v_3 \cdot p^{-\frac{1}{\gamma}}$$

Et en formant la différentielle de v :

$$dv = -\frac{{p_3}^{\frac{1}{\gamma}} \cdot v_3}{\gamma} \cdot p^{-\frac{\gamma+1}{\gamma}} \cdot dp$$

Que l'on replace dans l'intégrale :

$$W_3^{4bis} = \int_3^{4bis} p.\frac{{p_3}^{\frac{1}{\gamma}} \cdot v_3}{\gamma} \cdot p^{-\frac{\gamma+1}{\gamma}} \cdot dp = \int_3^{4bis} \frac{{p_3}^{\frac{1}{\gamma}} \cdot v_3}{\gamma} \cdot p^{-\frac{1}{\gamma}} \cdot dp$$

$$W_3^{4bis} = \frac{p_3^{\frac{1}{\gamma}} \cdot v_3}{\gamma - 1} \cdot \left[p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]_3^{4bis} = \frac{p_3^{\frac{1}{\gamma}} \cdot v_3}{\gamma - 1} \cdot \left(p_{4bis}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - p_3^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)$$

$$W_3^{4bis} = \frac{p_3^{\frac{1}{\gamma}} \cdot v_3}{\gamma - 1} \cdot \left(p_{4bis}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - p_3^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)$$

A.N. : $W_3^{4bis} = -3240\,J$

- Il ne faut pas oublier le travail d'échappement :

$$W_{4bis}^1 = -p_1 \cdot (V_1 - V_{4bis})$$

  - ✓ Le volume se détermine facilement :

$$V_{4bis} = p_4^{\frac{1}{\gamma}} \cdot V_4 = \left(\frac{p_4}{p_{4bis}}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \cdot V_1$$

$$W_{4bis}^1 = -p_1 \cdot V_1 \left(1 - \left(\frac{p_4}{p_{4bis}}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right)$$

  - ✓ AN : $V_{4bis} = 4{,}03\ dm^3$; $W_{4bis}^1 = 293\,J$

- Le travail du cycle avec détente complète est donc :

$$W_{cycle\_\det\_comp} = W_{comp} + W_3^{4bis} + W_{4bis}^1 = 420 - 3240 + 293 = -2528\,J$$

- Le travail gagné par la détente prolongée est :

$$\Delta W = \left|W_{cycle\_\det\_comp} - W_{cycle}\right| = |-2528 + 2138| = 389\text{ J}$$

- Le rendement théorique serait alors de : $\eta_{th} = \left|\frac{W_{comp} + W_3^{4bis} + W_{4bis}^1}{Q_1}\right| = \left|\frac{420 - 3240 + 293}{3552}\right| = 0{,}71$

  - ✓ On ne retrouve pas un rendement égal à 1… En effet, si l'on est revenu, en « suivant » cette transformation isentropique, à une pression de 1 bar, on n'a pas retrouvé la température initiale de 298 K. La température se détermine facilement :

$$T_{4bis} = T_3 \left(\frac{V_3}{V_{4bis}}\right)^{\gamma-1} \text{ et } \left(\frac{V_3}{V_{4bis}}\right) = \left(\frac{p_{4bis}}{p_3}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \text{ soit :}$$

$$T_{4bis} = T_3 \cdot \left(\frac{p_{4bis}}{p_3}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

A.N. : $T_{4bis} = 1083\,K$

  - ✓ Considérons la variation d'énergie interne entre les états (3) et (1) dans lequel le gaz se trouve à la pression de 1 bar et la température à 298 K. L'énergie interne étant une fonction d'état, elle ne dépend que des états final et initial. On peut donc considérer une transformation isentropique puis une transformation isobare avec échange de chaleur. Le premier principe appliqué à la transformation 3 – 1 donne :

$$\Delta U_3^1 = m \cdot c_v \cdot (T_1 - T_3) = \Delta U_3^{4bis} + \Delta U_{4bis}^1 = W_3^{4bis} + Q_3^{4bis} + W_{4bis}^1 + Q_{4bis}^1$$

$Q_3^{4bis} = 0$ et

$W_3^{4bis} = -3240\,J$

$$W_{4bis}^{1} = 293\,J$$

$$m \cdot c_v \cdot (T_1 - T_3) = 1{,}30.10^{-3} \times 716{,}7 \times (298 - 4559) = -3970\,J$$

$$Q_{4bis}^{1} = -3970 + 3240 - 293 = -1023\,J$$

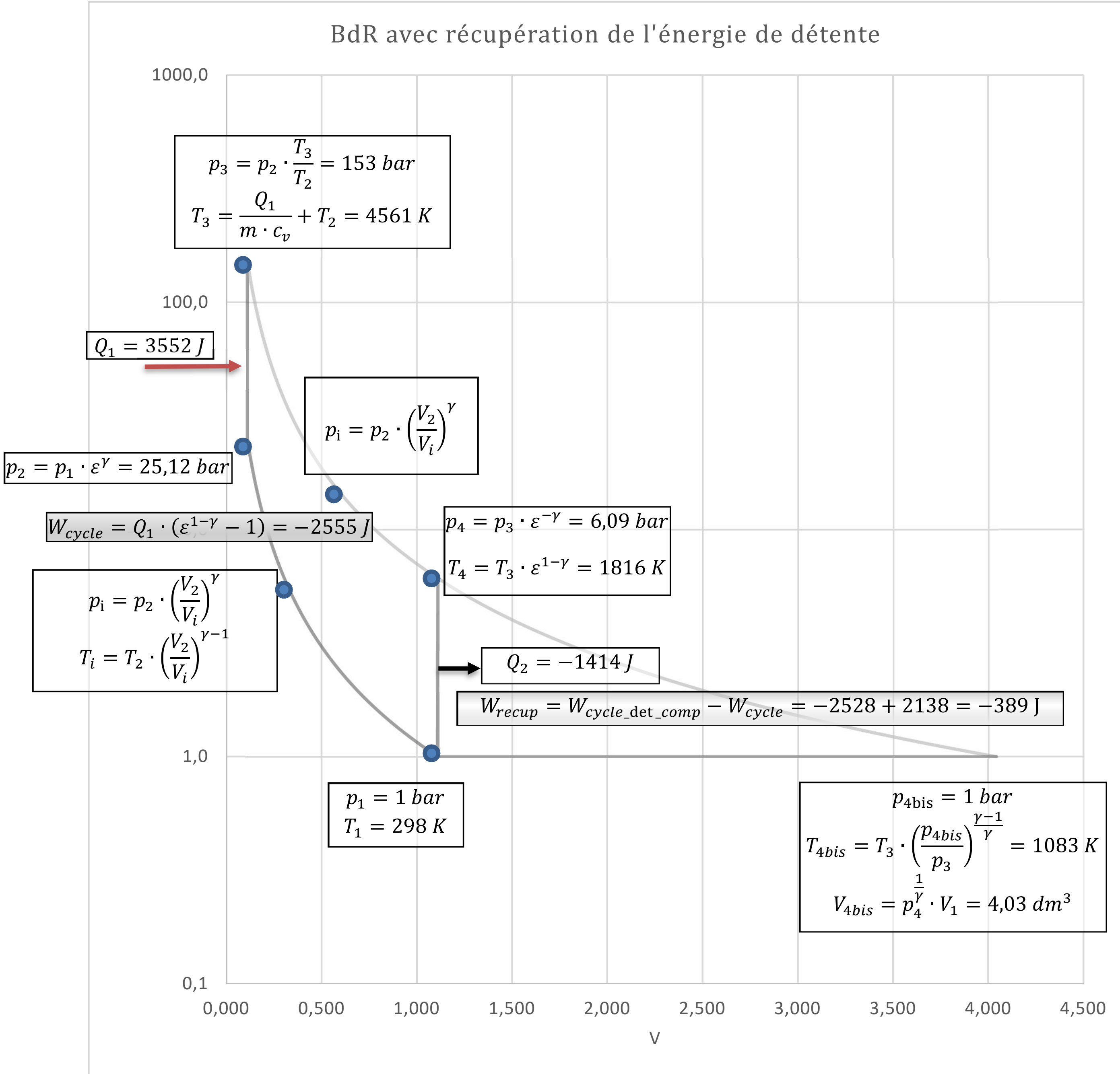
Le bilan donne dans ces conditions : $\left|\frac{W_{comp}+W_3^{4bis}+W_{4bis}^1+Q_{4bis}^1}{Q_1}\right| = \left|\frac{420-3240+293-1023}{3552}\right| = 1$

5. Synthèse

	Calculs analytiques			Calculs discrets (avec un pas de V/400)		
W comp	419,968	J	$W_{comp} = \frac{p_1 . v_1}{\gamma - 1} \cdot [\varepsilon^{\gamma-1} - 1]$	420,6	J	$W_i = -\frac{(p_i + p_{i-1})}{2} \cdot (V_i - V_{i-1}) + W_{i-1}$ Du PMB au PMH : $W_{comp} = W_{PMH}$
W det	-2557,810	J	$W_{det} = \frac{p_3 . v_3}{\gamma - 1} \cdot [\varepsilon^{1-\gamma} - 1]$	-2557,910	J	$W_i = -\frac{(p_i + p_{i-1})}{2} \cdot (V_i - V_{i-1}) + W_{i-1}$ Du PMH au PMB : $W_{det} = W_{PMB}$
W cycle	-37,842	J	$W_{cycle} = Q_1 \cdot (\varepsilon^{1-\gamma} - 1)$	-37,289	J	$W_{cycle} = W_{comp} + W_{det}$
rendement BdR	0,6019		$\eta = 1 - \varepsilon^{1-\gamma}$	0,6017		$\eta = \left\lvert\frac{W_{cycle}}{Q_1}\right\rvert$
Avec détente complète						
W det "complet"	-3239,979	J	$W_3^{4bis} = \frac{p_3^{\frac{1}{\gamma}} \cdot v_3}{\gamma - 1} \cdot \left(p_{4bis}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - p_3^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)$ Avec $p_{4bis} = 10^5\ Pa$	-3240	J	$W_i = -\frac{(p_i + p_{i-1})}{2} \cdot (V_i - V_{i-1}) + W_{i-1}$ Jusqu'à $p_{det} = 1\ bar$
W cycle "complet	-2527	J	$W_{cycle} = W_{comp} + W_3^{4bis} + W_{4bis}^1$	-2527	J	$W_{cycle} = W_{comp} + W_3^{4bis} + W_{4bis}^1$
rendement "complet"	0,711		$\eta_{th} = \left\lvert\frac{W_{comp} + W_3^{4bis} + W_{4bis}^1}{Q_1}\right\rvert$	0,711		$\eta_{th} = \left\lvert\frac{W_{comp} + W_3^{4bis} + W_{4bis}^1}{Q_1}\right\rvert$

T4bis	1083,133	K	$T_{4bis} = T_3 \cdot \left(\frac{p_{4bis}}{p_3}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$	1082,856	K	$T_i = T_3 \cdot \left(\frac{V_3}{V_i}\right)^{\gamma-1}$ Jusqu'à $p_{det} = 1\ bar$
Q2	-1414,023	J	$Q_2 = -Q_1 \cdot \varepsilon^{1-\gamma}$	-1414,6	J	$Q_2 = -Q_1 - W_{cycle}$
bilan	0,000	J	$W_{comp} + W_{det} + Q_1 + Q_2$	0,000	J	$W_{comp} + W_{det} + Q_1 + Q_2$
Q2bis	-1023	J	$Q_{2bis} = m \cdot c_v \cdot (T_1 - T_{4bis})$	-1023	J	$Q_{2bis} = -Q_1 - W_{cycle\_complet}$
bilan bis	0,000	J	$Q_1 + W_{comp} + W_3^{4bis} + W_{4bis}^1 + Q_{4bis}^1$	0,000	J	$Q_1 + W_{comp} + W_3^{4bis} + W_{4bis}^1 + Q_{4bis}^1$
PMTH	2527	$kJ.m^{-3}$	$PMTH = \left\|\frac{W_{cycle}}{V}\right\|$	2527	$kJ.m^{-3}$	$PMTH = \left\|\frac{W_{cycle}}{V}\right\|$

- Les résultats montrent que les calculs analytique et discret sur le rendement sont très proches (10^{-4}), ceci est vrai avec un « pas » de calcul assez faible (1/400ième de la cylindrée).
- Les pressions et températures atteintes lors du cycle théorique sont nettement plus élevées que pour un cycle réel : 153 bars en combustion pour un rapport volumétrique de 10, cela correspond à un niveau de pression maximale d'un moteur Diesel en pleine charge, avec un rapport volumétrique de 15 !
- On peut facilement vérifier que le rendement théorique ne dépend que du rapport volumétrique ε et de γ. En effet, si l'on fait varier les autres paramètres, en particulier l'énergie introduite (en modifiant la richesse par exemple), le rendement reste constant. L'énergie perdue peut théoriquement être récupérée sous forme de travail en exploitant la détente complète des gaz. C'est la justification des turbos…


BdR avec récupération de l'énergie de détente
$p_3 = p_2 \cdot \frac{T_3}{T_2} = 153\ bar$
$T_3 = \frac{Q_1}{m \cdot c_v} + T_2 = 4561\ K$
$Q_1 = 3552\ J$
$p_i = p_2 \cdot \left(\frac{V_2}{V_i}\right)^\gamma$
$p_2 = p_1 \cdot \varepsilon^\gamma = 25{,}12\ bar$
$W_{cycle} = Q_1 \cdot (\varepsilon^{1-\gamma} - 1) = -2555\ J$
$p_4 = p_3 \cdot \varepsilon^{-\gamma} = 6{,}09\ bar$
$T_4 = T_3 \cdot \varepsilon^{1-\gamma} = 1816\ K$
$p_i = p_2 \cdot \left(\frac{V_2}{V_i}\right)^\gamma$
$T_i = T_2 \cdot \left(\frac{V_2}{V_i}\right)^{\gamma-1}$
$Q_2 = -1414\ J$
$W_{recup} = W_{cycle\_det\_comp} - W_{cycle} = -2528 + 2138 = -389$ J
$p_1 = 1\ bar$
$T_1 = 298\ K$
$p_{4bis} = 1\ bar$
$T_{4bis} = T_3 \cdot \left(\frac{p_{4bis}}{p_3}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1083\ K$
$V_{4bis} = p_4^{\frac{1}{\gamma}} \cdot V_1 = 4{,}03\ dm^3$
1000,0
100,0
1,0
0,1
0,000
0,500
1,000
1,500
2,000
2,500
3,000
3,500
4,000
4,500
V