

Cette ressource est issue d'un travail personnel de Kévin Doria, étudiant en Master 2 Aéronautique et Spatial à Centrale-Supélec et élève du département d'enseignement et de recherche (DER) de Génie Mécanique de l'ENS Paris-Saclay. Ce texte a été relu par Laetitia Gentot, Maîtresse de Conférences à l'École normale supérieure de Paris-Saclay au sein du même DER, enseignante de Mécanique des Fluides notamment.

Que ce soit pour l'optimisation du rendement d'un aéronef, la météorologie ou l'océanographie, la compréhension de la dynamique des écoulements fluides est toujours un enjeu de recherche majeur en physique et en ingénierie. Dans le domaine de l'aéronautique notamment, l'étude des écoulements d'air autour des profils d'aile permet de déterminer la portance qui peut être générée mais également la traînée de frottement et donc la consommation de carburant nécessaire pour un vol. Pour des raisons aussi bien financières qu'écologiques, la modélisation des effets amenant l'air à freiner une aile se doit donc d'être la plus précise possible.



Figure 1 : Soufflerie sonique S1MA à Modane-Avrieux, veine de 14 m de long et 8 m de diamètre, utilisée pour des mesures d'efforts sur une maquette, source ONERA [1]

Historiquement, les premières modélisations (et même les premières simulations numériques modernes) ne se basaient que sur les équations établies par Leonhard Euler¹ en 1757 [2], qui ne prennent pas en compte la viscosité de l'air i.e. les échanges de quantité de mouvement créant la traînée. L'introduction par Henri Navier² en 1820 de la notion de frottement fluide comme un terme supplémentaire dans les équations d'Euler permet d'aboutir, avec les travaux de George Gabriel Stokes³, aux équations de Navier-Stokes [3] en 1845 qui régissent les écoulements de fluides

¹ Leonhard Euler (1707-1783), mathématicien et physicien suisse

² Henri Navier (1785-1836), ingénieur, mathématicien et économiste français

³ George Gabriel Stokes (1819-1903), mathématicien et physicien britannique

visqueux. Il faut encore attendre 1904 pour que Ludwig Prandtl⁴ introduise le concept de couche limite qui permet de donner une explication à bon nombre de phénomènes que la théorie des fluides parfaits ne suffisait à expliquer. En effet, c'est la couche limite qui conditionne directement la résistance de frottement de l'aile et c'est dans cette zone que l'on retrouve les mécanismes de production de la turbulence. La couche limite est, par définition une région dans laquelle la vitesse passe d'une valeur nulle sur la paroi, par adhérence, à la vitesse de l'écoulement de fluide au loin.

Cette ressource introduit le concept de viscosité en mécanique des fluides ainsi que son intérêt, avant de présenter une de ses applications principales en aéronautique, les couches limites. Un cas particulier, la solution de Blasius, est ensuite détaillé dans le cadre d'un écoulement laminaire uniforme.

N.B : Dans la suite de cette ressource, les vecteurs seront notés en gras.

1 – Introduction de la viscosité

1.1 - Définition

La viscosité peut être définie comme l'état d'un fluide plus ou moins épais et sirupeux, caractérisant ainsi les différents phénomènes de résistance au mouvement de ce dernier dans un écoulement.



Figure 2 : Comparaison de la viscosité entre l'eau et le miel, source [4]

La viscosité définit ainsi la capacité du fluide à s'écouler plus ou moins facilement mais également la dissipation d'énergie créée par frottements. Un fluide visqueux, tel que le miel, a tendance à adhérer aux parois du récipient qui le contient, il est plus difficile à mettre en mouvement. La viscosité d'un fluide peut se mesurer expérimentalement de façon très simple grâce à un écoulement dit « de Couette » (Figure 3) du nom du physicien français Maurice Couette⁵. Cet écoulement est créé en emprisonnant le fluide entre deux parois parallèles dont la supérieure est en mouvement avec une vitesse uniforme U selon l'axe x et l'autre, une plaque, est maintenue fixe par un dispositif extérieur. On peut ainsi mesurer la force F_x nécessaire pour maintenir la paroi fixe en fonction de la vitesse d'avance de la paroi supérieure.

⁴ Ludwig Prandtl (1875-1953), ingénieur et physicien allemand

⁵ Maurice Couette (1858-1943), physicien français

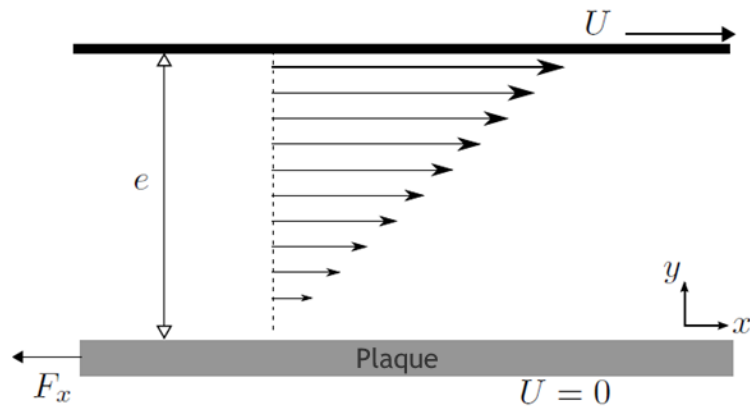


Figure 3 : Écoulement de Couette Plan, source [5]

Expérimentalement, on observe que la force rapportée à la surface de la plaque est proportionnelle au rapport de la vitesse d'avance et de l'épaisseur de l'écoulement. On note cette constante de proportionnalité μ , appelée viscosité dynamique, et exprimée en Poiseuille⁶ (Pl) équivalent au $kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$. On a ainsi, pour l'écoulement de Couette plan :

$$\frac{F_x}{S} = \mu \frac{U}{e}.$$

Plus généralement, pour un écoulement bidimensionnel sur une plaque plane on aura :

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} (y = 0),$$

Où τ est la contrainte pariétale.

Cet exemple d'écoulement est ainsi nommé en raison de sa similarité au principe de fonctionnement de l'appareil de mesure de la viscosité créé par Maurice Couette, le viscosimètre de Couette (figure 4). Il s'agit là d'un système composé de deux cylindres coaxiaux de rayons légèrement différents entre lesquels est confiné un fluide. Le cylindre externe est entraîné par l'intermédiaire d'une manivelle tandis que la rotation du cylindre interne est libre. Si un couple résistant constant s'exerce sur le cylindre interne, en régime permanent, la différence de vitesse de rotation des deux cylindres est proportionnelle à la viscosité dynamique du fluide.

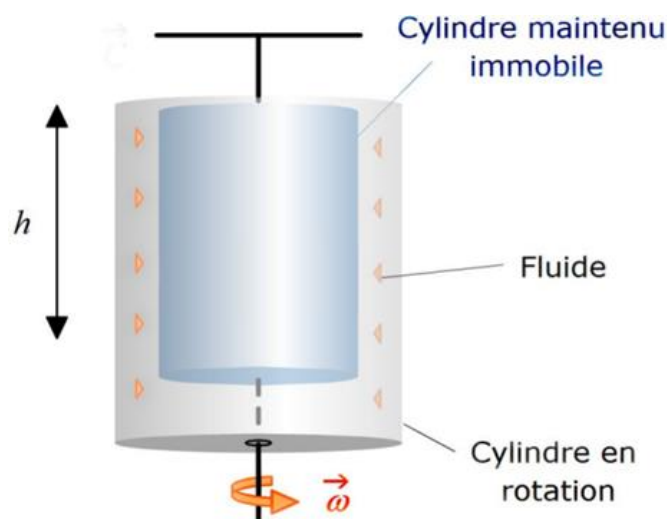


Figure 4 : Viscosimètre de Couette, source [6]

⁶ Du nom de Jean-Léonard-Marie Poiseuille (1797-1869), physicien et médecin français

La viscosité est donc une propriété intrinsèque du fluide étudié qui se manifeste lorsque ce dernier est mis en mouvement. Elle permet de transmettre la quantité de mouvement de la plaque à l'ensemble du domaine. La viscosité caractérise ainsi la capacité du fluide à transmettre de la quantité de mouvement. On peut faire le parallèle avec les transferts thermiques où la diffusivité thermique d'un milieu quantifie la capacité de ce milieu à transmettre la chaleur.

1.2 - Paradoxe de d'Alembert et nécessité de la viscosité

Si l'on néglige la viscosité du fluide, celui-ci n'adhère plus à la paroi et ne peut pas transmettre son mouvement. Sous cette hypothèse, avec les équations d'Euler, il est possible d'explicitier les formules donnant la portance et une partie de la traînée due aux tourbillons de bout d'aile (traînée induite) mais cette approche connaît des limites comme l'illustre le paradoxe de d'Alembert. Ce paradoxe, mis en évidence par Jean le Rond d'Alembert⁷, montre qu'en l'absence de viscosité, la force exercée sur une sphère plongée dans un écoulement fluide est nulle. Or, l'expérience montre naturellement qu'une sphère plongée dans un écoulement subit une force entraînante non-nulle.

Pour illustrer ce paradoxe sur un exemple, on considère un objet sphérique de rayon R plongé dans un écoulement fluide de vitesse U x . La surface de l'obstacle dans le plan (x, y) est notée C et on repère la position d'un point M dans l'espace bidimensionnel avec ses coordonnées polaires (r, θ) . Le problème est schématisé sur la Figure 5.

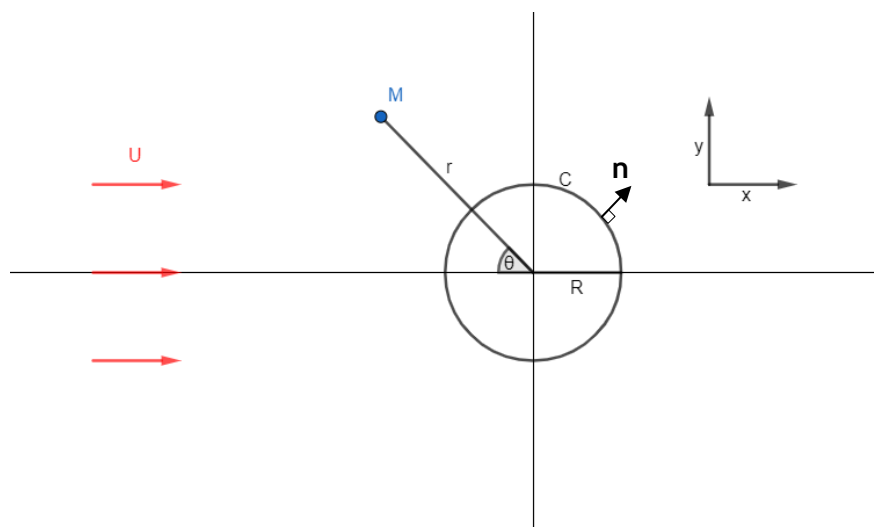


Figure 5: Écoulement uniforme sur une sphère fixe

La force exercée par le fluide sur l'obstacle est alors donnée par :

$$\mathbf{F} = - \int_C p(s) \mathbf{n} ds,$$

Où $\mathbf{n} = \cos(\theta) \mathbf{x} + \sin(\theta) \mathbf{y}$ est le vecteur normal sortant à la surface du cercle et $p(s)$ est la pression du fluide au point s de la surface. Il faut donc calculer $p(s)$ afin de déterminer \mathbf{F} et, pour cela, on commence par déterminer le champ de vitesse donné par $\mathbf{u} = u_r(r, \theta) \mathbf{e}_r + u_\theta(r, \theta) \mathbf{e}_\theta$. Pression et vitesse seront ensuite liées par le théorème de Bernoulli moyennant des hypothèses qui seront précisées [7].

⁷ Jean le Rond d'Alembert (1717-1783), mathématicien et physicien français

On considère que le fluide est incompressible, hypothèse valable tant que les vitesses considérées sont faibles par rapport à la vitesse du son dans le milieu. On se place enfin en régime stationnaire. On peut alors utiliser ces hypothèses pour simplifier l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0$$

La conservation de la masse se réécrit alors simplement $\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0$. Enfin, on suppose que l'écoulement est irrotationnel (i.e. $\operatorname{rot} \mathbf{u} = \mathbf{0}$). On parle alors d'écoulement potentiel car le vecteur vitesse peut s'écrire sous la forme du gradient d'une fonction potentielle (non unique) φ , telle que $\mathbf{u} = \nabla \varphi$. La conservation de la masse donne alors :

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = \operatorname{div}(\nabla \varphi) = \Delta \varphi = 0.$$

Le potentiel φ vérifie donc l'équation de Laplace avec les conditions aux limites suivantes :

1. À l'infini, l'écoulement est horizontal et non perturbé donc $\mathbf{u} = U \mathbf{e}_x$ soit $\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi = Ux = Ur \cos(\theta)$
2. Sur l'obstacle, la vitesse radiale est nulle donc $u_r(R, \theta) = \frac{\partial \varphi}{\partial r}(R, \theta) = 0$

La solution de ce problème est donnée par :

$$\varphi = U \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos(\theta).$$

Le champ de vitesse autour de l'obstacle s'écrit donc :

$$\mathbf{u} = \begin{cases} u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = U \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos(\theta) \\ u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -U \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \sin(\theta) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \mathbf{u}(R, \theta) = -2U \sin(\theta) \mathbf{e}_\theta$$

Pour réaliser le lien entre pression et vitesse sur la paroi de l'obstacle, on réalise un bilan énergétique sur les équations de Navier-Stokes en stationnaire. On aboutit alors au théorème de Bernoulli. Pour un fluide incompressible, parfait (sans viscosité) et en négligeant les transferts d'énergie sous forme de chaleur, on a, sur une même ligne de courant :

$$\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = \text{Constante}$$

Pour notre exemple, on considère une ligne de courant partant de l'infini en amont et arrivant sur le contour \mathcal{C} de l'obstacle on a :

$$\frac{p_\infty}{\rho} + \frac{U^2}{2} = \frac{p(R, \theta)}{\rho} + \frac{|\mathbf{u}(R, \theta)|^2}{2}$$

La pression le long de l'obstacle est donc donnée par :

$$p(R, \theta) = p_\infty + \frac{\rho U^2}{2} (1 - 4 \sin^2(\theta))$$

Cette dernière équation fournit la distribution de pression autour de l'obstacle considéré, représentée sur la Figure 6. En remarquant que $\int_C \cos(\theta) ds = \int_C \sin(\theta) ds = 0$, l'effort appliqué par le fluide sur la sphère est :

$$\mathbf{F} = - \int_0^{2\pi} p(R, \theta) \cos(\theta) R d\theta \mathbf{x} - \int_0^{2\pi} p(R, \theta) \sin(\theta) R d\theta \mathbf{y}$$

On peut également prouver que $\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) \cos(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^3(\theta) d\theta = 0$. De ce fait, l'effort exercée par le fluide est nul, il s'agit du paradoxe de d'Alembert avec un constat théorique à l'opposé des constats expérimentaux.

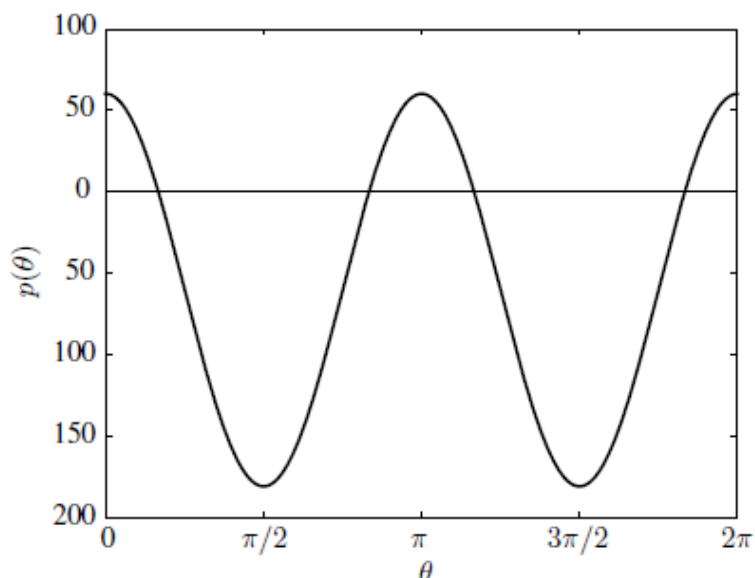


Figure 6 : Distribution de pression le long de la paroi circulaire, source [5]

Ne pas considérer la viscosité du fluide équivaut donc à considérer que le fluide glisse sur la paroi : il n'y a pas de frottement du fluide et donc pas de traînée. Pour comprendre et modéliser ce frottement à la paroi, il faut s'intéresser de près à la physique de l'écoulement dans cette région. Cette zone est appelée la couche limite, c'est une zone de forts cisaillements induits par des gradients de vitesse intenses.

2 – Concept de couche limite

Une couche limite est une zone de transition entre deux régions de différentes vitesses. Une couche limite s'établit donc entre une zone où le fluide est à l'arrêt, et un écoulement extérieur à grande vitesse. La couche limite est une zone de l'écoulement où s'opèrent les transferts de quantité de mouvement (et où se créent le frottement et la traînée) par l'intermédiaire des forces de pression et des contraintes visqueuses. Cette zone peut être considérée comme mince par rapport à la distance caractéristique totale parcourue par l'écoulement. Pour un écoulement sur une plaque plane, on considèrera comme distance caractéristique la longueur de la plaque et pour un profil d'aile sa corde. On peut également rencontrer ce phénomène de couche limite en météorologie avec la couche limite atmosphérique (Figure 7) dont la taille sera petite par rapport à la longueur de l'équateur par exemple.

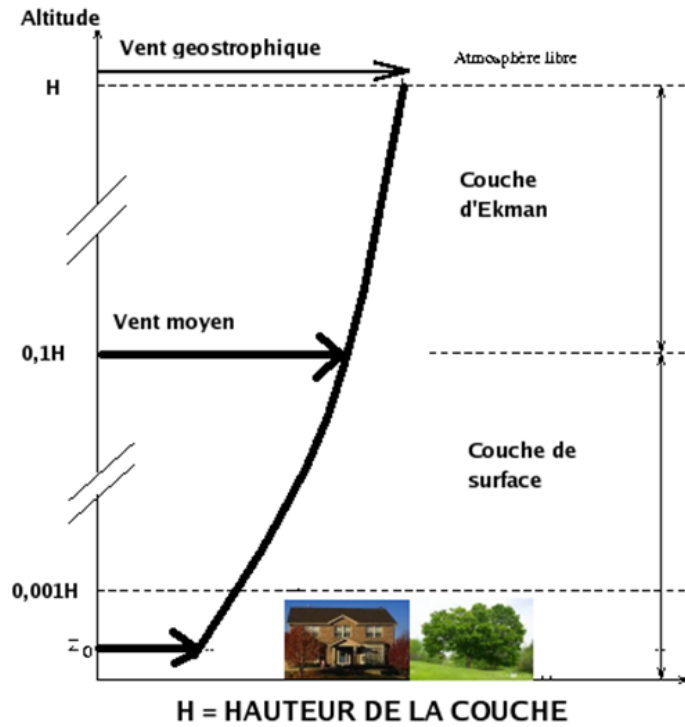


Figure 7 : Couche limite atmosphérique, source [8]

Une couche limite apparaît lorsque l'écoulement est fortement cisailé dû à la présence de forts gradients transverses, c'est-à-dire lorsque l'on observe de grandes différences de vitesses entre deux points proches dans la direction transverse à l'écoulement. L'étude de la couche limite permet notamment de calculer les forces de frottement subies par une paroi solide et donc la puissance nécessaire pour mettre en mouvement un avion, une fusée, un navire. Différentes configurations d'écoulements peuvent donner naissance à une couche limite. On peut rassembler ces configurations en trois groupes :

1. **Les couches limites pariétales.** Ces couches limites se développent au voisinage d'une surface solide plongée dans un écoulement fluide comme sur la Figure 8. À gauche est schématisé un profil de vitesse avant l'arrivée sur la plaque qui commence en $x=0$. À la surface du profil, la vitesse du fluide est ramenée à zéro car il n'y a pas de glissement à la paroi et les particules fluides adhèrent à celle-ci. À la limite externe de la couche limite, la vitesse tend vers une valeur finie qui est celle de l'écoulement sans viscosité autour du même profil. On appelle épaisseur de la couche limite δ , la hauteur correspondant à la hauteur pour laquelle la vitesse axiale dans la couche limite atteint 99% de la vitesse extérieure i.e. δ est défini par $u(x, \delta) = 0.99 U_\infty(x)$. Cette épaisseur de la couche limite est expérimentalement faible et on y retrouve de forts gradients de vitesse et le taux de cisaillement des particules s'en retrouve élevé. Les propriétés physique et géométrique de la couche limite résultent alors de la compétition entre les forces de viscosité, les forces de pression et les contraintes visqueuses.

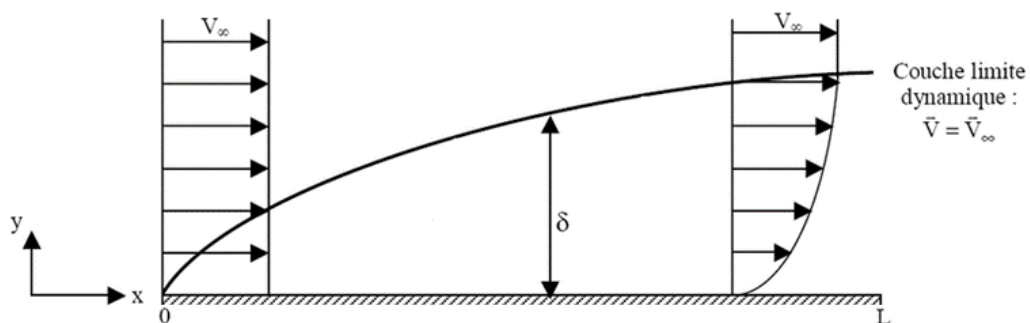


Figure 8 : Couche limite pariétale, source [5]

2. **Les zones de mélange.** Une zone de mélange est formée par la rencontre de deux fluides de vitesses différentes. L'épaisseur de la zone de mélange est faible et le gradient transversal de vitesse dans cette région est important. Il y a une accélération du fluide le plus lent et une décélération du plus rapide simultanément dans une zone d'épaisseur linéairement croissante. C'est l'exemple d'un jet débouchant dans un milieu au repos ou deux courants qui se rencontrent à l'extrémité d'une plaque de séparation (ex : bord de fuite d'une aile) comme sur la Figure 9,

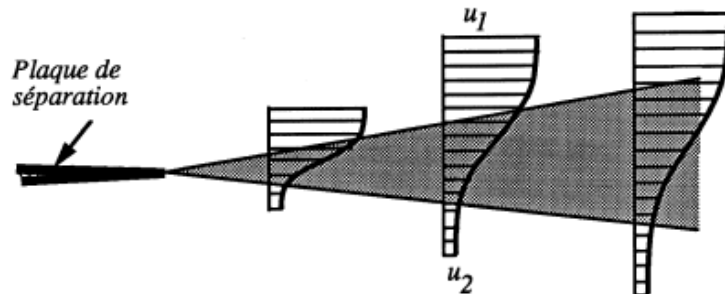


Figure 9 : Couche limite de mélange entre deux écoulements parallèles de vitesse différente, source [9]

3. **Les sillages et jets libres.** On peut citer l'exemple des jets de tuyère (Figure 10) qui pénètrent dans des milieux ambiants au repos. Comme dans le cas précédent, une zone de mélange se forme à la frontière du jet et l'épaisseur de cette zone augmente linéairement dans la direction axiale du jet. Dans ce cas, le cisaillement du fluide est créé par la différence de vitesse. Le gradient est initialement important, puis le profil s'uniformise supprimant tout gradient transverse.

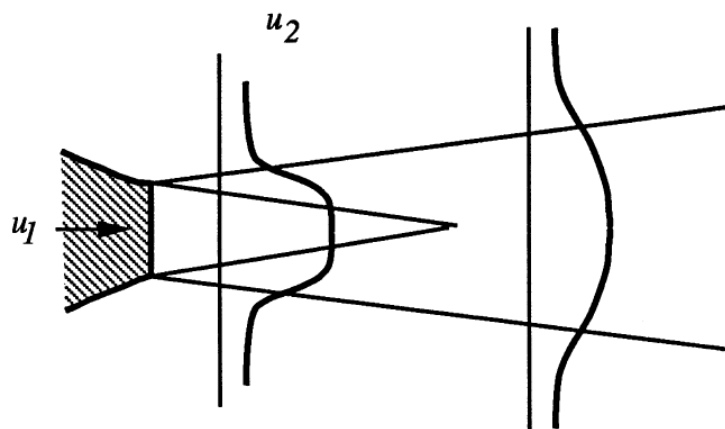


Figure 10 : Jet libre en sorti d'une tuyère, source [9]

Dans cette ressource, nous nous intéressons uniquement aux couches limites pariétales qui sont à l'origine de la force de frottement qui crée la traînée sur les avions.

3 – Équations directrices

Les équations principales qui régissent une couche limite sont celles de Navier-Stokes, qui sont simplifiées par un jeu d'hypothèses mathématiques basé sur la compréhension physique des phénomènes à l'œuvre. On rappelle que les équations de Navier-Stokes sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \text{ (Bilan de masse)} \\ \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \mathbf{f}_v \text{ (Bilan de quantité de mouvement)} \end{array} \right.$$

Où $\underline{\underline{\sigma}}$ est le tenseur des contraintes de Reynolds⁸ et f_v sont les forces volumiques (gravité). On ne s'intéresse pas à la troisième partie des équations de Navier-Stokes sur la conservation de l'énergie dans cette étude. Pour un fluide dit « newtonien⁹ » comme l'air, on a une relation affine liant la contrainte (σ) et la vitesse de déformation ($\nabla \mathbf{u}$) :

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu (\underline{\underline{\nabla}} \mathbf{u} + \underline{\underline{\nabla}}^T \mathbf{u}) - p \underline{\underline{I}}$$

On suppose aussi que l'écoulement est bidimensionnel, stationnaire et incompressible. Cette dernière hypothèse revient à supposer que l'on a des vitesses de fluide qui sont très inférieures à celle de la vitesse du son. On peut alors négliger les effets de compressibilité. Enfin, on considère le développement d'une couche limite sur une plaque plane fixe.

Le système d'équations réunissant respectivement la conservation de la masse et les deux équations de conservation de la quantité de mouvement longitudinale et transverse est donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{cases}$$

Avec $\mathbf{u} = (u, v)$, le vecteur vitesse et $\nu = \mu/\rho$, la viscosité dynamique, exprimée en $m \cdot s^{-2}$. Les conditions aux limites sont situées au niveau de la plaque où l'on a adhérence du fluide et à l'infini, on doit retrouver la vitesse extérieure horizontale u_e .

$$u(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = 0, \quad u(x, \infty) = U_\infty(x)$$

Pour les simplifications supplémentaires sur ces équations, on introduit de la physique à la résolution mathématique en raisonnant par ordre de grandeur. Cette approche permet de résoudre ces équations non linéaires sans outils numériques ou du moins avoir une idée de la solution. Les équations que nous obtiendrons de façon informelle peuvent ensuite être démontrées plus rigoureusement en utilisant les développements asymptotiques. On introduit donc les ordres de grandeur suivants :

- δ , l'épaisseur de la couche limite, ordre de grandeur dans la direction y
- L , une longueur caractéristique dans la direction de l'écoulement, ordre de grandeur dans la direction x
- (U, V) , des vitesses axiale et transversale caractéristiques

Dans l'équation de conservation de la masse ($\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$), si l'on veut éviter une solution triviale nulle, les deux termes doivent être du même ordre de grandeur :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{\partial v}{\partial y}$$

⁸ Osborne Reynolds (1842-1912), ingénieur et physicien irlandais

⁹ Un fluide newtonien est un fluide dont la viscosité est la même qu'il soit en mouvement ou non, qu'il soit contraint ou non.

$$\frac{U}{L} \sim \frac{V}{\delta}$$

$$V \sim U \frac{\delta}{L}$$

Considérons à présent l'équation de quantité de mouvement dans la direction de l'écoulement, la direction horizontale :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.1)$$

On numérote chacun des termes de cette équation de 1 à 5 :

$$(I) = u \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (II) = v \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (III) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (IV) = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (V) = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

De cette manière, l'équation (3.1) s'écrit :

$$(I) + (II) = (III) + (IV) + (V)$$

Si l'on compare les ordres de grandeurs des deux derniers termes de l'équation (3.1), on a :

$$\frac{(IV)}{(V)} \sim \frac{\nu U / L^2}{\nu U / \delta} = \left(\frac{\delta}{L} \right)^2 \ll 1$$

On peut donc négliger le terme de diffusion longitudinale par rapport au terme de diffusion transversale. Le terme (V) représente donc à lui seul les effets de viscosité dans notre système d'équations simplifiées, sans ce dernier on retombe sur les équations d'Euler. Comme nous l'avons énoncé précédemment, dans une couche limite, les termes inertiels, de pression et de diffusion visqueuse sont en concurrence. Les termes (I) et (II) d'inertie (qui sont tous les deux d'ordre de grandeur $\frac{U^2}{l}$), le terme de pression (III) et le terme (V) doivent donc être du même ordre de grandeur i.e. :

$$\frac{U^2}{L} \sim \frac{\nu U}{\delta^2} \sim \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.2)$$

La première égalité (I)-(V) ($\frac{U^2}{L} = \frac{\nu U}{\delta^2}$) nous permet par ailleurs d'avoir une première estimation de l'épaisseur de couche limite avec :

$$\frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{Re_L^{1/2}} \quad (3.3)$$

Où $Re_L = \frac{UL}{\nu}$ est le nombre de Reynolds. Cela implique que l'hypothèse faite sur l'épaisseur fine de la couche limite est conditionnée à des écoulements pour lesquels le nombre de Reynolds est élevé.

Passons désormais à l'équation transversale de la conservation de quantité de mouvement (avec les ordres de grandeurs de chaque terme) :

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3.4)$$

De la même manière que pour (3.1), on note, avec les ordres de grandeur associés :

$$(1) = u \frac{\partial v}{\partial x} \sim \frac{UV}{L}, \quad (2) = v \frac{\partial v}{\partial y} \sim \frac{V^2}{\delta}, \quad (3) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (4) = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \sim \frac{\nu V}{L^2}, \quad (5) = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \sim \frac{\nu V}{\delta^2}$$

Pour que l'équilibre des termes d'inertie, de pression et de diffusion visqueuse évoqué précédemment soit toujours réalisé, on doit avoir :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \sim \frac{UV}{L} \sim \frac{U^2 \delta}{L^2}$$

Or le gradient de pression longitudinal avait pour ordre de grandeur U^2/L d'après l'équation (3.2), donc on a :

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) / \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \right) \sim \frac{\delta}{L} \ll 1$$

Dans une couche limite, la pression ne varie pratiquement pas dans la direction transversale et l'équation de quantité de mouvements suivant y peut être simplifiée par :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

Enfin, dans la zone interne, on peut reprendre l'équation de conservation de la quantité de mouvement selon x . Cette équation reste valable même hors de la couche limite et donc sur la frontière où $u = U_\infty$. À cet endroit, le champ de vitesse ne varie plus avec la distance y et il n'y a pas de gradient important dans la direction transversale. On obtient donc :

$$U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}$$

On retrouve ainsi le lien entre pression et vitesse du théorème de Bernoulli.

Finalement, on aboutit au système d'équations suivant, appelées équations de Prandtl :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.5) \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.6) \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (3.7) \end{array} \right.$$

Ainsi que le lien avec la zone externe :

$$u_e \frac{du_e}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \quad (3.8)$$

Les conditions aux limites sont toujours $u(x, 0) = 0$, $v(x, 0) = 0$, $u(x, \infty) = U_\infty(x)$

4 – Résolution exacte pour une plaque plane

Le cas le plus simple à traiter pour les couches limites pariétales est celui d'un écoulement sur une plaque plane fixe située à l'ordonnée $y = 0$ et plongée dans un écoulement uniforme. Sur cet exemple, il est possible d'obtenir une résolution exacte des équations de Prandtl. On suppose donc que l'écoulement externe possède une vitesse constante U_∞ . D'après l'équation de lien (3.8), on a donc :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

Les équations de Prandtl (3.5), (3.6) et (3.7) se simplifient alors et il ne reste que :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\end{aligned}$$

Le problème considéré ici ne possède pas d'échelle propre et physiquement, on observe que le profil de vitesse axiale est auto-semblable. Cela signifie que le profil de vitesse $u(x, y)$ peut être calculé en connaissant le profil en une abscisse x_0 . Plus rigoureusement, par analyse dimensionnelle (théorème de Vaschy-Buckingham¹⁰), on peut introduire des nombres sans dimensions permettant de réduire le nombre de paramètres intervenant dans les équations décrivant le système. Ainsi, on peut prouver que le ratio entre la vitesse dans la couche limite et celle à l'extérieure (u/U_∞) dépend d'une seule grandeur adimensionnée d'espace η , définie par :

$$\eta = y \left(\frac{U_\infty}{\nu x} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Cette grandeur est appelée variable de similitude. On cherche donc la fonction f telle que :

$$f'(\eta) = \frac{u(x, y)}{U_\infty} = \frac{u(\eta)}{U_\infty}$$

Remarque : On pourrait définir f par u/u_e mais on choisit de déterminer sa dérivée pour des raisons de simplicité de notation dans le résultat final.

Par la conservation de la masse on a :

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = -U_\infty \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \left(\frac{U_\infty \nu}{x} \right)^{1/2} f'' \cdot \eta$$

Soit finalement :

$$v = \frac{1}{2} \left(\frac{U_\infty \nu}{x} \right)^{1/2} (\eta f' - f)$$

¹⁰ Du nom d'Aimé Vaschy (1857-1899), ingénieur des télégraphes et mathématicien français et d'Edgar Buckingham (1867-1940), physicien américain

Grâce à la condition d'adhérence $v(x, y = 0) = v(\eta = 0) = 0$

En appliquant le même raisonnement à l'équation de conservation de la quantité de mouvement, on aboutit à l'équation de Blasius¹¹ (1908) :

$$2f''' + ff'' = 0$$

Il s'agit d'une équation différentielle ordinaire du troisième ordre qui est donc accompagnée de trois conditions aux limites :

$$\begin{cases} u(x, 0) = f'(0) = 0 \\ v(x, 0) = f(0) = 0 \\ u(x, \infty) = f'(\infty) = U_\infty \end{cases}$$

En théorie, ce problème est dit mal posé étant donné que les trois conditions ne sont pas données au même point et il n'y a aucune garantie d'avoir une solution. Dans la pratique, une solution existe mais il s'agit d'employer des méthodes numériques à défaut de pouvoir procéder à une résolution analytique totalement exacte. L'idée pour compléter le problème est d'imposer la condition manquante i.e. imposer $f''(0) = s$ avec s à déterminer.

La méthode privilégiée est un procédé de tâtonnements nommé « méthode de tir ». En partant d'une première valeur arbitraire pour s , on procède à une résolution de l'équation de Blasius à l'aide de méthodes numériques classiques (Euler rétrograde ou avance) ou plus sophistiquées (Runge-Kutta¹²). On sait que l'on doit avoir $f'(\infty) = 1$ (cible), donc on ajuste une condition initiale $f''(0)$ (tir) jusqu'à respecter la condition à l'infini. On peut procéder par dichotomie par exemple. On notera qu'il existe alors trois sources d'erreurs principales : l'erreur intrinsèque à la méthode d'intégration numérique utilisée, l'erreur sur la valeur de η pour laquelle on considère que f' a atteint sa valeur finale et enfin l'erreur de la méthode de tâtonnements. On peut alors retrouver le profil de vitesse sur la Figure 11.

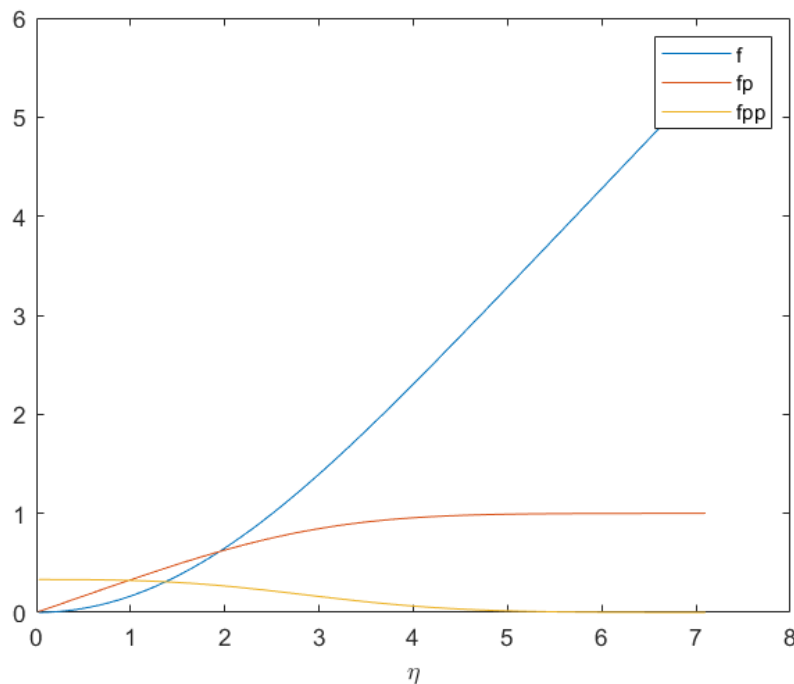


Figure 11 : Résolution de l'équation de Blasius par méthode de tir

¹¹ Heinrich Blasius (1883-1970), physicien allemand et élève de Prandtl

¹² Du nom de Carl Runge (1856-1927), mathématicien et physicien allemand et Martin Wilhelm Kutta (1867-1944), mathématicien allemand

Une fois la résolution effectuée, on peut remonter à différentes grandeurs d'intérêt comme l'épaisseur de la couche limite ou la contrainte pariétale. On retrouve ainsi par définition :

$$\delta = \eta_1 \left(\frac{\nu x}{U_\infty} \right)^{1/2}$$

Où η_1 est tel que $f(\eta_1) = 1$

Plus précisément, on a :

$$\frac{\delta}{L} = \frac{5}{\sqrt{Re_x}}$$

Ce qui correspond à l'estimation réalisée précédemment avec l'équation (3.3) mais avec la détermination du coefficient de proportionnalité dans ce cas. De même, on a :

$$\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y} (y = 0) = \rho U_\infty^2 \frac{f''(0)}{\sqrt{Re_x}}$$

On définit alors le coefficient de frottement C_f par :

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} \approx \frac{0.332}{\sqrt{Re_x}}$$

5 – Conclusion

À travers cet article, nous avons introduit une des difficultés rencontrées par les physiciens s'intéressant à la mécanique des fluides au XIXe siècle à savoir l'explication du phénomène de traînée. Le paradoxe de d'Alembert est une parfaite illustration de cette limite, justifiant l'introduction du concept de viscosité qui a amené à l'étude des couches limites par Prandtl. Alors que différents types d'écoulements mènent à la formation de couches limites nous nous sommes concentrés sur les couches limites pariétales, responsables de la traînée des avions. Plus précisément, les différentes simplifications applicables aux équations de Navier-Stokes ont été montrées afin d'aboutir aux équations directrices d'une couche limite. Dans le cadre particulier d'un écoulement uniforme sur une plaque plane, nous avons démontré qu'il suffisait de résoudre une équation différentielle ordinaire (équation de Blasius) pour obtenir les profils de vitesse dans la couche limite. Enfin, une méthode numérique de résolution de cette équation a permis d'explicitement la traînée sur une plaque plane. Cette résolution est ensuite une porte ouverte à une étude plus profonde des couches limites pour des profils plus complexes qu'une plaque plane et des écoulements non-uniformes (méthode approchée Polhausen-Von Karman [4]).

Références :

[1]: Les très grandes souffleries de l'ONERA, 2014, consulté en octobre 2021, https://www.onera.fr/sites/default/files/actualites/breves/Dossier-presse_2.pdf

[2]: Équations d'Euler, consulté en octobre 2021, https://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89quations_d%27Euler

[3]: Équations de Navier-Stokes, consulté en octobre 2021, https://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89quations_de_Navier-Stokes

[4]: Viscosité - LES FLUIDES, consulté en janvier 2022,
<https://lesfluides8sciences.weebly.com/viscositeacute.html>

[5]: Mécanique des Fluides - Aérodynamique, Franck Richecoeur, Éditions Ellipses

[6] : Viscosimètre (ou rhéomètre) de Couette, consulté en mars 2022,
http://gilles.django.group/static/fichiers/Viscosimetre_Couette.pdf

[7]: Théorème de Bernoulli consulté en octobre 2021,
https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Bernoulli

[8]: Couche limite atmosphérique, consulté en octobre 2021,
https://fr.wikipedia.org/wiki/Couche_limite_atmosph%C3%A9rique

[9]: Mécanique des Fluides : Cours, Sébastien Candel, Éditions Dunod