

# Une technique de discrétisation dédiée à la simulation des vibrations moyennes fréquences

Les simulations basées sur la physique des milieux continus font généralement appel à des techniques de discrétisation. Dans certains cas particuliers, les techniques usuelles (comme les éléments finis, voir le « *Dossier Eléments Finis* ») conduisent à des écarts trop importants entre le résultat et la réalité, et/ou à des coûts trop élevés. Pour cette raison, des techniques spécifiques, beaucoup plus performantes pour ce type de simulations (mais beaucoup moins polyvalentes que les éléments finis) ont été développées. Ces points sont illustrés sur l'exemple de la simulation des vibrations en moyennes fréquences.

## 1 - Introduction

Les simulations (voir ressource « *La simulation du comportement des produits industriels* ») basées sur la physique des milieux continus font généralement appel à des techniques de discrétisation, dont les plus courantes sont les éléments finis, différences finies et volumes finis. Le choix d'une telle technique, et des modalités de sa mise en œuvre, influe directement sur deux qualités de la simulation :

- L'écart entre le résultat de la simulation et la réalité : la discrétisation y contribue, et cette contribution est généralement assimilée à l'écart entre le résultat élément finis et le résultat qu'on aurait obtenu sans discrétisation, si cela était possible (figure 1) ;
- Le coût de la simulation ; il est généralement possible de réduire l'écart en raffinant le maillage (ou modèle du produit), mais cela augmente le coût et il faut donc faire un compromis.

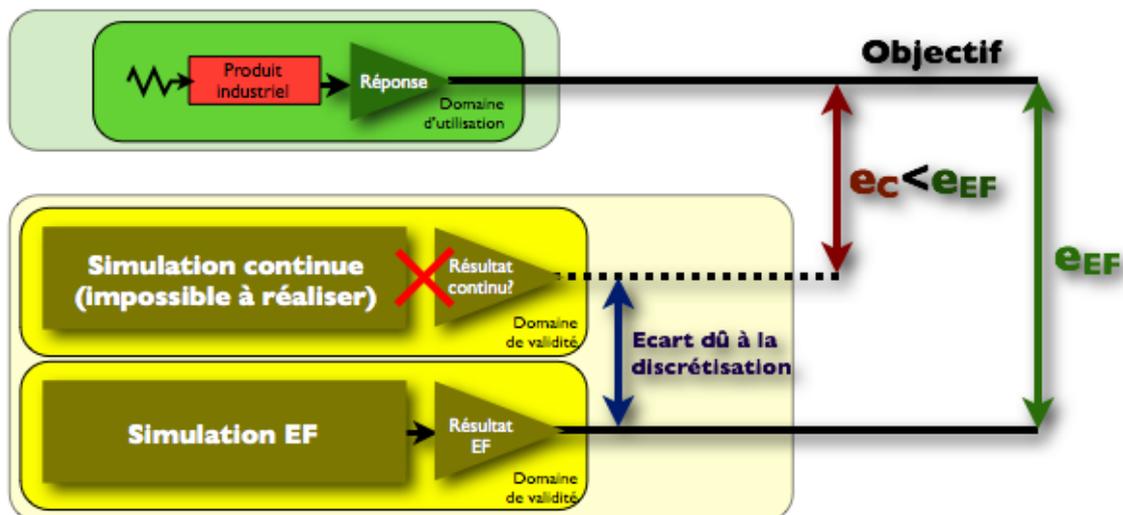


Figure 1 : La contribution de la discrétisation par éléments finis aux écarts entre simulation et réalité.

Il arrive que l'on ait à la fois des écarts inacceptables et des coûts trop élevés. La simulation est alors impossible. Cela peut arriver lorsque les phénomènes à simuler sont très compliqués et nécessitent l'utilisation de modèles très riches ; la simulation multi-échelles (voir ressource « *La simulation multi-échelle* ») est une réponse à cette problématique. Cela peut également arriver

lorsque la technique de discrétisation n'est pas bien adaptée à ce que l'on souhaite simuler, et c'est de ce dernier cas que traite cette ressource.

Nous nous intéressons ici à la simulation des vibrations en moyennes fréquences des pièces déformables. Nous montrons que la discrétisation par éléments finis n'est pas bien adaptée à ce type de simulations, et présentons une technique de discrétisation alternative spécialement conçue pour ce problème : la Théorie Variationnelle des Rayons Complexes ou TVRC [1,2,3] développée au LMT (Laboratoire de Mécanique et Technologie) de Cachan [1].

## 2 - Les vibrations en moyennes fréquences

Pour concevoir des véhicules terrestres, navals ou aériens plus confortables, des engins militaires plus furtifs ou des équipements embarqués plus fiables, il faut être capable de prévoir la réponse de ces structures aux sollicitations dynamiques qu'elles subiront. Cette prévision fait de plus en plus appel à la simulation numérique. Dans cette ressource, nous nous intéressons à la simulation des vibrations, qui sont un phénomène d'importance capitale pour de nombreux produits car elles peuvent notamment entraîner des dégradations et du bruit (figure 2b).

Le comportement vibratoire d'un produit peut notamment être caractérisé par sa fonction de réponse en fréquence (FRF) mesurée ou simulée en un point, c'est-à-dire la variation de l'amplitude des vibrations en fonction de leur fréquence. La figure 2a représente une FRF typique. Les concepteurs y distinguent classiquement trois domaines de fréquences, ou régimes :

- Le régime des basses fréquences, caractérisé par des modes de vibration (les « pics » de la figure 2a) marqués, peu nombreux et bien séparés, ainsi que de grandes longueurs d'onde, voisines de la taille de la pièce ;
- Le régime des moyennes fréquences, caractérisé par des modes de vibration marqués mais nombreux et resserrés, des longueurs d'onde plus petites (de l'ordre du dixième de la taille de la pièce), et une forte sensibilité aux détails structuraux (et notamment au mode de réalisation des liaisons entre les pièces) ;
- Le régime des hautes fréquences, caractérisé par des modes de vibration très peu marqués, des longueurs d'onde très petites, et une très forte sensibilité aux défauts et détails structuraux.



Figure 2 : Les vibrations moyennes fréquences des structures industrielles : (a) fonction de réponse en fréquence typique, (b) phénomènes observés.

La simulation des vibrations dans les structures peut faire appel à deux types de théories : la dynamique des solides indéformables (employée avec des modèles de produits du type « masses, ressorts et amortisseurs ») et la dynamique des milieux continus. C'est à ce dernier cas de figure que nous nous intéressons ici, et plus particulièrement au choix de la technique de discrétisation que l'on emploie. Ce choix dépend habituellement des particularités du régime de vibration étudié :

- En basses fréquences, on utilise habituellement une analyse modale (car les modes sont peu nombreux et bien séparés, et il est donc possible de les dénombrer et de les caractériser) associée à une discrétisation par éléments finis (car les longueurs d'onde sont grandes, et un maillage peut aisément représenter les déformées correspondantes) ;
- En hautes fréquences, les modes se confondent, les longueurs d'onde sont minuscules, et l'allure précise des déformées est mal connue car les défauts du matériau et détails de la pièce l'influencent énormément ; on utilise donc des approches énergétiques consistant à prévoir la répartition moyenne (en espace et en fréquence) de l'énergie mécanique vibratoire entre les différents composants du produit. La plus connue de ces approches est la SEA (analyse statistique énergétique).

Malheureusement, aucune de ces deux approches n'est réellement adaptée au régime des moyennes fréquences. En effet, celui-ci est caractérisé par (figure 3) ;

- De petites longueurs d'onde, qui nécessitent un maillage extrêmement fin pour être représentées par éléments finis, tout en étant trop grandes pour se prêter aux calculs de moyennes spatiales de la SEA ;
- Des modes de vibration nombreux et resserrés, qui rendraient une analyse modale très coûteuse, mais trop marqués pour la SEA qui suppose l'absence de fortes résonances pour calculer des moyennes fréquentielles ;
- Une forte sensibilité aux détails structuraux de tous types (défauts de forme, variations locales du comportement du matériau...) ainsi qu'à l'influence de l'environnement. La simulation demande donc d'identifier précisément ces paramètres, ce qui est difficile.

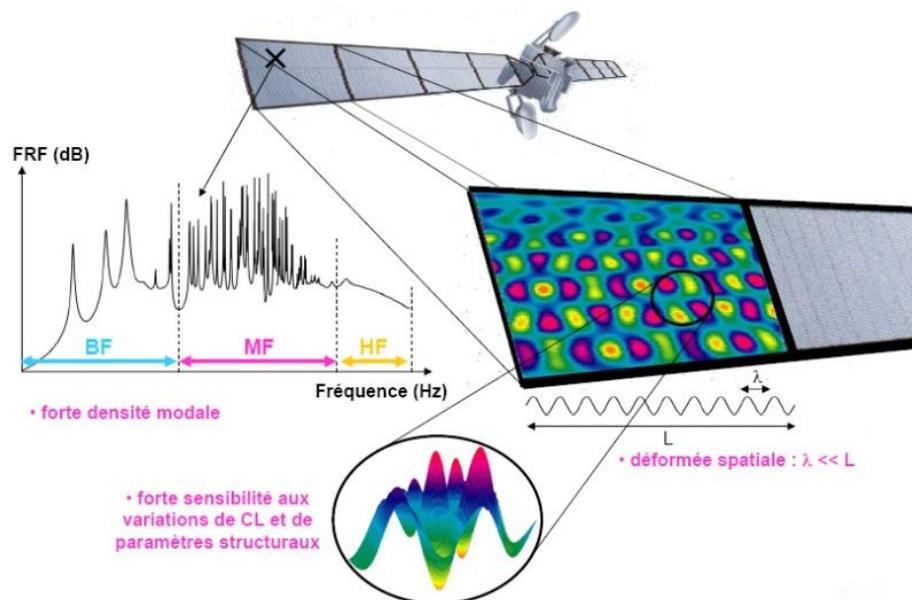


Figure 3 : Comportement vibratoire d'un panneau de satellite, dans le régime des moyennes fréquences.

Par conséquent, les approches basées sur les éléments finis présentent généralement un rapport précision/temps de calcul extrêmement défavorable pour simuler les vibrations en moyennes fréquences, et demandent un travail d'identification préalable difficile à mener. Elles conduisent donc à des écarts importants avec la réalité et/ou à des coûts prohibitifs. Les approches énergétiques, quant à elles, ne peuvent généralement pas être utilisées en moyennes fréquences car leurs hypothèses y sont rarement pertinentes.

Pour simuler les vibrations en moyennes fréquences, d'autres types de discrétisations ont été proposées. Nous présentons ici l'une de ces techniques : la Théorie Variationnelle des Rayons Complexes (TVRC).

### 3 - Une discrétisation spécifique pour les moyennes fréquences : la TVRC

La TVRC [1,2,3] est une technique de discrétisation spécialement développée pour résoudre les problèmes de vibrations en moyennes fréquences. Cette technique a été développée pour la dynamique des milieux continus, et son domaine de validité comporte les limitations suivantes :

- Le produit doit être modélisé dans la théorie des plaques ou des coques,
- Le comportement du matériau doit être modélisé par l'élasticité linéaire.

Comme la plupart des techniques de discrétisation d'un milieu continu, la TVRC comporte deux « ingrédients » essentiels : une hypothèse cinématique, et un affaiblissement des lois de la théorie. Nous décrivons ici ces deux ingrédients.

#### 3.1 - Hypothèse cinématique : la notion de « rayons complexes »

La TVRC n'utilise ni maillage, ni nœuds. Au lieu de cela, elle consiste à modéliser le produit sous la forme d'un assemblage de sous-structures, dont la taille peut être absolument quelconque. La seule contrainte est que la forme de ces sous-structures soit suffisamment simple pour que l'on sache y trouver des solutions analytiques des équations de la dynamique des milieux continus : carrés ou rectangles, cylindres ou portions de cylindre, cônes ou portions de cônes...

On se donne alors, sur chaque sous-structure, une base de fonctions de l'espace et du temps nommées « rayons complexes ». Ces rayons complexes sont des ondes propagatives et évanescentes (figure 4) vérifiant de manière exacte l'équation d'équilibre dynamique des milieux continus ainsi que la relation de comportement. On construit typiquement quelques dizaines de fonctions de base par sous-structure, et la solution du problème dynamique est ensuite cherchée sous la forme d'une combinaison linéaire de ces fonctions de base.

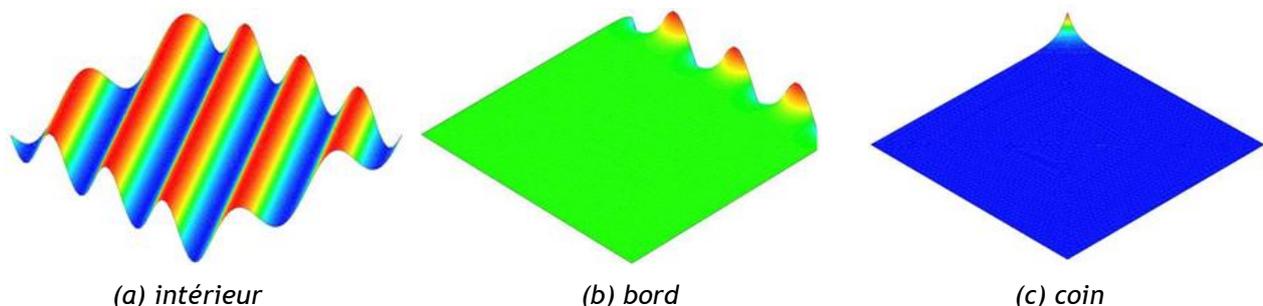


Figure 4 : Exemple de rayons complexes sur une structure plaque. Les rayons complexes sont les solutions mathématiques des équations de la dynamique posées sur la plaque, et correspondent à des ondes propagatives ou évanescentes. Ils sont souvent classés en rayons complexes intérieurs (a), de bord (b) ou de coin (c), selon leur forme.

La principale différence par rapport aux éléments finis est donc le choix des fonctions de base. Dans le cadre des vibrations en moyennes fréquences, ce choix confère deux avantages importants à la TVRC :

- Il est possible de représenter des longueurs d'onde beaucoup plus petites que les dimensions de la sous-structure, et ainsi de simuler des déformations compliquées avec relativement peu de degrés de liberté (les trois figures ci-dessus correspondent chacune à UN SEUL degré de liberté !)
- L'équation d'équilibre continue étant vérifiée par construction, on n'obtient pas de sauts de contraintes irréalistes au sein des sous-structures, qui contribueraient en tout état de cause aux écarts.

### 3.2 - Transformation des lois : l'affaiblissement des conditions aux limites

La TVRC est basée, comme les éléments finis, sur une formulation variationnelle conduisant à un affaiblissement d'une loi de la théorie continue, qui n'est plus vérifiée en tout point du modèle mais uniquement en moyenne. Cependant, le choix de la loi affaiblie est là encore différent : les éléments finis affaiblissent les équations d'équilibre, tandis que la TVRC affaiblit les conditions aux limites et les conditions de transmission entre les sous-structures (figure 5).

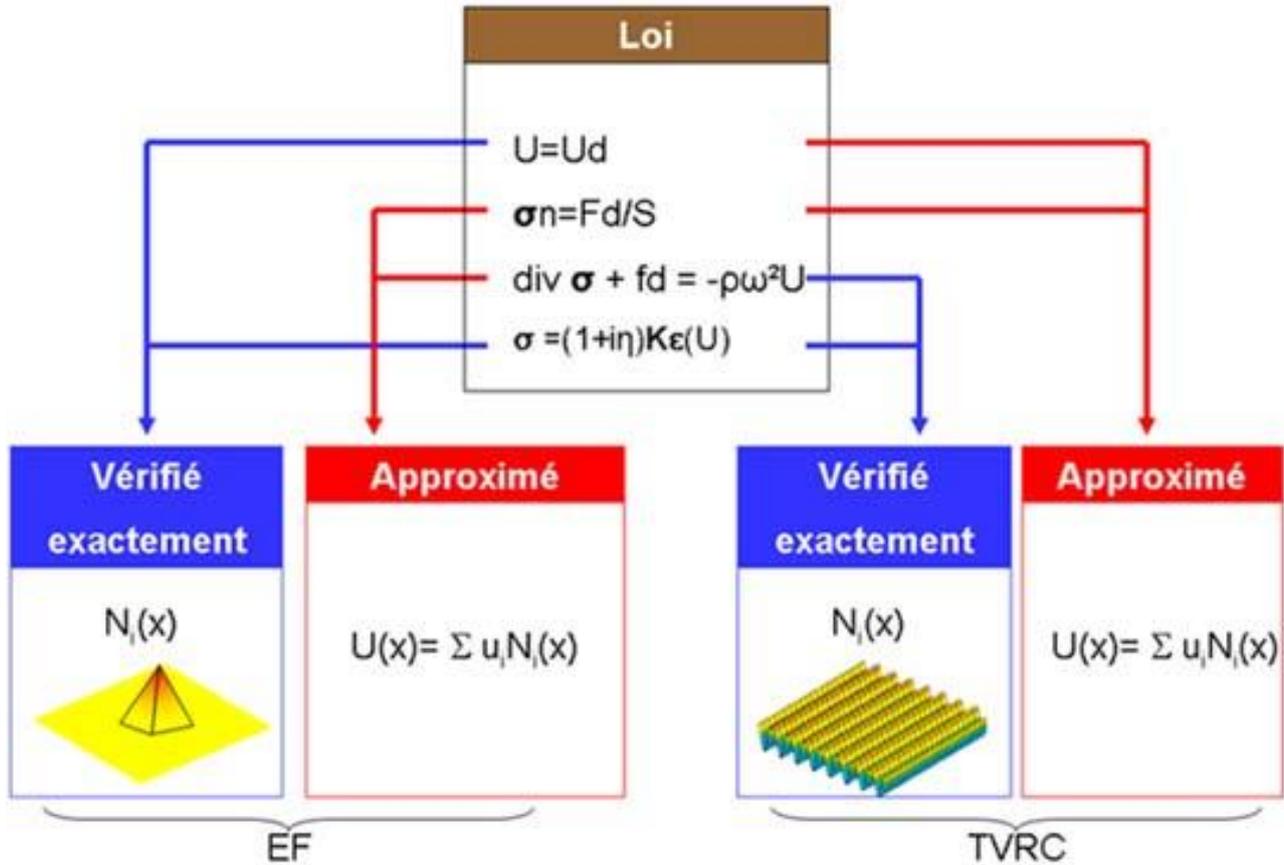


Figure 5 : Comparaison des équations affaiblies de la TVRC et des éléments finis : la TVRC affaiblit les conditions aux limites continues, tandis que les éléments finis affaiblissent les équations d'équilibre continues.

Là encore, ce choix s'avère avantageux par rapport aux éléments finis. En effet, en moyennes fréquences, la réponse est très sensible à l'environnement de la pièce, et notamment aux détails de l'assemblage ; si les conditions aux limites ne sont pas pertinentes, alors le résultat de la simulation présentera un écart important avec la réalité. Or, il est difficile de modéliser les assemblages courants de façon pertinente : les modèles courants consistent soit à imposer des efforts prédéterminés, soit à bloquer certains degrés de liberté (de façon souvent peu réaliste !). Cela ne permet pas de modéliser précisément les phénomènes courants liés au contact, comme le passage de l'adhérence au glissement, le frottement, les décollements ... et il en résulte souvent des écarts importants.

La TVRC fait donc le choix de « botter en touche » : plutôt que d'affaiblir les équations d'équilibre continues, qui ont un domaine de validité très large, elle affaiblit les conditions aux limites, qui sont souvent à l'origine d'écarts considérables. Ce choix permet d'atténuer l'impact des difficultés de modélisation de l'environnement, et contribue ainsi à limiter les écarts.

## 4 - Exemples de résultats

Les résultats que l'on peut obtenir avec la TVRC sont illustrés sur l'exemple de la figure 6, qui correspond à une plaque rectangulaire simplement supportée sur son bord (0,7m x 1 m), avec un effort ponctuel en (0,05 m ; 0,1 m) à l'intérieur. L'effort ponctuel est supposé sinusoïdal en fonction du temps et nous simulons les vibrations en moyennes fréquences de la plaque. Pour ceci, nous l'avons modélisée de trois façons différentes :

- Sans discrétisation (la solution analytique du problème continu est connue),
- Par la TVRC, avec une seule sous-structure munie de 80 degrés de liberté,
- Par éléments finis, avec un maillage de 39 046 degrés de liberté.

La figure 6 représente les trois cartes des amplitudes du champ de déplacements.

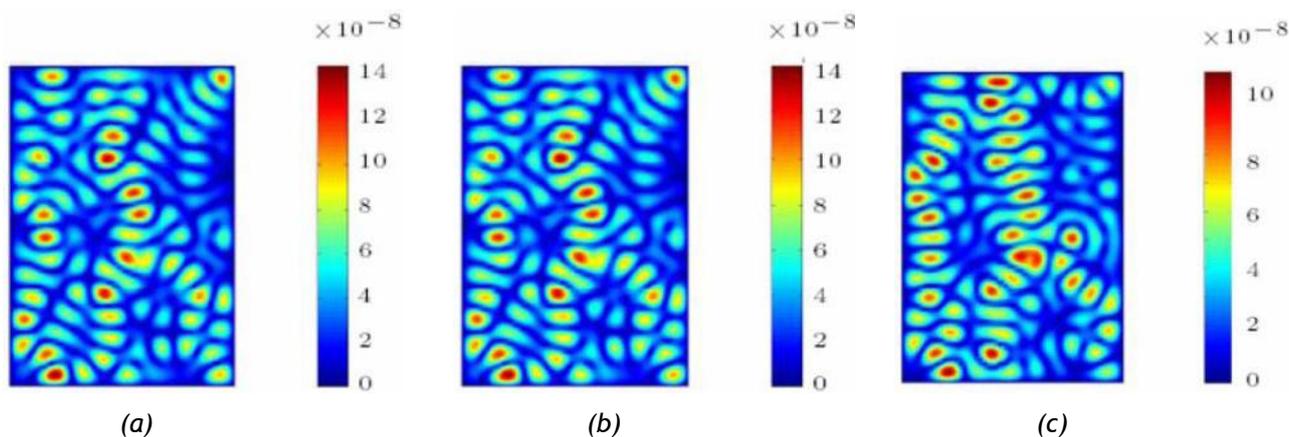


Figure 6 : Champ de déplacement d'une plaque simplement supportée (0,7m x 1 m), avec un effort ponctuel en (0,05 m ; 0,1 m) à l'intérieur :  
(a) solution continue, (b) solution TVRC (80 ddl) et (c) solution EF (39 046 ddl).

On constate que la TVRC est très efficace, puisque le champ de déplacements TVRC (figure 6b) est quasiment identique au champ de déplacements continu (figure 6a) tout en possédant uniquement 80 degrés de liberté, ce qui signifie que son calcul a uniquement demandé de résoudre un système de 80 équations à 80 inconnues. En comparaison, le champ calculé par éléments finis (figure 6c) présente des écarts visibles avec la solution continue, et possède 39 046 degrés de liberté, c'est-à-dire 500 fois plus. Le compromis précision/coût est donc beaucoup plus avantageux avec la TVRC qu'avec les éléments finis, et le changement de technique de discrétisation semble justifié.

Nous avons ensuite réalisé une étude de la convergence de chacune des deux techniques, en raffinant les deux discrétisations et en calculant, à l'issue de chaque simulation, l'écart relatif entre la solution discrète (TVRC ou éléments finis) et la solution continue ; cet écart est calculé sur l'ensemble du champ de déplacement, à l'aide de la norme  $H1^1$ . La courbe de convergence est représentée figure 7, et les temps CPU de chacun des calculs sont représentés figure 8.

<sup>1</sup> La norme  $H1$  :

Soit une fonction  $u$  définie et dérivable sur le domaine  $\Omega$ . La norme  $H1$  de la fonction  $u$  est définie par :

$$\|u\|_1 = \left( \int_{\Omega} |u|^2 dx + \int_{\Omega} |\text{grad}u|^2 dx \right)^{1/2}$$

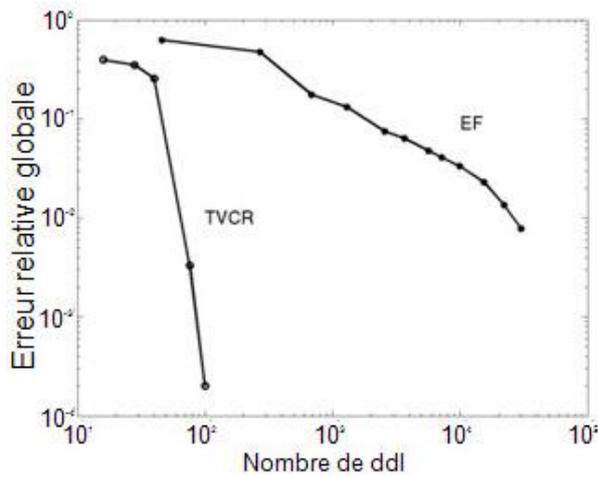


Figure 7 : Ecart relatif global en fonction du nombre de degrés de liberté, pour les deux discrétisations

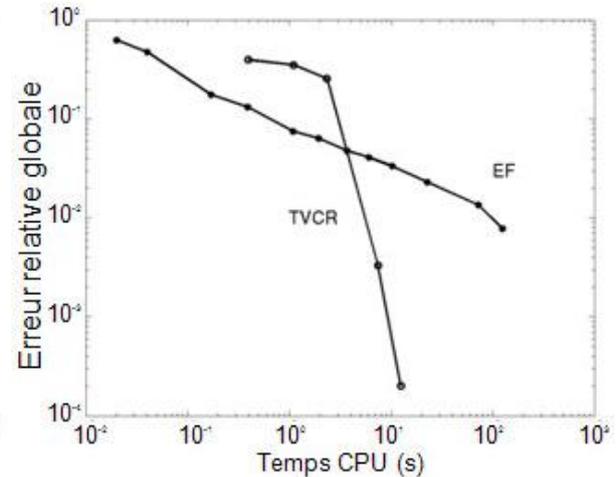


Figure 8 : Ecart global en fonction du temps CPU, pour les deux discrétisations

On observe qu'à nombre de degrés de liberté fixé, la TVRC conduit à un écart relatif global toujours plus faible que les éléments finis. Concernant les temps CPU, la TVRC conduit toujours à un temps de calcul inférieur à celui des éléments finis pour atteindre un même écart relatif global, sauf pour les modèles les plus grossiers qui conduisent à des calculs prenant moins de quelques secondes. Dans tous les cas, les simulations TVRC les plus fines sont à la fois plus précises et moins coûteuses que les simulations par éléments finis les plus fines.

Les développements actuels de la TVRC visent à étendre son domaine de validité pour simuler des problèmes de vibro-acoustique en milieux 3D.

## 5 - Bilan

Dans cette ressource, nous avons vu que les techniques de discrétisation usuelles, comme les éléments finis, ne permettent pas forcément de simuler n'importe quel type de comportement. Il existe certains phénomènes, comme ici les vibrations moyennes fréquences, où ces techniques conduisent à des écarts significatifs avec la réalité et/ou des coûts excessifs.

Il peut alors être judicieux de recourir à des techniques de discrétisation spécifiques, dont les ingrédients (hypothèses cinématiques et affaiblissement des lois continues) sont spécialement adaptées aux phénomènes à simuler. Le prix à payer est alors, naturellement, une perte de généralité (la TVRC ne s'applique qu'aux vibrations en moyennes fréquences, tandis que la discrétisation par éléments finis est une technique très polyvalente).

Il existe beaucoup d'autres techniques de discrétisations adaptées à des problèmes spécifiques. Citons par exemple :

- La méthode des éléments de frontière (BEM) est très utilisée en acoustique, électromagnétisme... pour simuler le comportement d'un « gros » volume supposé homogène dans lequel est plongé un « petit » objet qui le perturbe ; elle consiste à mailler la surface de l'objet et non le volume de l'étude, et s'avère donc souvent efficace dans ce type de problèmes ;
- La méthode des éléments finis généralisés (G-FEM) est une variante des éléments finis dans laquelle on ajoute des fonctions de base supplémentaires, qui modélisent des comportements particuliers que l'on connaît a priori ; elle est efficace lorsque le produit à

modéliser comporte des détails géométriques difficiles à mailler, comme une microstructure ou encore une frontière compliquée ;

- Les méthodes spectrales sont relativement proches des éléments finis, mais utilisent des éléments de grande taille dont les fonctions de base ont un degré très élevé, ce qui s'avère efficace lorsque la solution est très régulière...

## Références :

[1]: <http://www.lmt.ens-cachan.fr/>

[a]: P. Ladevèze, Une nouvelle approche pour le calcul des vibrations moyennes fréquences, NT Aérospatiale, YX/SA 119 639, 1995.

[b]: H. Riou, Sur le calcul des vibrations moyennes et hautes fréquences par la Théorie Variationnelle des Rayons Complexes, thèse de Doctorat, 2004.

[c]: P. Ladevèze, P. Rouch, H. Riou, X. Bohineust, Analysis of Medium-Frequency Vibrations in a Frequency Range, Computational Acoustics, 11(2), 255-283, 2003.