

Le modèle en éléments finis du produit dans son environnement ou maillage :

2. Choix des éléments

Dans une simulation par éléments finis, le produit est modélisé par un maillage, c'est-à-dire un ensemble de nœuds et d'éléments. Le choix du maillage détermine notamment les fonctions de base qui représentent les champs de déplacement, et a donc une influence considérable sur les résultats. Dans une simulation par éléments finis, l'interaction du produit avec son environnement est elle aussi modélisée, sous la forme d'efforts et de déplacements nodaux. Pour que la modélisation soit pertinente, la construction du maillage doit donc respecter certains principes et prendre en compte quatre aspects :

1. Adaptation de la géométrie à la simulation, proposé dans la ressource « *Le modèle en éléments finis du produit dans son environnement ou maillage : 1. Adaptation de la géométrie à la simulation* » ;
2. **Le choix des éléments, proposé dans cette ressource ;**
3. La génération et le contrôle du maillage, proposé dans la ressource « *Le modèle en éléments finis du produit dans son environnement ou maillage : 3. Génération et contrôle du maillage* ».
4. Le modèle de l'environnement, proposé dans la ressource « *Le modèle en éléments finis du produit dans son environnement ou maillage : 4. Modélisation du monde extérieur* ».

1 - Introduction

Dans la ressource « *Le modèle en éléments finis du produit dans son environnement ou maillage : 1. Adaptation de la géométrie à la simulation* », les points importants permettant une bonne préparation de la géométrie afin de faciliter la réalisation du maillage et d'abaisser le coût des calculs ont été exposés. Ces points à examiner sont:

- Le choix de la dimensionnalité de l'espace et/ou du maillage ;
- L'exploitation des symétries des modèles ;
- La suppression des détails géométriques superflus ;
- La délimitation des régions où seront affectés des modèles de comportements ou d'environnements différents.

Concomitamment à l'adaptation de la géométrie, il faut choisir les éléments que le logiciel utilisera pour construire le maillage.

2 - Le choix des éléments

La plupart du temps, cela consiste à spécifier le type d'élément à utiliser (dans cette ressource, nous nous limitons à deux critères : la forme de l'élément et l'ordre de ses fonctions de base) et un ordre de grandeur de la taille souhaitée. Le choix de ces paramètres repose sur deux idées essentielles.

Premièrement, le type et la taille des éléments déterminent l'allure des champs de déplacement, et donc de déformation et de contrainte. En effet, ces champs dépendent des fonctions de base qui, en éléments finis, sont définies par morceaux, sur chaque élément. Par conséquent, la taille et la position des éléments déterminent la délimitation des morceaux, tandis que le type des éléments détermine l'allure de chacun de ces morceaux. A titre d'exemple :

- Les contraintes sont constantes par élément avec les barres, triangles et tétraèdres du premier ordre ;
- Les contraintes sont affines par élément avec les barres, triangles et tétraèdres du second ordre ;
- Les quadrilatères, hexaèdres et prismes permettent quant à eux des variations supplémentaires, mais de façon limitée (pour certaines composantes et dans certaines directions uniquement).

La figure 1 représente, dans le cas unidimensionnel, un exemple de champ de contraintes constant par élément (figure 1a) et affine par élément (figure 1b).

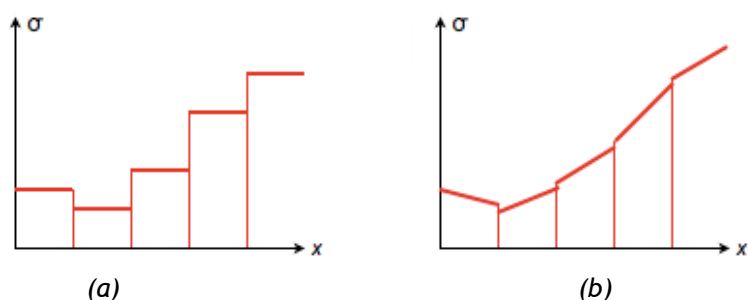


Figure 1 : Schématisation des champs de contraintes (en 1D) pouvant être représentés :
 (a) par des éléments du premier ordre (la contrainte est alors constante par élément),
 (b) par des éléments du second ordre (la contrainte est alors affine par élément).

Deuxièmement, le type et la taille des éléments influent également sur l'allure du domaine géométrique lui-même. En effet, dans le cas des éléments isoparamétriques (les plus fréquents), les fonctions de base sont également utilisées pour définir la transformation géométrique qui associe chaque élément à sa géométrie de référence. En termes moins techniques, ce sont les fonctions de base qui déterminent la forme que peuvent prendre les éléments. En particulier :

- Les éléments du premier ordre ont toujours des arêtes rectilignes ;
- Les éléments du second ordre peuvent avoir des arêtes en arc de parabole.

La figure 2 schématise, en 2D, le maillage d'un trou réputé circulaire par des éléments du premier ordre (figure 2a) et du second ordre (figure 2b). Aucun de ces éléments ne peut avoir des arêtes circulaires, et la géométrie nominale du trou est donc approchée, ce qui conduit à approximer la localisation de la condition aux limites de bord libre (en plus d'approximer la condition aux limites elle-même). L'approximation de la géométrie a donc une influence indirecte sur les résultats de la simulation, et doit être elle aussi prise en considération dans la définition du maillage.

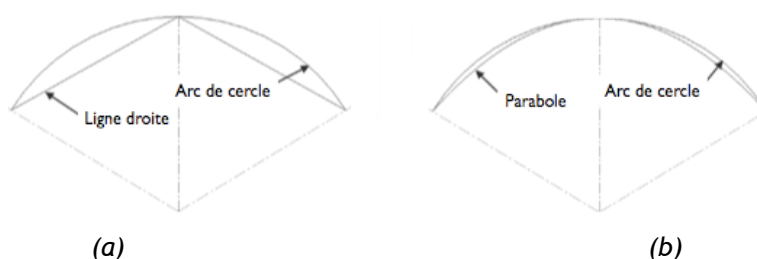


Figure 2 : Approximation d'un bord réputé circulaire en 2D : (a) par les arêtes rectilignes d'éléments du premier ordre, (b) par les arêtes paraboliques d'éléments du second ordre.

Par conséquent, le choix du type et de la taille des éléments repose sur l'examen de deux critères : l'allure du champ de contrainte attendu, et l'allure du domaine géométrique à mailler.

3 - Comment choisir l'ordre des éléments ?

Dans le cadre d'une théorie volumique ou des contraintes ou déformations planes, la plupart des logiciels proposent des éléments du premier ou du second ordre (et parfois d'ordre plus élevé). Les exemples ci-dessus montrent que les éléments du second ordre présentent deux avantages importants par rapport aux éléments du premier ordre :

- Ils peuvent représenter des gradients de contrainte de façon plus précise pour un nombre de nœuds égal voire inférieur, car les contraintes peuvent varier en leur sein (figure 1) ;
- Ils peuvent mailler des domaines dont le bord n'est pas plan ou rectiligne plus précisément, là encore à nombre de nœuds inférieur ou égal, car leurs arêtes (et leurs faces en 3D) peuvent s'incurver (figure 2).

Par conséquent, sous les hypothèses de cette ressource, de nombreux concepteurs emploient la plupart du temps des éléments du second ordre. Les deux avantages ci-dessus sont en effet extrêmement utiles : en pratique, rares sont les pièces qui ne possèdent que des surfaces réputées planes et qui, sous charge, ne subissent que de faibles gradients de contraintes. Signalons deux exceptions dans lesquelles les éléments du premier ordre nous semblent préférables :

- En formation, et particulièrement lors de l'apprentissage de l'influence de la discrétisation sur les déformées et les contraintes, où la simplicité des fonctions de base du premier ordre facilite l'interprétation des résultats ;
- Dans certaines simulations non-linéaires (grandes déformations, contacts non permanents...) où ils présentent une insensibilité aux distorsions que n'ont pas les éléments du second ordre, mais cela sort du cadre de cette ressource.

Les éléments poutres et coques (ou plaques), que nous n'avons pas abordés ici, sont formulés différemment : ils possèdent des degrés de liberté supplémentaires en rotation qui leur permettent de représenter des déformations de flexion ou de torsion à moindre coût.

4 - Comment choisir la forme des éléments ?

Les logiciels proposent généralement plusieurs formes d'éléments. Les plus employées sont les triangles et les quadrilatères pour les modèles 2D (issus de la théorie des coques ou des plaques, ou bien de théories planes ou axisymétriques) et les tétraèdres, prismes triangulaires et hexaèdres pour les modèles volumiques.

De façon générale, les quadrilatères et les hexaèdres conduisent à de meilleurs résultats que les triangles, tétraèdres et prismes à nombre de nœuds égal, car leurs fonctions de base sont plus riches et peuvent représenter les gradients des contraintes et des déformations de façon plus régulière. A titre d'illustration, la figure 3 représente deux champs de déplacement interpolés à partir des mêmes valeurs nodales, dans le cas de deux triangles linéaires (figure 3a) et d'un quadrilatère bilinéaire construit sur les mêmes nœuds (figure 3b) : on voit que les deux triangles conduisent à un gradient de déplacement discontinu tandis que le quadrilatère conduit à un gradient continu, et donc à des contraintes plus régulières.

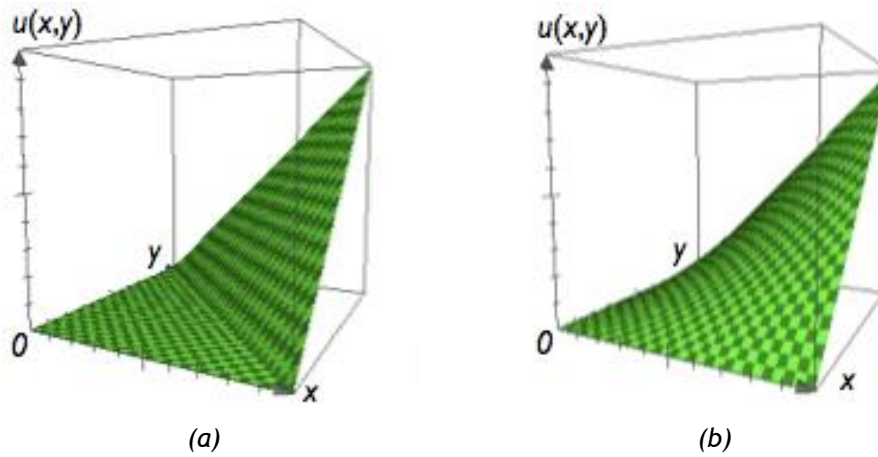


Figure 3 : Des champs de déplacement interpolés à partir des mêmes valeurs nodales :
 (a) par deux éléments triangulaires du premier ordre, (b) par un élément quadrilatéral du premier ordre.

La différence entre les tétraèdres et les hexaèdres est similaire, les prismes ayant une cinématique « intermédiaire » (schématiquement, le gradient de déplacement est uniforme sur les faces triangulaires, mais varie selon la hauteur).

En revanche, la réalisation des maillages est beaucoup plus simple avec les triangles et tétraèdres, car il existe de nombreux maillages adaptés à ces éléments et fonctionnant de façon complètement automatique. L'emploi des quadrilatères et, surtout, des prismes et hexaèdres demande généralement plus de travail de la part de l'utilisateur car les algorithmes adaptés à ces éléments sont moins généraux ; plus la géométrie est sophistiquée, plus le travail à fournir est important. La suite de cette ressource donne quelques précisions sur le processus de génération du maillage.

Le choix dépend donc essentiellement de la forme du domaine à mailler et des propriétés du maillageur automatique. Certains concepteurs tendent à privilégier les quadrilatères ou hexaèdres pour les géométries « simples » et les triangles ou tétraèdres pour les géométries plus sophistiquées. D'autres testent systématiquement plusieurs options dès que possible.

5 - Comment choisir la taille des éléments ?

Pour choisir la taille des éléments, deux règles s'imposent. La première, évidente, est d'adapter la finesse du maillage à la géométrie de sorte à pouvoir représenter les détails conservés dans le modèle. La seconde, moins évidente mais absolument essentielle, est d'adapter aussi la finesse du maillage aux gradients des contraintes et des déformations : les éléments doivent être d'autant plus petits que les contraintes varient rapidement afin de pouvoir capter leurs variations à l'aide de leurs fonctions de base, comme le suggère la figure 1.

La plupart des maillages automatiques possèdent des options permettant de spécifier différentes tailles d'éléments au sein d'un même maillage (voir ressource « *Raffinements du maillage et convergence* »). Cela est très utile car les gradients de contrainte sont rarement uniformes au sein d'une pièce : certaines zones (telles que les zones de concentration de contraintes) peuvent présenter des gradients élevés et devront donc être maillées finement, tandis que d'autres zones présentent des contraintes quasiment uniformes et pourront donc être maillées plus grossièrement sans que cela ne dégrade le résultat. La figure 4 illustre cette démarche sur l'exemple d'une plaque trouée sollicitée en traction (dont on n'a maillé que le quart grâce aux symétries du modèle) : le voisinage du trou, où se développent des concentrations de contraintes, est maillé plus finement que le reste de la plaque.

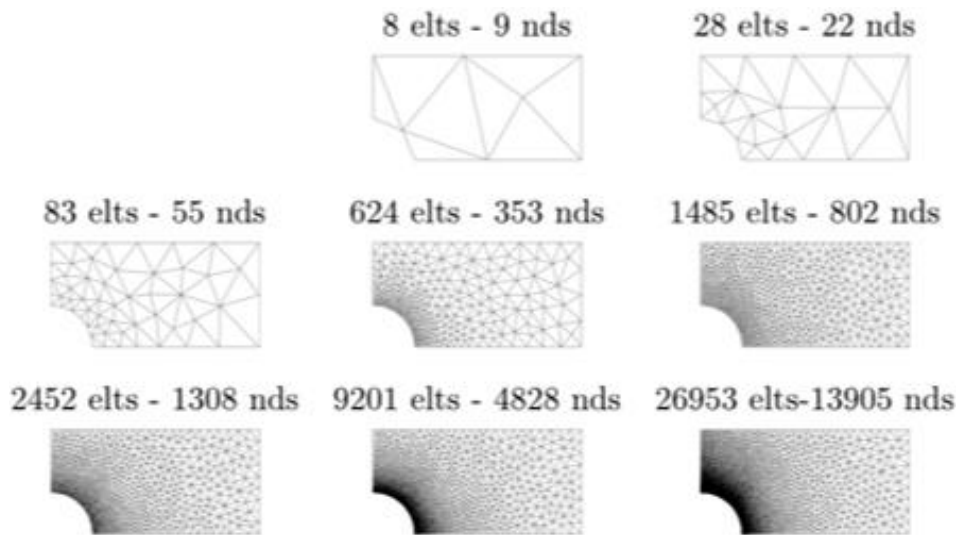


Figure 4 : Des maillages du quart d'une plaque trouée, adaptés aux gradients de contraintes : les éléments sont plus petits au voisinage du trou, image de Laurent Champaney.

De nombreux concepteurs s'appuient sur des règles empiriques qui découlent du principe ci-dessus. Par exemple, dans le cas d'une pièce (ou d'une partie d'une pièce) sollicitée en flexion et modélisée avec des éléments volumiques, il est nécessaire d'inclure suffisamment de couches d'éléments dans la direction de la flexion afin de représenter correctement le gradient de contrainte qui se développe dans l'épaisseur : typiquement, au moins trois couches d'éléments du second ordre ou six couches d'éléments du premier ordre. De façon générale, une seule couche d'éléments volumiques suffit rarement à représenter un champ de contrainte satisfaisant.

Signalons que contrairement à une idée répandue, il n'est pas forcément nécessaire de raffiner le maillage dans les zones où les contraintes sont élevées : la capacité d'un maillage à représenter un champ de contraintes ne dépend pas des valeurs de ce champ lui-même, mais de celles de ses gradients. Si une région présente des contraintes élevées mais quasi-uniformes, il n'y a pas besoin d'un maillage très fin dans cette région ! Néanmoins, il est vrai que les contraintes les plus élevées sont souvent localisées dans de petites zones, ce qui implique forcément la présence d'un gradient significatif à proximité...

Enfin, il est fréquent que l'obtention d'un maillage adapté aux champs qu'il doit représenter nécessite plusieurs tentatives, car l'allure des champs est souvent difficile à deviner avec précision a priori. La maîtrise de la qualité de la discrétisation (voir ressource « *Estimation de l'écart dû à la discrétisation* ») repose généralement sur le diagnostic : après avoir réalisé un premier maillage et lancé la simulation, le concepteur doit examiner les champs obtenus et, en analysant leurs anomalies, identifier les zones où un raffinement est nécessaire afin de corriger le maillage. Ce processus doit être répété jusqu'à ce que l'influence de ces anomalies sur le résultat cherché soit jugée suffisamment faible. De nombreux logiciels possèdent des fonctionnalités permettant d'assister l'utilisateur dans cette tâche, telles que les cartes d'erreur et le remaillage adaptatif, mais ces fonctionnalités ne suffisent pas à garantir la pertinence d'un résultat à elles seules : l'esprit critique du concepteur joue donc un rôle essentiel.

6 - Bilan

Dans cette ressource, nous avons mis en évidence le deuxième aspect de la démarche de modélisation d'un produit par éléments finis : le maillage doit être adapté aux champs de déplacement et de contrainte ainsi qu'à la géométrie de la pièce. En statique linéaire, cela conduit généralement à :

- Préférer les éléments du second ordre ;
- Adapter la taille des éléments aux gradients des contraintes, en la faisant varier au sein du maillage.

Les trois autres aspects de la démarche de modélisation sont décrits dans les ressources :

- « *Le modèle en éléments finis du produit dans son environnement ou maillage : 1. Adaptation de la géométrie à la simulation* »,
- « *Le modèle en éléments finis du produit dans son environnement ou maillage : 3. Génération et contrôle du maillage* »,
- « *Le modèle en éléments finis du produit dans son environnement ou maillage : 4. Modélisation du monde extérieur* ».

Ressource publiée sur EDUSCOL-STI : <http://eduscol.education.fr/sti/si-ens-paris-saclay>