

Le modèle en éléments finis du produit dans son environnement ou maillage :

3. Génération et contrôle du maillage

école _____
normale _____
supérieure _____
paris – saclay _____

Lionel GENDRE - François LOUF

Edité le 11/01/2013

Dans une simulation par éléments finis, le produit est modélisé par un maillage, c'est-à-dire un ensemble de nœuds et d'éléments. Le choix du maillage détermine notamment les fonctions de base qui représentent les champs de déplacement, et a donc une influence considérable sur les résultats. Dans une simulation par éléments finis, l'interaction du produit avec son environnement est elle aussi modélisée, sous la forme d'efforts et de déplacements nodaux. Pour que la modélisation soit pertinente, la construction du maillage doit donc respecter certains principes et prendre en compte quatre aspects :

1. Adaptation de la géométrie à la simulation, proposé dans la ressource « *Le modèle en éléments finis du produit dans son environnement ou maillage : 1. Adaptation de la géométrie à la simulation* » ;
2. Le choix des éléments, proposé dans la ressource « *Le modèle en éléments finis du produit dans son environnement ou maillage : 2. Choix des éléments* » ;
3. **La génération et le contrôle du maillage, proposé dans cette ressource ;**
4. Le modèle de l'environnement, proposé dans la ressource « *Le modèle en éléments finis du produit dans son environnement ou maillage : 4. Modélisation du monde extérieur* ».

1 – Introduction

Dans la ressource « *Le modèle en éléments finis du produit dans son environnement ou maillage : 1. Adaptation de la géométrie à la simulation* », les points importants permettant une bonne préparation de la géométrie afin de faciliter la réalisation du maillage et d'abaisser le coût des calculs ont été exposés. Ces points à examiner sont le choix de la dimensionnalité de l'espace et/ou du maillage, l'exploitation des symétries des modèles, la suppression des détails géométriques superflus et la délimitation des régions où seront affectés des modèles de comportements ou d'environnements différents.

L'adaptation de la géométrie déterminée, le choix des éléments (ressource « *Le modèle en éléments finis du produit dans son environnement ou maillage : 2. Choix des éléments* ») a permis de mettre en évidence l'adaptation du maillage aux champs de déplacement et de contrainte ainsi qu'à la géométrie de la pièce.

Le troisième aspect est la génération du maillage, qui s'effectue généralement automatiquement avec plus ou moins d'interventions de l'utilisateur selon le type d'élément choisi et la géométrie à mailler. Il faut ensuite s'assurer que le maillage obtenu est d'une qualité acceptable.

La génération du maillage repose sur des règles topologiques, qui régissent la façon dont les éléments peuvent « s'assembler » entre eux. Il est nécessaire d'avoir une idée de ces règles pour

comprendre le processus de réalisation et, si nécessaire, pour pouvoir intervenir manuellement sur le maillage, c'est pourquoi nous commençons par les présenter.

2 - Les règles d'assemblage des éléments

Ces règles, toujours vérifiées par défaut par la plupart des mailleurs automatiques, proviennent du fait que le champ de déplacement doit toujours être continu, notamment à la frontière entre deux éléments : pour que ceux-ci puissent s'assembler, les deux champs de déplacement portés par leurs fonctions de base doivent coïncider sur leur frontière.

Tant que les éléments sont tous de même type, cette condition est automatiquement vérifiée du moment que les éléments sont « bien raccordés », c'est-à-dire que pour toutes les paires d'éléments en contact (voir figure 1) :

- Si le contact est ponctuel, alors il doit s'agir d'un sommet commun,
- Si le contact est linéique, alors il doit s'agir d'une arête entièrement commune, dont les nœuds doivent coïncider,
- Si le contact est surfacique, alors il doit s'agir d'une face entièrement commune, dont les arêtes et les nœuds doivent coïncider.

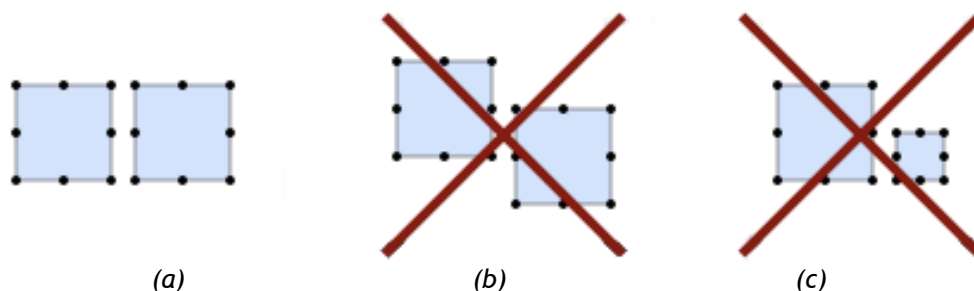


Figure 1 : Illustration des règles topologiques de validité des maillages avec des quadrilatères du second ordre : (a) maillage valide, (b,c) maillages non valides car la ligne de contact n'est pas une arête entièrement commune aux deux éléments.

En outre, en 2D, l'assemblage de triangles et de quadrilatères de même ordre se fait sans difficulté. En revanche, en 3D, il est rare qu'un même maillage comporte des tétraèdres et des hexaèdres car ces deux éléments ne peuvent pas s'assembler l'un sur l'autre : l'un possède des faces triangulaires et l'autre des faces quadrilatérales. Les maillages « mixtes » en 3D utilisent plutôt des prismes triangulaires et des hexaèdres, et sont structurés de sorte à vérifier les règles d'assemblage.

Enfin, à un niveau plus avancé, il est possible d'assembler des éléments d'ordres différents, et même des modèles formulés dans des théories différentes (par exemple, assembler un élément poutre ou plaque avec un groupe d'éléments volumiques). Les fonctions de base de ces éléments étant différentes, il faut alors assurer la continuité du champ de déplacement en forçant le modèle (ou l'élément) le plus « riche » à suivre la cinématique du modèle le plus « pauvre ». Cette opération utilise des contraintes cinématiques et nécessite de bien connaître les fonctions de base des modèles que l'on souhaite raccorder.

3 - La génération du maillage

La construction du maillage à proprement parler fait, la plupart du temps, appel à des algorithmes automatisés qui appliquent les règles ci-dessus. Schématiquement, il en existe deux types :

- Les mailleurs non structurés qui peuvent mailler des géométries à peu près quelconques de façon complètement automatique ; la plupart d'entre eux n'acceptent que les triangles ou les tétraèdres, et les maillages ainsi générés sont reconnaissables à leur absence de régularité géométrique (figure 2a) ;
- Les mailleurs structurés qui réalisent un pavage régulier d'éléments (figure 2b) ; leur utilisation demande de découper la géométrie de la pièce en domaines simples et de s'assurer que les différents « morceaux » pourront bien s'assembler selon les règles du paragraphe ci-dessus.

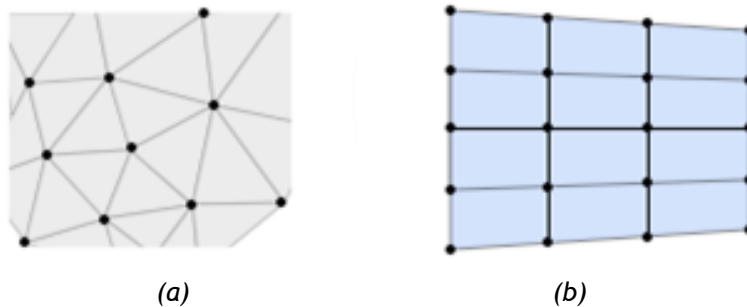


Figure 2 : (a) Un maillage non structuré de triangles ; (b) un maillage structuré de quadrilatères.

Chaque approche possède ses avantages et ses inconvénients : les mailleurs non structurés se limitent généralement aux triangles ou tétraèdres mais fonctionnent souvent « en un clic », tandis que les mailleurs structurés demandent un travail de préparation et de contrôle plus conséquent mais offrent l'accès aux quadrilatères et aux hexaèdres qui, bien souvent, sont considérés comme les éléments les plus performants. Le choix de la forme des éléments doit naturellement tenir compte des possibilités du ou des mailleur(s) disponibles.

Il arrive qu'un mailleur automatique échoue. Cela est souvent dû à la géométrie, et plus précisément :

- Soit à une erreur dans le modèle volumique, conduisant à une anomalie géométrique difficile à déceler : contour mal refermé, vide anormal, alignement mal spécifié...
- Soit à des détails géométriques obligeant le mailleur à utiliser des éléments trop petits ou trop déformés : un exemple typique est celui des bords tangents, qui font régulièrement échouer les mailleurs lorsqu'ils comportent des angles quasi-nuls (figure 3a).

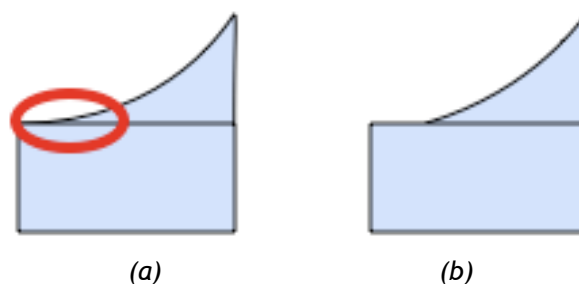


Figure 3 : (a) Une géométrie avec deux bords tangents, dont l'angle très faible peut poser problème ; (b) une modification permettant de contourner le problème... au prix de l'apparition d'une singularité.

Ces problèmes peuvent parfois être résolus en modifiant la géométrie ; naturellement, il ne faut procéder à de telles modifications que si cela a peu de chances d'affecter significativement le résultat cherché... Par exemple, la figure 3b représente une modification de la figure 3a visant à supprimer la tangence ; la géométrie modifiée possède un angle rentrant conduisant à une singularité, et cette modification n'est donc pertinente que si le résultat cherché est situé suffisamment loin de l'angle rentrant.

En outre, certains maillages effectuent automatiquement des contrôles sur l'aspect des éléments, et peuvent échouer lorsque les critères par défaut sont trop stricts ; lorsque ces contrôles sont paramétrables, il est parfois avantageux de les assouplir. Par exemple, s'il existe un critère « angle minimal », alors l'augmentation du seuil de ce critère peut être une alternative à la modification géométrique de la figure 13. Le paragraphe suivant présente ces contrôles et leur influence sur les résultats.

4 - Le contrôle de l'aspect des éléments

Enfin, une fois la génération automatique terminée, il reste un certain nombre de vérifications à effectuer avant de lancer la simulation ; la plupart des logiciels en effectuent certaines automatiquement, mais cela n'a rien de systématique et il est donc important de connaître les critères que doivent respecter les éléments. La première chose à faire est naturellement d'examiner la taille des éléments générés automatiquement (qui peut parfois être éloignée de la valeur spécifiée) et de s'assurer que la géométrie n'a pas été trop altérée ET que le maillage pourra représenter les gradients de contrainte attendus, comme expliqué au paragraphe précédent.

Il faut ensuite s'assurer que le maillage ne contient aucun élément dégénéré (voir ressource « Résolution d'un modèle éléments finis : 2. Résolution et analyse des résultats »), c'est-à-dire complètement plat, croisé ou muni d'un angle rentrant comme les éléments de la figure 4. Dans le cas contraire, la technique employée pour construire le système d'équations ne fonctionne pas et les résultats peuvent être faux. Cette vérification est généralement effectuée automatiquement, mais mieux vaut être prudent !

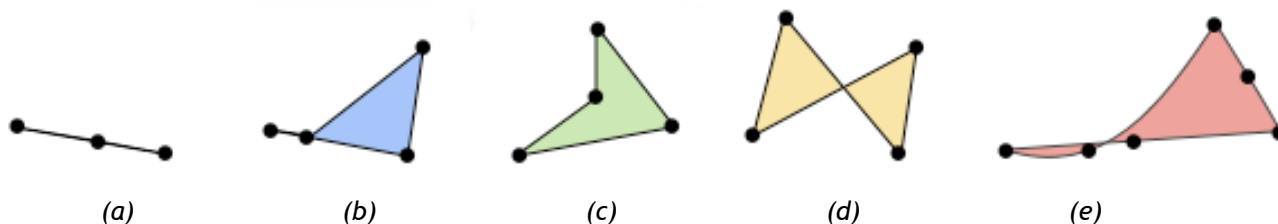


Figure 4 : Des éléments dégénérés, susceptibles de conduire à un résultat faux : (a) un triangle aplati, (b) un quadrilatère aplati, (c) un quadrilatère avec un angle rentrant, (d) un quadrilatère croisé, (e) un triangle quadratique croisé.

Enfin, il est fortement conseillé de contrôler l'aspect des éléments. Schématiquement, il s'agit de vérifier que les éléments ne sont pas trop distordus par rapport à leur géométrie de référence. Par exemple :

- Pour les triangles et les tétraèdres, éviter tout élément trop « allongé » ou « aplati » (figure 5a) ;
- Pour les quadrilatères et les hexaèdres, utiliser des formes les plus rectangulaires possibles (figure 5b) ;
- Pour les éléments d'ordre 2, n'employer les arêtes courbes que pour représenter des bords non plans, et pas à l'intérieur du volume (figure 5c) ;
- Egalement pour les éléments d'ordre 2, toujours laisser les « nœuds milieu » à égale distance des deux sommets voisins (figure 5d) (sauf en mécanique de la rupture où on déplace parfois volontairement ces nœuds pour modéliser des singularités en pointe de fissure, ce qui sort du cadre de cette ressource).

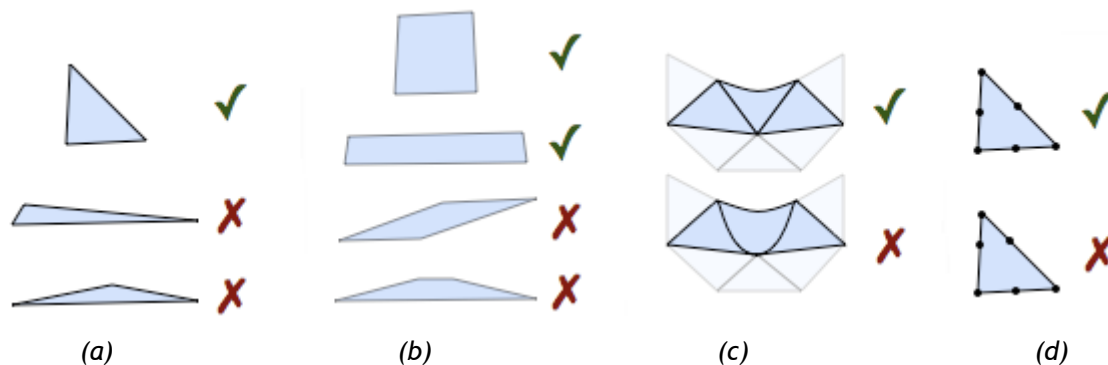


Figure 5 : Règles morphologiques : (a) pour les triangles (et les tétraèdres) de tout ordre, (b) pour les quadrilatères (et les hexaèdres) de tout ordre, (c,d) pour les éléments du second ordre de toute forme.

La présence d'éléments trop distordus peut nuire à la pertinence du résultat de plusieurs façons. Premièrement, les fonctions de base dépendent de l'aspect des éléments, et on peut montrer qu'une géométrie trop distordue peut conduire à des fonctions de base d'allure irrégulière. Cela peut perturber les résultats de façon directe (en faussant l'allure des champs) et/ou indirecte (en surestimant la rigidité des éléments concernés). Deuxièmement, la présence d'éléments trop « aplatis » ou trop « étirés » dégrade le conditionnement du système d'équations résolu par le logiciel ; cela peut théoriquement nuire à la précision des calculs, bien que ce problème soit rarissime en pratique.

Les problèmes liés à l'aspect des éléments surviennent souvent lorsque l'on tente de mailler des détails géométriques de petite taille avec des éléments trop grands. Le remède consiste alors, selon les cas, à réduire localement la taille des éléments (pour que ceux-ci puissent « tenir » dans le volume géométrique sans être trop distordus) ou à corriger la géométrie elle-même (typiquement, dans les zones de tangence, comme nous l'avons vu précédemment). Ceci étant dit, la présence de quelques éléments modérément distordus comme ceux de la figure 15 ne signifie pas forcément que les résultats seront peu fiables ; les règles ci-dessus sont généralement données à titre de précaution, et seules les distorsions extrêmes (et a fortiori les éléments dégénérés) sont à éviter absolument.

5 - Bilan

Dans cette ressource, nous avons mis en évidence les points suivants l'aspect de la démarche de modélisation d'un produit par éléments finis : les résultats ne seront pertinents que si le maillage est « bon », c'est-à-dire si les éléments sont non dégénérés et pas trop distordus.

Les trois autres aspects de la démarche de modélisation sont décrits dans les ressources :

- « *Le modèle en éléments finis du produit dans son environnement ou maillage : 1. Adaptation de la géométrie à la simulation* »,
- « *Le modèle en éléments finis du produit dans son environnement ou maillage : 2. Choix des éléments* »,
- « *Le modèle en éléments finis du produit dans son environnement ou maillage : 4. Modélisation du monde extérieur* ».

Ressource publiée sur EDUSCOL-STI : <http://eduscol.education.fr/sti/si-ens-paris-saclay>