

La résolution d'un modèle éléments finis :

1. Du modèle aux équations

La méthode de calcul appliquée par la plupart des logiciels de simulation par éléments finis repose sur certaines hypothèses concernant les modèles (du produit, de l'environnement et des comportements). Si ces hypothèses ne sont pas vérifiées, le calcul peut être impossible, ou les résultats peuvent présenter des écarts avec la réalité. Il faut donc s'assurer que la modélisation respecte ces hypothèses. Cette ressource présente la méthode utilisée dans les logiciels et met en évidence les différentes exigences qui en découlent.

1 - Une hypothèse cinématique : les fonctions de base

Dans un premier temps, on formule une hypothèse sur l'allure du champ de déplacements. Pour cela, on se donne une famille de champs vectoriels nommés fonctions de base et notés N_j , et l'on cherche le champ de déplacements u sous la forme d'une combinaison linéaire quelconque de ces fonctions de base. Ceci s'écrit, en tout point M de l'espace :

$$\underline{u}(M) = \sum_{j=1}^n u_j \underline{N}_j(M) \quad (1)$$

où n désigne le nombre de fonctions de base ; le trait de soulignement indique des quantités vectorielles. Cela permet bien de discrétiser le problème puisqu'au lieu de rechercher un champ u défini en tout point du domaine, on doit maintenant chercher n coefficients u_j . Chaque terme de cette somme est appelé un degré de liberté du modèle.

La discrétisation par éléments finis repose sur un choix particulier des fonctions de base : il s'agit de fonctions définies par morceaux en s'appuyant sur un maillage, c'est-à-dire un modèle géométrique du produit découpé en éléments de formes simples. Ces fonctions sont construites automatiquement par le logiciel à partir du maillage, de sorte à vérifier certaines propriétés que nous décrivons par la suite.

Naturellement, les conditions aux limites en déplacement doivent elles aussi respecter l'hypothèse (1). Pour cette raison, elles sont directement spécifiées en termes de déplacements nodaux u_j . Dans cette ressource, nous supposons donc que certains u_j sont connus (en réalité, les conditions aux limites prennent une forme un peu plus générale, mais cela importe peu dans le cadre de cette ressource).

2 - Des équations d'équilibre reformulées : les efforts nodaux

L'objectif de la simulation par éléments finis est de trouver les n coefficients u_j (ou, plus exactement, ceux d'entre eux qui sont inconnus) tels que le champ de déplacement défini par l'équation (1) vérifie « au mieux » les équations du problème mathématique continu. Les conditions aux limites en déplacement sont évoquées ci-dessus ; reste à vérifier les équations d'équilibre et la relation de comportement.

Pour cela, dans un second temps, on affaiblit les équations d'équilibre, en les écrivant sous une forme moins restrictive. On utilise pour cela une transformation mathématique nommée formulation variationnelle ou formulation faible. Nous nous plaçons sous les hypothèses précédentes et supposons que le modèle de la pièce est soumis :

- A des efforts volumiques f_d dans son volume Ω ,
- A des efforts surfaciques f_d sur une partie $\partial_f\Omega$ de son bord ;
- Et aux conditions aux limites en déplacement décrites ci-dessus dans la partie complémentaire $\partial_u\Omega$ de son bord.

En pratique, ces quelques objets mathématiques suffisent à modéliser la plupart des sollicitations mécaniques courantes (voir ressource « *Le modèle en éléments finis du produit dans son environnement ou maillage : 4. Modélisation du monde extérieur* »). Sous cette hypothèse, nous obtenons les équations d'équilibre « affaiblies » suivantes : pour tout entier i compris entre 1 et n ,

$$\int_{\Omega} \underbrace{Tr[\underline{\sigma}\underline{\varepsilon}(\underline{N}_i)]}_{-f_i^i} d\Omega = \int_{\Omega} \underbrace{\underline{f}_d \cdot \underline{N}_i}_{f_i^e} d\Omega + \int_{\partial_f\Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{N}_i dS - \int_{\partial_u\Omega} \underline{\sigma} \underline{n} \cdot \underline{N}_i dS \quad (2)$$

où ε et σ désignent respectivement les déformations et les contraintes, et les doubles soulèvements précisent qu'il s'agit de tenseurs ; le vecteur n désigne quant à lui une normale sortante.

Les quantités définies par les deux intégrales s'appellent efforts nodaux (nous expliquerons le terme « nodaux » au paragraphe suivant). Les lecteurs familiers du principe des puissances virtuelles reconnaîtront qu'il s'agit des travaux virtuels des efforts intérieurs et extérieurs dans chacune des fonctions de base éléments finis N_i correspondant à des degrés de liberté du problème :

- Les f_i^i s'appellent efforts nodaux intérieurs et représentent les efforts de cohésion dans la matière ; ces efforts sont aux éléments finis ce que le tenseur des contraintes est à la mécanique des milieux continus ;
- Les f_i^e s'appellent efforts nodaux extérieurs et représentent de même les efforts extérieurs que l'on exerce sur la pièce. Les deux premiers termes sont connus, le troisième est inconnu et représente les efforts de liaison correspondant aux conditions aux limites en déplacement.

La notion d'efforts nodaux est un élément essentiel de la discrétisation, car c'est sur ces quantités que portent les équations d'équilibre des éléments finis. L'équilibre est donc vérifié seulement en un nombre fini de points par l'intermédiaire de ces quantités, et les champs de contraintes ne vérifient pas l'équation d'équilibre des milieux continus en tout point (c'est pourquoi l'équation d'équilibre des éléments finis est dite « affaiblie »). La suite de la ressource montre que cela a des conséquences pratiques considérables sur l'allure des résultats.

Par ailleurs, les chargements mécaniques exercés sur le modèle devront eux aussi être exprimés sous forme d'efforts nodaux, comme l'indique le second membre de l'équation (2).

3 - Les équations des éléments finis dans le cas de l'élasticité linéaire

Enfin, nous utilisons le modèle de comportement pour relier le tenseur des contraintes au champ de déplacement et, ainsi, exprimer les efforts nodaux intérieurs f_i^i en fonction des déplacements nodaux u_j . On obtient après calcul un système de n équations linéaires : pour i allant de 1 à n ,

$$\sum_{j=1}^n K_{ij} u_j = f_i^e \quad (3)$$

où les termes K_{ij} définissent la matrice de rigidité du système et valent :

$$K_{ij} = \int_{\Omega} Tr \left[\underline{\underline{\varepsilon}}(N_i) \underline{\underline{K}} \underline{\underline{\varepsilon}}(N_j) \right] d\Omega \quad (4)$$

K désigne le tenseur d'élasticité et le quadruple trait de soulignement signifie qu'il s'agit d'un tenseur d'ordre 4 (il s'agit d'une notation compacte et générale de la loi de Hooke). Cette expression peut s'interpréter comme le travail virtuel du champ de contrainte créé par la j -ème fonction de base dans le champ de déformation associé à la i -ème fonction de base.

Le travail effectué par les logiciels consiste schématiquement à construire le système d'équations (3) à partir des modèles, à le résoudre, puis à en déduire les résultats demandés par le concepteur à l'aide de l'hypothèse (1) et du modèle de comportement. La ressource « *Résolution d'un modèle éléments finis : 2. Résolution et analyse des résultats* » détaille ces différentes étapes ; ici, nous nous intéressons plutôt aux conséquences des deux hypothèses ci-dessus sur la pertinence des solutions calculées par les logiciels.

4 - Un exemple

Nous illustrons maintenant l'effet de la discrétisation sur les grandeurs physiques calculées, et notamment sur leur pertinence, à l'aide d'un exemple très simple. Cela permet par la même occasion de présenter les principaux résultats que l'on peut obtenir lors d'une simulation par éléments finis.

4.1 - Le champ de déplacement

Considérons le modèle de la figure 5, dans le cadre d'une théorie plane (par exemple, en contraintes planes). Le maillage est constitué de six éléments triangulaires à trois nœuds munis de fonctions de base affines, comme ceux de la figure 4 ; le modèle du comportement du matériau est élastique linéaire homogène et isotrope, et le modèle de l'environnement est schématisé sur la figure 5.

Une fois le système d'équations construit et résolu, le résultat le plus simple à reconstruire est le champ des déplacements : il suffit d'appliquer l'équation (1), c'est-à-dire l'hypothèse cinématique, les fonctions de base et les déplacements nodaux étant connus. Pour montrer ce champ, nous avons tracé la configuration initiale (c'est-à-dire non déformée) du modèle sur la Figure 5a, et sa configuration déformée sur la figure 5b.

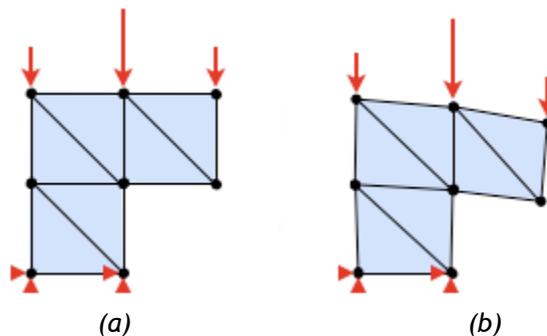


Figure 5 : Allure du champ de déplacements calculé à l'aide d'un maillage 2D avec fonctions de base affines : (a) configuration initiale, (b) configuration déformée.

On obtient une déformée munie d'angles marqués à chacun des nœuds. Cette allure n'est manifestement pas réaliste : une pièce réelle ayant cette forme et sollicitée de cette façon

présenterait plutôt une déformée courbée régulièrement, sans angles, et le champ de déplacement issu de la simulation n'est donc pas représentatif de la réalité. On observe ainsi un écart significatif, dont il faut rechercher les causes afin de les corriger.

Ici, il est facile de voir que cet écart est dû à la discrétisation : le maillage et ses fonctions de base font que le champ de déplacement sera affine dans chacun des six triangles et, par conséquent, que la déformée aura forcément une allure anguleuse comme celle de la figure 5. Nous en concluons que la discrétisation n'est pas adaptée aux déformations que l'on souhaite simuler avec ce modèle. Pour réduire l'écart, il faudrait donc raffiner le maillage, c'est-à-dire :

- Soit utiliser des éléments plus petits et plus nombreux,
- Soit utiliser des fonctions de base plus riches, donc changer de type d'éléments ; par exemple, les triangles à six nœuds possèdent des fonctions de base quadratiques, qui leur permettent de se "courber" en se déformant.

Le choix de la taille et de l'ordre des éléments influe fortement sur la pertinence des résultats, et doit être effectué avec soin ; cette problématique est développée dans la ressource « *Quelques types d'éléments finis* ». Dans l'exemple ci-dessus, l'utilisation de fonctions de base plus riches semble être un bon moyen d'obtenir des résultats plus pertinents. En effet, la pièce est essentiellement sollicitée en flexion et est donc susceptible de se courber sous l'effet du chargement ; il n'est donc pas très judicieux de modéliser ses déformations à l'aide d'un champ de déplacement affine par morceaux...

4.2 - Le champ de déformation et le champ de contrainte

Le champ de déformation est calculé en prenant la partie symétrique du gradient du champ de déplacement, conformément à sa définition. Les contraintes sont déduites des déformations à l'aide du modèle du comportement du matériau.

En appliquant cette technique, pour l'exemple ci-dessus, on obtient un champ de contrainte comme celui de la figure 6. Les logiciels permettant généralement de tracer n'importe quelle composante ou n'importe quel invariant des contraintes ou des déformations ; la quantité représentée ici est la contrainte équivalente de Von Mises.

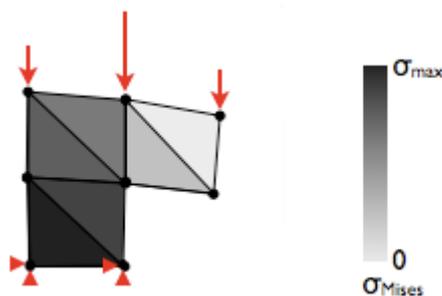


Figure 6 : Allure du champ de contraintes de Von Mises. Chaque teinte de gris correspond à une valeur.

Comme nous l'avions annoncé au paragraphe 2.2, le champ obtenu ne vérifie clairement pas l'équation d'équilibre des milieux continus, puisque les contraintes sont discontinues d'un élément à l'autre. De plus, si l'on traçait les différentes composantes des contraintes (et non l'équivalent de Von Mises), on verrait que les conditions de bord libre ne sont pas respectées. Enfin, on remarque que la contrainte est constante dans chaque élément, ce qui ne semble guère réaliste pour un modèle sollicité principalement en flexion.

Là encore, tout ceci s'explique par l'allure des fonctions de base (figure 4) : ces fonctions étant affines par morceaux, leur gradient est constant par élément et discontinu d'un élément à l'autre.

Compte tenu de la définition des déformations et des contraintes, l'un comme l'autre présentent le même type d'allure. Cette allure est encore moins réaliste que celle du champ de déplacement, et les conclusions du paragraphe précédent sur l'inadéquation du maillage se confirment donc. Là encore, il serait possible de réduire les écarts en adaptant la discrétisation de deux façons complémentaires :

- En utilisant des éléments plus petits, on réduirait l'amplitude des sauts de contrainte d'un élément à l'autre ;
- En utilisant des fonctions de base quadratiques, on permettrait aux déformations et aux contraintes de varier au sein d'un élément ; cela donnerait des champs plus réalistes et réduirait également l'amplitude des sauts (sans pour autant les annuler, comme le montre la figure 3).

Signalons toutefois qu'en pratique, les champs de contrainte affichés par les logiciels n'ont pas l'allure de la figure 6. En effet, les logiciels effectuent presque toujours par défaut un post-traitement appelé lissage des contraintes, destiné à afficher un champ continu. Cela peut poser un problème pédagogique car la présence de fortes discontinuités est, comme nous venons de le voir, un symptôme d'une discrétisation mal adaptée aux déformations que l'on souhaite simuler. Or, le fait de gommer ces discontinuités après coup ne résout absolument pas le problème (tout au plus observe-t-on, en pratique, une légère réduction de l'écart), mais masque le symptôme, ce qui complique l'interprétation et l'analyse critique des résultats...

4.3 - Les efforts de liaison

De nombreux logiciels permettent de déterminer des efforts de liaison, donnés directement sous la forme d'efforts nodaux ; il s'agit du dernier terme de l'équation (3). Les efforts de liaison de l'exemple ci-dessus sont représentés en vert sur la figure 7.

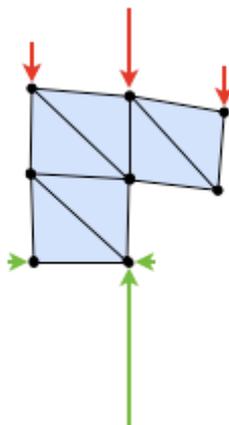


Figure 7 : Allure des efforts nodaux de liaison (en vert).

En isolant le maillage et en assimilant les forces nodales à des glisseurs appliqués aux nœuds, on peut aisément vérifier que le principe fondamental de la statique s'applique : les efforts de liaison équilibrent le chargement appliqué sur le maillage, en résultante et en moment. Il est ainsi possible de calculer la résultante et le moment des actions de liaison en passant par les forces nodales données par le logiciel.

Intuitivement, on pourrait croire qu'en partant du champ de contraintes de la figure 6 et en calculant la résultante et le moment du vecteur contrainte sur la face encastree, on retrouverait le même résultat. C'est malheureusement faux car, une fois encore, le champ de contrainte ne vérifie pas les équations d'équilibre d'un milieu continu, et le vecteur contrainte n'est pas à l'équilibre avec les efforts surfaciques correspondant à l'encastrement et ce, même en termes de

résultante et de moment résultant. Ainsi, la figure 6 montre que le champ de contraintes est uniforme sur la face encastree ; la résultante et le moment résultant des contraintes sur cette face sont donc ceux d'un glisseur appliqué au centre de cette face. Or, on voit bien qu'un tel glisseur, quelle que soit sa direction, ne peut pas équilibrer le chargement appliqué sur la partie supérieure du modèle !

Par conséquent, lorsque l'on souhaite calculer des actions de liaison, mieux vaut le faire directement à partir des forces nodales, qui suivent le principe fondamental de la statique, plutôt qu'à partir des contraintes, qui ne sont pas à l'équilibre avec les actions de liaison et conduisent donc à un écart avec la réalité. Cet écart est naturellement d'autant plus élevé que le maillage est grossier.

4.4 - La rigidité du modèle

Enfin, l'expérience montre que la discrétisation surestime artificiellement la rigidité du modèle : si le modèle n'est soumis qu'à des déplacements imposés nuls et à des efforts, on obtient des déplacements plus faibles (voir ressource « *Raffinements du maillage et convergence* ») que ceux qu'aurait prédits la mécanique des milieux continus, si toutefois on savait les calculer.

Cet écart est généralement léger. Il arrive toutefois que certains éléments présentent une rigidité extrêmement élevée et manifestement anormale, supérieure de plusieurs ordres de grandeurs à ce qu'elle devrait être ; ce phénomène s'appelle le verrouillage et se produit, schématiquement, lorsqu'il y a incompatibilité entre la cinématique de l'élément (donnée par les fonctions de base) et la cinématique « continue » qu'il tente de représenter. Deux cas typiques sont :

- La flexion des pièces très minces (la ressource « *Quelques types d'éléments finis* » présente ce problème pour les éléments poutres et les éléments coques, mais ce problème existe également avec les éléments volumiques) ;
- La simulation du comportement des matériaux incompressibles, comme les polymères.

Le verrouillage peut être évité par l'emploi de types d'éléments adaptés, munis de fonctions de base ne présentant pas cette incompatibilité. Ces éléments sont généralement indiqués dans les documentations des logiciels.

5 - La construction du système d'équations : le pré-traitement

La première étape consiste à construire ce système, c'est-à-dire à calculer les K_{ij} et les f_{ie} (à l'exception des termes de liaison, dont nous reparlerons plus tard) à partir des données définies par l'utilisateur : le maillage (ou modèle du produit), les chargements et conditions aux limites (ou modèle de l'environnement), et le modèle du comportement mécanique du matériau.

Il s'agit de loin de l'étape la plus technique, car les logiciels utilisent un mode opératoire sophistiqué visant à réduire le coût des calculs. Chaque étape de ce mode opératoire est conçue pour préparer efficacement l'étape suivante, et il nous semble donc plus clair de partir de l'objectif du calcul, quitte à ne pas respecter l'ordre chronologique des différentes étapes dans la présentation. Nous récapitulerons ensuite la méthode à la fin de la ressource.

5.1 - L'assemblage

La principale difficulté du pré-traitement provient du fait que les K_{ij} et les f_{ie} :

- Sont potentiellement très nombreux (parfois plus de cent millions),

- Et sont définis comme des intégrales sur l'ensemble du modèle du produit, dont la géométrie peut être très sophistiquée.

Pour surmonter cette difficulté, une première idée est de constater que le domaine géométrique Ω occupé par le produit est décomposé en sous-domaines et, par conséquent, d'écrire chacune des intégrales (2) et (3) comme une somme d'intégrales sur chacun des sous-domaines, nommées contributions élémentaires (respectivement, à la matrice de rigidité et au second membre). Ces contributions élémentaires modélisent respectivement le comportement mécanique de l'élément et l'interaction de l'extérieur du produit avec l'élément (un élément étant, rappelons-le, un sous-domaine muni de ses nœuds et fonctions de base).

Les contributions élémentaires ont l'avantage de posséder très peu de termes non nuls, en raison d'une propriété très pratique des fonctions de base : elles ne sont non nulles que dans les éléments voisins de leur nœud d'attache (figure 2a) et donc, inversement, chaque élément ne « voit » que les fonctions de base de ses propres nœuds (figure 2b). Les fonctions qui apparaissent dans les intégrales (2) et (3) sont donc généralement nulles dans la quasi-totalité des éléments (ou, pour les termes surfaciques, sur la quasi-totalité du bord).

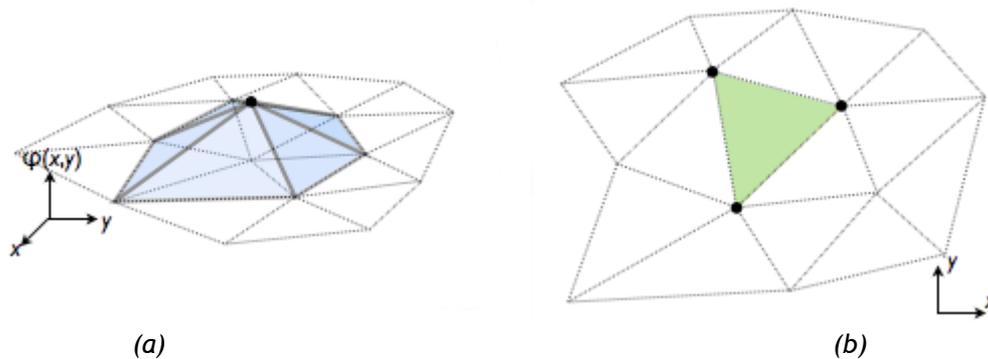


Figure 2 : (a) Une fonction de base (scalaire) éléments finis en 2D ; (b) un élément et ses nœuds voisins.

En pratique, la mise en œuvre de la décomposition ci-dessus conduit à calculer les contributions de chacun des éléments du maillage, puis à les ajouter au « bon endroit » dans la matrice de rigidité et le second membre : cette opération s'appelle l'assemblage du système et est schématisée sur la figure 3. Son interprétation mécanique est assez intuitive, puisqu'il s'agit de reconstruire les équations d'équilibre du maillage à partir des équations d'équilibre de chacun des éléments : le maillage peut donc être vu comme un « assemblage », au sens physique du terme, d'éléments liés par leurs nœuds communs.

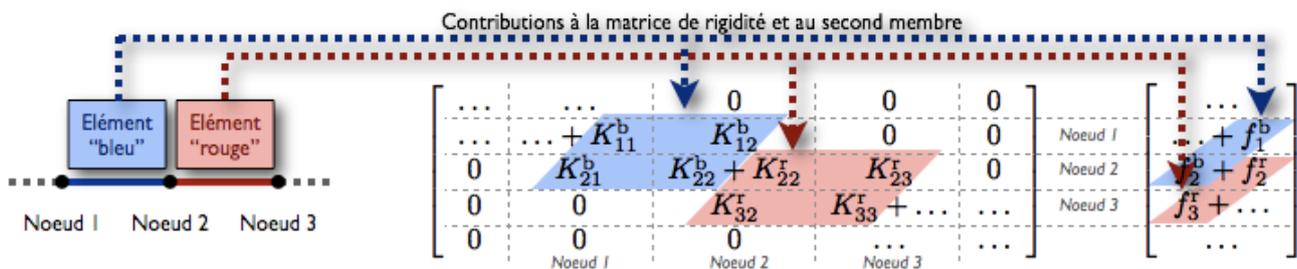


Figure 3 : Schématisation du processus d'assemblage dans une théorie uniaxiale (modélisant une barre en traction, par exemple).

L'intérêt de l'assemblage est de calculer efficacement les intégrales tout en identifiant les termes non nuls de la matrice de rigidité (en effet, cette matrice est constituée essentiellement de zéros ; on dit qu'elle est creuse). Cela réduit à la fois le nombre d'opérations à effectuer et la quantité de mémoire requise.

5.2 - Le calcul des contributions élémentaires

La seconde idée est d'optimiser le calcul des contributions élémentaires, qui sont généralement :

- Très nombreuses car un maillage comporte généralement beaucoup d'éléments (jusqu'à plusieurs millions)
- Mais définies par des expressions similaires (des intégrales semblables aux équations (2) et (3), mais sur chaque élément).

Il semble donc judicieux de chercher à mutualiser les calculs plutôt que de déterminer les contributions indépendamment les unes des autres.

La difficulté est que les éléments d'un maillage peuvent avoir des géométries très différentes les uns des autres : ils peuvent posséder des formes différentes, des nombres de nœuds différents, des dimensions différentes, des orientations différentes, des angles différents... L'idée est donc de se ramener à quelques géométries communes à l'aide de transformations géométriques, et de calculer les intégrales sur ces géométries communes à l'aide d'un changement de variables. Nous présentons ici ces quelques notions.

Types d'éléments et géométrie de référence

Premièrement, les éléments sont regroupés en types d'éléments, reconnaissables par trois données (nous donnerons leur définition précise ultérieurement) :

- La théorie dans laquelle ils sont employés (volumique, poutres, plaques ou coques, contraintes planes...),
- Leur topologie (triangulaire, quadrilatérale, tétraédrique...),
- Et le nombre de leurs nœuds.

Chacun de ces types est muni d'une géométrie de référence (également appelée élément de référence), commune à tous les éléments de ce type et extrêmement simple. La figure 4 représente les géométries de référence de quelques types d'éléments courants pour les problèmes plans (il existe également des éléments plaques et coques dont la géométrie de référence est identique).

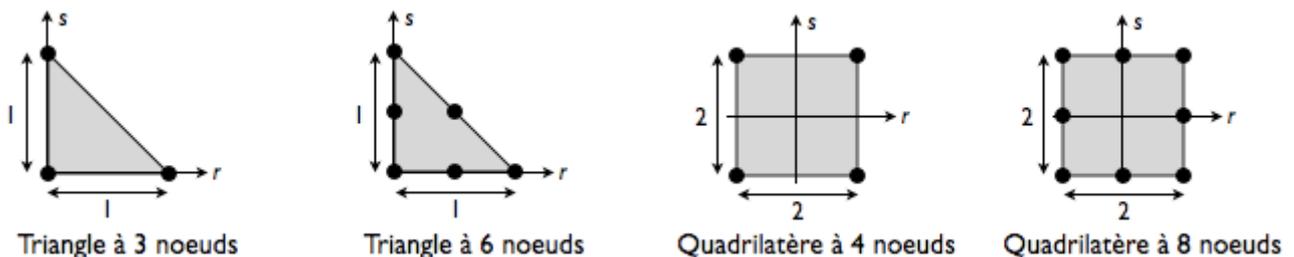


Figure 4 : Les géométries de référence de quelques éléments 2D courants.

De façon générale, la géométrie de référence est la plupart du temps :

- De forme très simple (triangle rectangle, carré, tétraèdre rectangle, cube... selon la topologie de l'élément),
- De côté 1 ou 2 (sans dimension),
- Orientée parallèlement aux axes du repère de la simulation,
- Et située à l'origine.

Transformation géométrique

Deuxièmement, chacun des éléments du maillage est caractérisé par la transformation géométrique qui permet de l'obtenir à partir de la géométrie de référence. Ainsi, tout point M situé au sein d'un élément est supposé être l'image d'un point M_0 de l'élément de référence correspondant. Plaçons-nous par exemple en 2D : on note (voir figure 5) :

- (r,s) les coordonnées de M_0 , dites coordonnées locales (ou coordonnées naturelles) car elles repèrent le point considéré au sein de l'élément qui le contient ;
- (x,y) les coordonnées de son image M , dites coordonnées globales car elles repèrent le point considéré au sein du maillage tout entier.

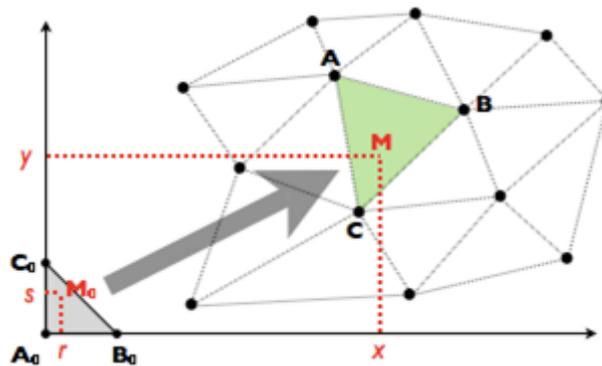


Figure 5 : La transformation géométrique qui associe l'élément de référence à un des éléments du maillage.

L'idée est naturellement d'exploiter cette transformation (dont nous donnerons la nature plus bas) afin de transporter tous les calculs sur la géométrie de référence. Pour cette raison, les fonctions de base de l'élément sont définies dans sa géométrie de référence, donc en coordonnées locales (r,s) ; cette définition est intrinsèque au type d'élément considéré. Par exemple, la figure 6 donne les fonctions de base (scalaires) du triangle à 3 nœuds de la figure 5.

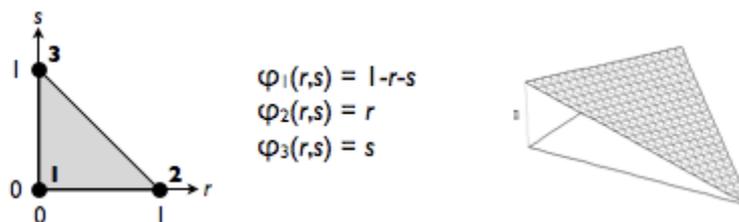


Figure 6 : Les fonctions de base d'un triangle à 3 nœuds.

Il est important de noter que cette transformation appliquée à une géométrie de référence n'est qu'une vue de l'esprit : elle sert uniquement à mutualiser les calculs, et ne doit SURTOUT PAS être confondue avec les notions de configuration initiale et de configuration déformée, qui modélisent les déformations « physiques » de la matière sous l'effet des sollicitations !

Changement de variables

Troisièmement, chaque intégrale sur un élément du maillage est ramenée sur la géométrie de référence correspondante à l'aide du théorème du changement de variables, en remplaçant les coordonnées globales par les coordonnées locales. Par exemple, en 2D, avec les notations de la figure 5, ce théorème s'écrit pour toute fonction de l'espace $f(x,y)$ (que l'on peut ensuite remplacer par l'expression des contributions à la matrice de rigidité et au second membre) :

$$\int_E f(x,y) dx dy = \int_{E_0} f(x(r,s), y(r,s)) \det \underline{J}(r,s) dr ds \quad (4)$$

où E désigne l'élément courant, E_0 son élément de référence, et J la matrice jacobienne définie par :

$$\underline{J}(r, s) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}(r, s) & \frac{\partial x}{\partial s}(r, s) \\ \frac{\partial y}{\partial r}(r, s) & \frac{\partial y}{\partial s}(r, s) \end{bmatrix} \quad (5)$$

L'intérêt de cette opération est que tous les éléments d'un même type possèdent la même géométrie de référence E_0 et les mêmes fonctions de base : les termes à intégrer ont donc des expressions similaires en coordonnées locales (r, s) . Cela permet de mutualiser une grande partie des calculs puisque les seules quantités qui diffèrent d'un élément à l'autre sont :

- La transformation, c'est-à-dire la relation entre (x, y) et (r, s) ,
- Et les valeurs des efforts (issus du modèle de l'environnement) et, éventuellement, des coefficients d'élasticité (issus du modèle de comportement du matériau).

Les contributions élémentaires peuvent donc être pré-calculées sur la géométrie de référence, ce qui réduit nettement le volume des calculs à effectuer.

Les éléments isoparamétriques

Quatrièmement, pour calculer les quantités définies par les équations (4) et (5), il reste à caractériser la transformation, c'est-à-dire se donner la relation entre (x, y) et (r, s) . Pour cela, le choix le plus courant est d'écrire la transformation à l'aide des fonctions de base, c'est-à-dire les mêmes fonctions que pour le champ de déplacement. En notant $\varphi_i(r, s)$ les fonctions de base (scalaires), les coordonnées globales x et y sont données par :

$$\begin{cases} x(r, s) = \sum_{i=1}^{n_e} x_i \varphi_i(r, s) \\ y(r, s) = \sum_{i=1}^{n_e} y_i \varphi_i(r, s) \end{cases} \quad (6)$$

où n_e est le nombre de nœuds de l'élément, et où x_i et y_i sont les coordonnées globales du i -ème nœud de l'élément.

Il s'agit donc d'interpoler la géométrie de l'élément de la même façon que l'on interpole son champ de déplacement, comme le montre par exemple la figure 8 ; un élément ainsi construit est dit isoparamétrique. L'intérêt de cette construction est que, comme le montre l'équation ci-dessus, la position des nœuds détermine de manière unique la transformation, et donc la géométrie de l'élément ; il est ainsi possible de spécifier un élément uniquement par son type et par la position de ses nœuds, et le logiciel pourra reconstruire la transformation afin de calculer les contributions élémentaires.

Pour illustrer ce qu'est un élément isoparamétrique, considérons le triangle à 3 nœuds de la figure 6. Nous avons vu que cet élément possède des fonctions de base affines, c'est-à-dire qu'il peut représenter exactement des champs dont l'expression en coordonnées locales est de la forme :

$$u(r, s) = \alpha + \beta r + \gamma s \quad (7)$$

Si cet élément est isoparamétrique, alors l'expression de x et de y en fonction de r et s est elle aussi de la forme ci-dessus. Autrement dit, l'élément réel est obtenu par une transformation affine appliquée à l'élément de référence, c'est-à-dire par une composée de translations, rotations, dilatations (y compris négatives, c'est-à-dire accompagnées d'une symétrie)... voir figure 7.

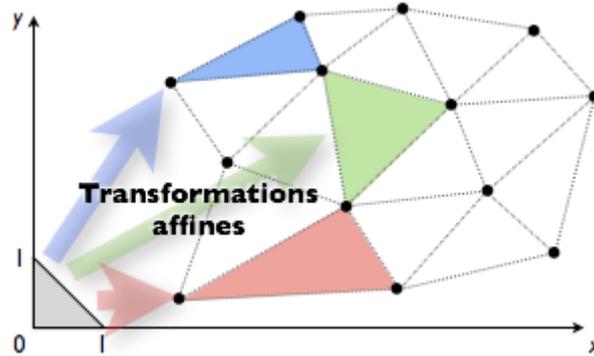


Figure 7 : Des triangles à 3 nœuds, obtenus en appliquant des transformations affines à la géométrie de référence.

Quelques conséquences pratiques

Ces notions, bien qu'abstraites, ont trois conséquences pratiques importantes pour l'utilisateur :

1. La forme que peuvent prendre les éléments isoparamétriques au sein du maillage est déterminée par leurs fonctions de base. Autrement dit, les éléments affines possèdent forcément des arêtes rectilignes, tandis que les éléments quadratiques peuvent posséder des arêtes paraboliques, voir figure 8. En effet, l'image d'une droite par une transformation affine reste une droite, tandis que l'image d'une droite par une transformation quadratique est une parabole. Il est donc possible de courber les arêtes des éléments quadratiques et/ou d'excentrer leurs milieux, bien que cette dernière transformation soit déconseillée en pratique.

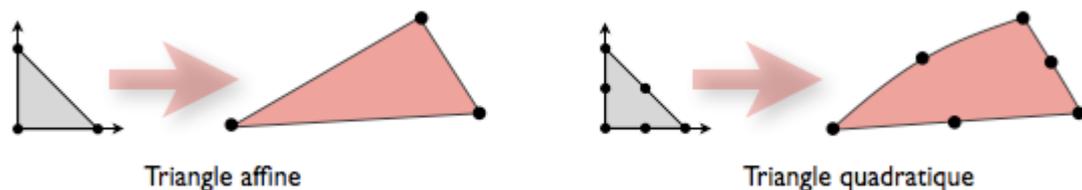


Figure 8 : L'influence de l'ordre d'un élément sur sa géométrie : seuls les éléments quadratiques peuvent posséder des bords courbes.

2. Contrairement à une idée répandue, dans le cas général, les fonctions de base ne sont polynomiales par morceaux qu'en coordonnées locales (r,s) , c'est-à-dire sur la géométrie de référence : leur expression en coordonnées globales (x,y) est souvent plus compliquée. Plus particulièrement, on peut démontrer que la forme polynomiale n'est pas conservée dès que la transformation n'est pas affine, ce qui se produit fréquemment lorsque les éléments présentent certains types de distorsions par rapport à leur géométrie de référence. Par conséquent, il faut veiller à ne pas trop distordre les éléments : cela peut conduire à des fonctions de base aux allures « chahutées », très différentes des allures de référence données dans les manuels, ce qui mène parfois à des champs de déplacement peu représentatifs de la réalité.
3. Il existe une restriction importante sur la transformation, et donc sur la forme des éléments au sein du maillage. En effet, le théorème du changement de variables n'est valide que si le jacobien est non nul en tout point de l'élément. Or, on peut démontrer que certains éléments dits dégénérés ne vérifient pas cette propriété ; il s'agit notamment des éléments aplatis, croisés ou présentant des angles rentrants (figure 9) (voir ressource « Résolution d'un modèle éléments finis : 2. Résolution et analyse des résultats ». Dans les logiciels, cela se traduit au mieux par des messages d'erreur, au pire par des résultats susceptibles d'être faux : après avoir réalisé un maillage, il faut donc contrôler qu'il ne comporte pas d'éléments dégénérés.

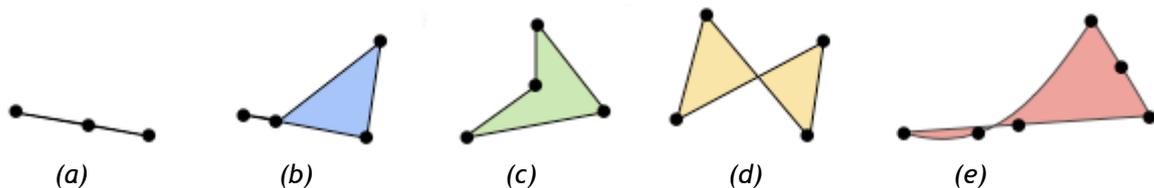


Figure 9 : Des éléments dégénérés, dont le jacobien s'annule en au moins un point, ce qui peut conduire à un résultat faux : (a) un triangle aplati, (b) un quadrilatère aplati, (c) un quadrilatère avec un angle rentrant, (d) un quadrilatère croisé, (e) un triangle quadratique croisé.

Ces constats sont à l'origine de règles pratiques de réalisation des maillages. Bien que les logiciels aident généralement l'utilisateur à appliquer ces règles, il est utile de comprendre leur origine pour déchiffrer les éventuels messages d'erreurs et, si nécessaire, corriger un maillage « à la main » sans créer de problèmes.

5.3 - La prise en compte des conditions aux limites en déplacement

Une fois que les contributions de tous les éléments ont été calculées et assemblées au bon endroit, on obtient le système matriciel défini par les équations (1), (2) et (3). Ce système a néanmoins une forme particulière puisque certaines de ses inconnues se trouvent dans le second membre et non dans le membre de gauche. En effet, lorsqu'un nœud est soumis à une condition aux limites en déplacement, la valeur de son déplacement (situé dans le membre de gauche) est évidemment connue, tandis que celle de l'effort de liaison correspondant (situé dans le second membre) est inconnue. Or, les algorithmes de résolution automatique ne peuvent résoudre que des systèmes linéaires écrits sous la forme habituelle.

Il est donc nécessaire de transformer le système pour remettre les inconnues « au bon endroit », le tout en lui apportant le moins de modifications possible afin de ne pas alourdir le calcul. Pour cela, l'idée est de :

1. Relâcher les conditions aux limites : les déplacements connus sont donc considérés comme des inconnues ;
2. Modifier le système afin de forcer ces déplacements à prendre la valeur spécifiée dans le modèle de l'environnement.

Deux techniques existent pour atteindre cet objectif : la pénalisation et les multiplicateurs de Lagrange. Toutes deux fonctionnent bien sous les hypothèses de cette ressource et ne contribuent pas significativement aux écarts (c'est plutôt la modélisation des conditions aux limites, elle-même qui est à l'origine d'erreurs importantes ! Voir ressource « *Le modèle en éléments finis d'un produit dans son environnement : 4. Modélisation du monde extérieur* »). Elles permettent de calculer simplement les efforts de liaison associés aux déplacements imposés et, en outre, peuvent prendre en compte des conditions aux limites sous la forme très générale de contraintes cinématiques, ce qui est très utile dans certains cas.