

# Expérimenter la RdM avec le banc 3R Bed100 : Étude théorique d'assemblages sollicités en flexion (bâtonnets bois)

Culture Sciences  
de l'Ingénieur

Xavier JOURDAIN - Hélène HORSIN MOLINARO

Édité le  
09/01/2023

école —————  
normale —————  
supérieure —————  
paris — saclay —————

L'objectif de ces ressources est de proposer des activités incitant les élèves à réfléchir à la construction d'un pont franchissant un obstacle. Que doit-on comprendre et développer pour construire un tablier de pont ? Nous aborderons la notion d'effort maximal, de moment quadratique, de valeurs expérimentales et théoriques. Il est important de souligner que ces études permettent de réduire la quantité de matériaux utilisés pour dimensionner une structure, et sont donc directement liées à la notion d'éco-responsabilité, et de sobriété dans la construction.

La première ressource « *Expérimenter la RdM avec le banc 3R Bed100 : Caractérisation d'assemblages sollicités en flexion (bâtonnets bois)* » [1] propose une démarche expérimentale pour montrer l'influence du collage et du positionnement des bâtonnets sur leur résistance en flexion. Des essais de flexion 3 points pilotés en déplacement sont menés, sur le banc 3R Bed 100, sur des bâtonnets simples, doubles collés ou non collés et triples collés ou non collés, sollicités selon leur axe faible ou leur axe fort (figure 2). L'aptitude à résister à la flexion permet une sensibilisation au moment quadratique. Les données sont obtenues sur plusieurs essais ce qui permet une sensibilisation à la variabilité des résultats. Cette notion est particulièrement développée dans la ressource « *Caractérisation de la variabilité de la résistance en traction de bâtonnets en bois* » [2].

Cette ressource présente les études théoriques simples des différents cas d'assemblages de bâtonnets afin de montrer :

- L'importance du choix de positionnement des bâtonnets sollicités en flexion (axe faible versus axe fort) ;
- L'influence du collage dans le cas de la superposition de bâtonnets mis sur leur axe faible ;
- Les limites du modèle poutre posé sur une géométrie supposée parfaite ;
- L'importance de prendre en compte les instabilités lors d'un calcul des structures (dans l'étude présente, le déversement).



Figure 1 : Banc 3R Bed 100, source [1]

## 1 – Cas avec un bâtonnet

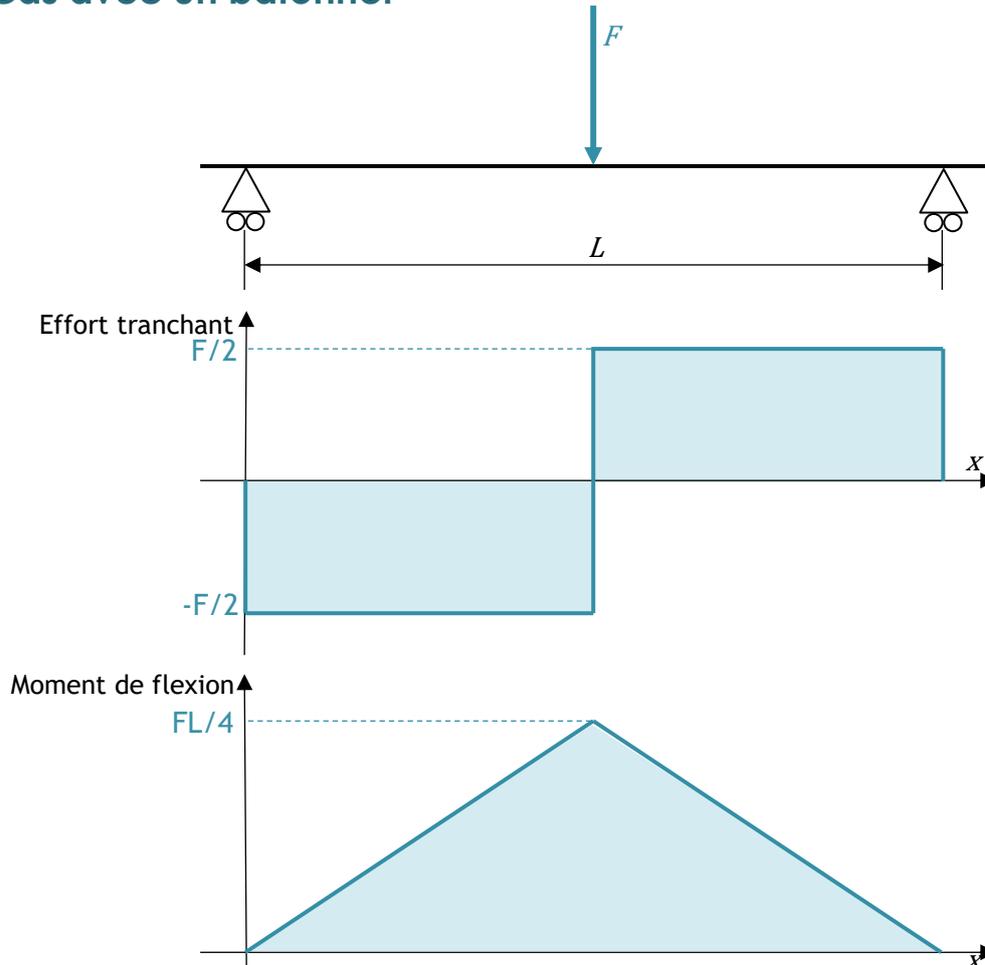


Figure 2 : Modélisation de l'essai de flexion sur un bâtonnet - Courbes de l'effort tranchant et du moment de flexion

On remarque que la rupture au milieu de la longueur de la poutre correspond à l'endroit du moment maximum. On peut alors estimer la répartition des contraintes normales ( $\sigma_{xx}$ ) dans la hauteur de la poutre :

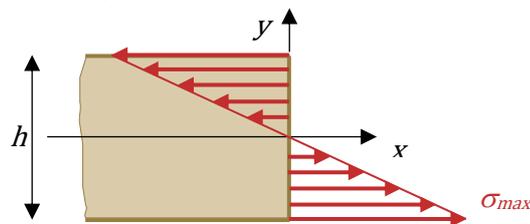


Figure 3 : Contraintes dans la section courante

La contrainte normale dans la section s'exprime par :  $\sigma_{xx} = \frac{-Mf_z}{I_{Gz}} y$

La contrainte en traction est maximale pour  $y = \frac{-h}{2}$  et pour  $x = \frac{L}{2}$ , le moment quadratique d'une section rectangulaire est  $I_{Gz} = \frac{bh^3}{12}$ , où  $b$  est la largeur selon l'axe  $z$  et  $h$  la hauteur selon l'axe  $y$ , on obtient donc une contrainte normale maximale :

$$\sigma_{max} = \frac{\frac{FL}{4}}{\frac{bh^3}{12}} \frac{h}{2} = \frac{3 FL}{2 bh^2}$$

L'effort maximal supporté par le bâtonnet peut être défini comme l'effort qui entraîne une contrainte dans le matériau égale à la contrainte de rupture, notée ici  $\sigma_{rupt}$ , cette dernière dépendant du matériau bois utilisé. On a donc :

$$\sigma_{rupt} = \frac{3 F_{max} L}{2 b h^2} \rightarrow F_{max} = \frac{2 b h^2}{3 L} \sigma_{rupt}$$

## 2 – Cas avec deux bâtonnets superposés – axe faible

### 2.1 - Non collés

On se place au milieu de la longueur du bâtonnet où le moment est maximal. On fait l'hypothèse d'une répartition uniforme de l'effort sur les bâtonnets, autrement dit chaque bâtonnet reçoit la moitié de l'effort appliqué, le moment maximal sur chaque bâtonnet devient  $\frac{FL}{4}$ , le moment quadratique reste  $I_{Gz} = \frac{be^3}{12}$ ,  $e$  étant l'épaisseur des bâtonnets.



Figure 4 : Schéma des deux bâtonnets superposés non collés et répartition des contraintes normales dans la section centrale

La contrainte normale maximale est donc :

$$\sigma_{max} = \frac{\frac{F}{2} L}{\frac{be^3}{12} \cdot 2} = \frac{3 FL}{4 be^2}$$

### 2.2 - Collés

Les deux bâtonnets se comportent alors comme un seul d'épaisseur  $2e$ , de moment quadratique  $I_{Gz} = \frac{b(2e)^3}{12}$ . Au milieu de la longueur du bâtonnet, le moment maximal est  $\frac{FL}{4}$ .

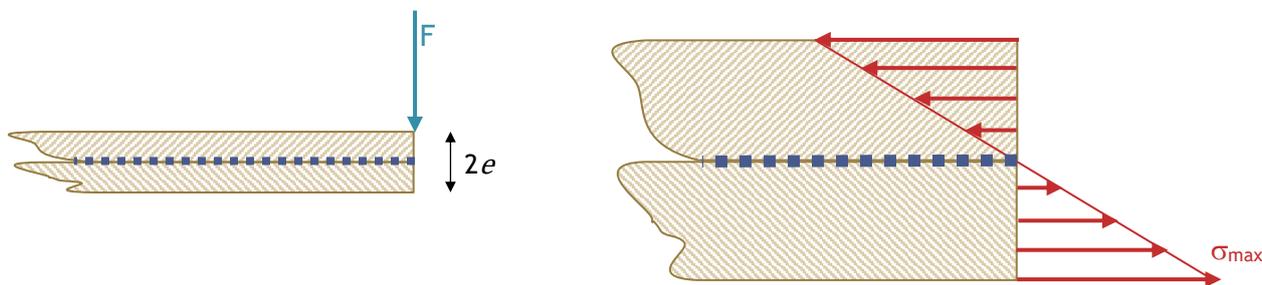


Figure 5 : Schéma des deux bâtonnets superposés collés et répartition des contraintes normales dans la section centrale

La contrainte normale maximale est donc :

$$\sigma_{max} = \frac{\frac{FL}{4}}{\frac{b(2e)^3}{12}} = \frac{3 FL}{8 be^2}$$

## 2.3 - Comparaison

L'effort maximal supporté par les deux bâtonnets (collés ou non) peut se calculer pour la contrainte de rupture. La contrainte de rupture est évidemment la même pour les deux cas, puisque dépendante du matériau bois.

On a donc pour les deux bâtonnets non collés :

$$\sigma_{rupt} = \frac{3 F_{max} L}{4 b e^2} \rightarrow F_{max} = \frac{4 b e^2}{3 L} \sigma_{rupt}$$

Et pour les deux bâtonnets collés :

$$\sigma_{max} = \frac{3 F L}{8 b e^2} \rightarrow F_{max} = \frac{8 b e^2}{3 L} \sigma_{rupt}$$

On remarque là aisément que les bâtonnets collés supportent un effort maximal deux fois plus important que les bâtonnets non collés.

## 3 – Cas avec trois bâtonnets superposés – axe faible

### 3.1 - Non collés

On se place au milieu de la longueur du bâtonnet où le moment est maximal. On fait l'hypothèse d'une répartition uniforme de l'effort sur les bâtonnets, autrement dit chaque bâtonnet reçoit un tiers de l'effort appliqué, le moment maximal sur chaque bâtonnet devient  $\frac{F L}{4}$ , le moment quadratique reste  $I_{Gz} = \frac{b e^3}{12}$ ,  $e$  étant l'épaisseur des bâtonnets.

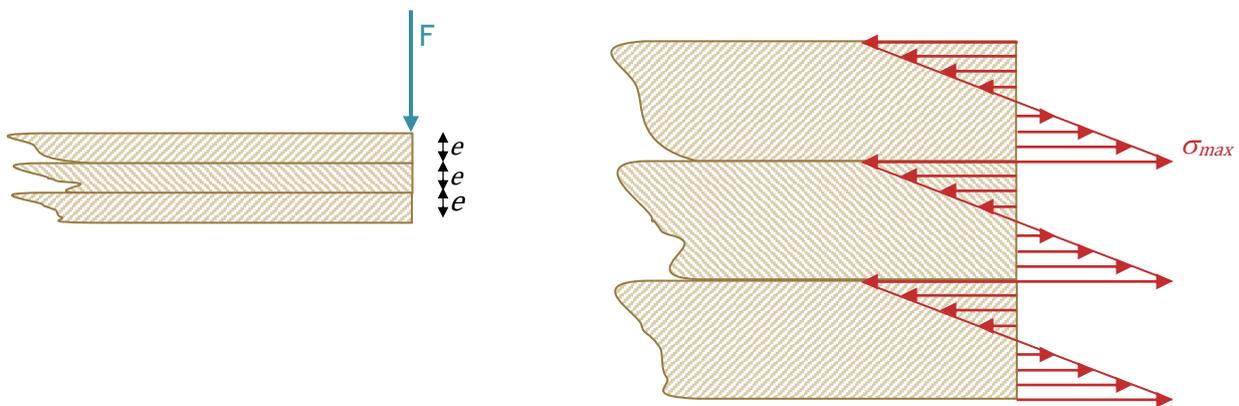


Figure 6 : Schéma des trois bâtonnets superposés non collés et répartition des contraintes normales dans la section centrale

La contrainte normale maximale est donc :

$$\sigma_{max} = \frac{\frac{F}{3} L}{\frac{b e^3}{12}} \frac{1}{2} = \frac{1 F L}{2 b e^2}$$

### 3.2 - Collés

Les trois bâtonnets se comportent alors comme un seul d'épaisseur  $3e$ , de moment quadratique  $I_{Gz} = \frac{b(3e)^3}{12}$ . Au milieu de la longueur du bâtonnet, le moment maximal est  $\frac{F L}{4}$ .

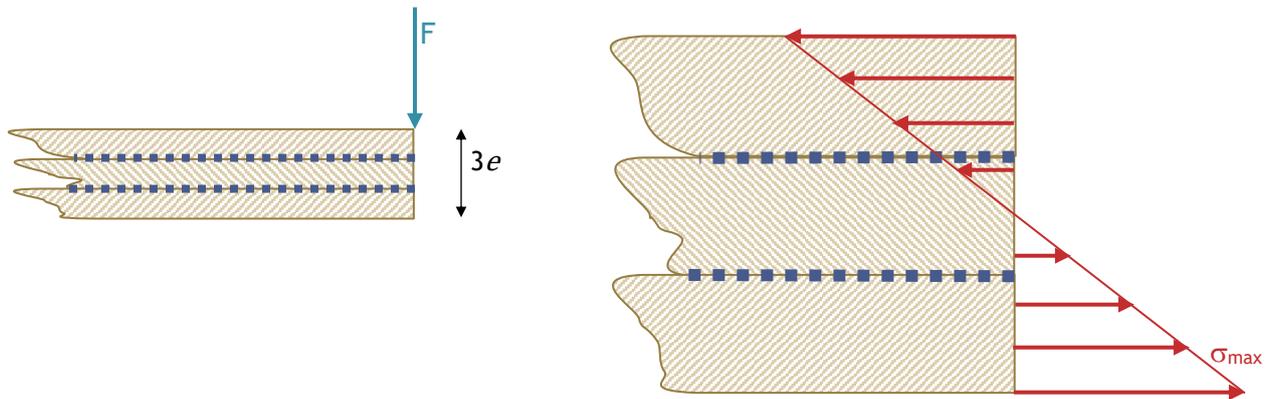


Figure 7 : Schéma des trois bâtonnets superposés collés et répartition des contraintes normales dans la section centrale

La contrainte normale maximale est donc :

$$\sigma_{max} = \frac{\frac{FL}{4}}{\frac{b(3e)^3}{12}} \frac{3e}{2} = \frac{1}{6} \frac{FL}{be^2}$$

### 3.3 - Comparaison

Comme dans les cas de deux bâtonnets, l'effort maximal supporté par les trois bâtonnets (collés ou non) se calcule pour la contrainte de rupture qui est toujours identique puisque dépendante du matériau bois.

On a donc pour les trois bâtonnets non collés :

$$\sigma_{rupt} = \frac{1}{2} \frac{FL}{be^2} \rightarrow F_{max} = 2 \frac{be^2}{L} \sigma_{rupt}$$

Et pour les trois bâtonnets collés :

$$\sigma_{max} = \frac{1}{6} \frac{FL}{be^2} \rightarrow F_{max} = 6 \frac{be^2}{L} \sigma_{rupt}$$

On remarque là aisément que les trois bâtonnets collés supportent un effort maximal trois fois plus important que les deux bâtonnets non collés.

## 4 – Généralisation avec n bâtonnets – axe faible

### 4.1 - Non collés

Reprenons les trois formes de l'effort maximal pour les trois cas examinés :

Nombre de bâtonnets non collés	1	2	3
Effort maximal : $F_{max}$	$\frac{2}{3} \frac{be^2}{L} \sigma_{rupt}$	$\frac{8}{3} \frac{be^2}{L} \sigma_{rupt}$	$2 \frac{be^2}{L} \sigma_{rupt}$

On remarque que l'effort maximal peut s'écrire sous la forme, avec  $n$  le nombre de bâtonnets :

$$F_{max} = \left[ \frac{2}{3} \frac{be^2}{L} \sigma_{rupt} \right] \times n$$

## 4.2 - Collés

Reprenons les trois formes de l'effort maximal pour les trois cas examinés :

Nombre de bâtonnets collés	1	2	3
Effort maximal : $F_{max}$	$\frac{2 be^2}{3 L} \sigma_{rupt}$	$\frac{4 be^2}{3 L} \sigma_{rupt}$	$6 \frac{be^2}{L} \sigma_{rupt}$

On remarque que l'effort maximal peut s'écrire sous la forme, avec  $n$  le nombre de bâtonnets :

$$F_{max} = \left[ \frac{2 be^2}{3 L} \sigma_{rupt} \right] \times n^2$$

## 5 – Généralisation avec n bâtonnets – axe fort

Que les bâtonnets soient collés ou non collés, la configuration n'est en rien modifiée. Seule la valeur de la largeur changera avec le nombre de bâtonnets. Aussi l'effort maximal gardera la même forme que dans le cas d'un seul bâtonnet :

$$F_{max} = \frac{2 bh^2}{3 L} \sigma_{rupt}$$

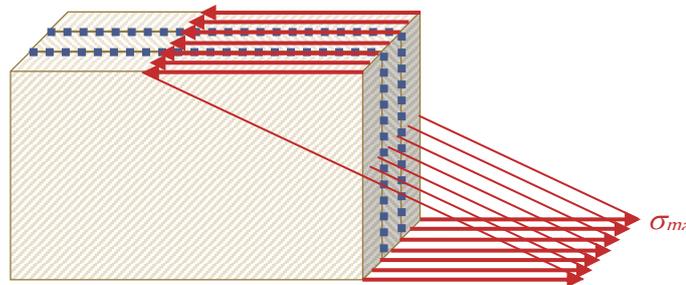


Figure 8 : Schéma des trois bâtonnets collés et répartition des contraintes normales dans la section centrale

Cela ne correspond pas à la tendance obtenue par les résultats expérimentaux que l'on peut retrouver dans la ressource « *Expérimenter la RdM avec le banc 3R Bed100 : Caractérisation d'assemblages sollicités en flexion (bâtonnets bois)* » [1]. Notons que la figure 9 montre une forte dispersion des résultats pour les bâtonnets non collés due au phénomène de déversement (voir encart page suivante).

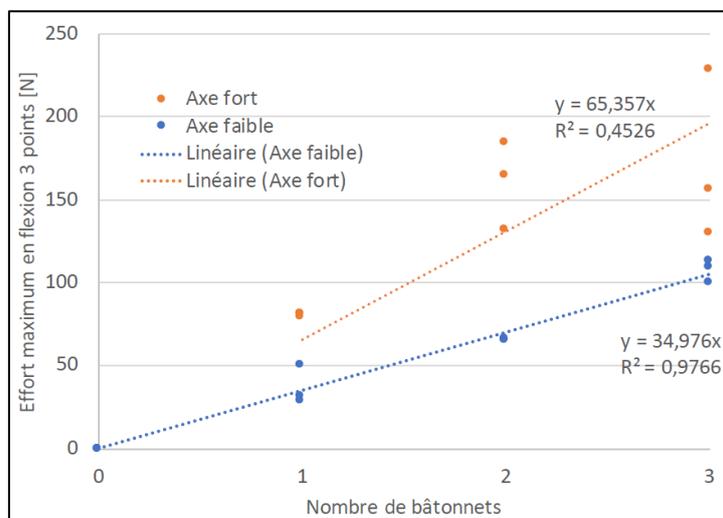


Figure 9 : Bilan des efforts maximums lors de la sollicitation en flexion selon les axes faible (bleu) et fort (orange) des bâtonnets non collés

Le déversement est une instabilité structurelle due à un mouvement hors plan lors d'une sollicitation en flexion. Théoriquement les efforts externes à la poutre (effort du vérin et réactions des appuis) et le centre de rigidité<sup>1</sup> sont dans le même plan. Ce mouvement est la conséquence d'une sortie de plan d'un des efforts ou du centre.

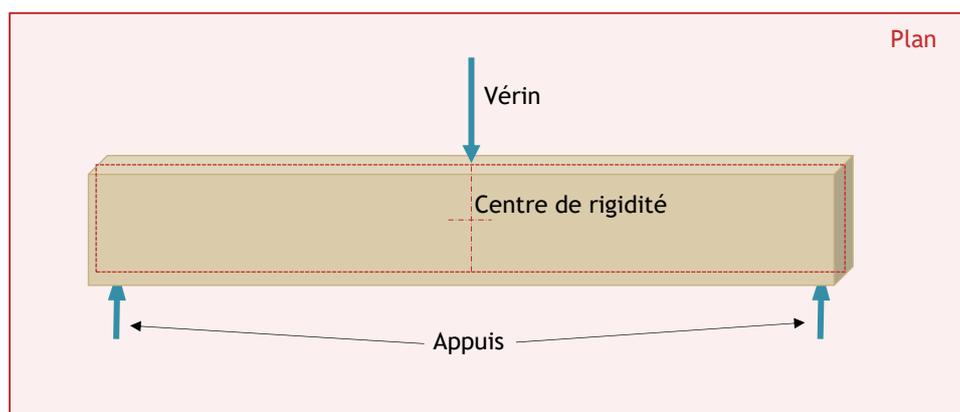


Figure 10 : Schématisation théorique du positionnement des trois efforts externes à la poutre et du centre de rigidité dans un même plan

## 6 – Comparaisons effort maximal collé/ non collé

### 6.1 - Axe faible

Comparons l'effort maximal théorique des bâtonnets collés et l'effort maximal théorique des bâtonnets non collés pour des sollicitations suivant l'axe faible, et traçons la courbe en fonction du nombre de bâtonnets mis en jeu (courbe orange figure 11). On note que  $F_{max}(collés)/F_{max}(non\ collés)$  est proportionnel au nombre de bâtonnets :

$$\frac{F_{max}(collés)}{F_{max}(non\ collés)} = \frac{\left[ \frac{2}{3} \frac{be^2}{L} \sigma_{rupt} \right] \times n^2}{\left[ \frac{2}{3} \frac{be^2}{L} \sigma_{rupt} \right] \times n} = n$$

Le même tracé est réalisé avec l'effort maximal expérimental moyen (courbe bleue figure 37) déterminé avec les essais que l'on peut retrouver dans la ressource « Expérimenter la RdM avec le banc 3R Bed100 : Caractérisation d'assemblages sollicités en flexion (bâtonnets bois) » [1].

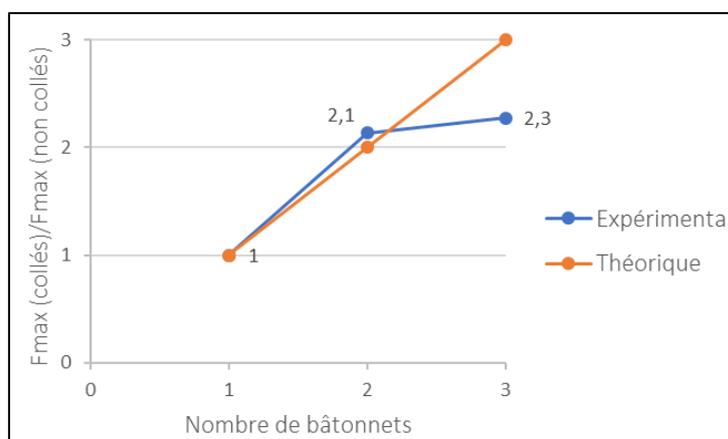


Figure 11 :  $F_{max}(collés)/F_{max}(non\ collés)$  en fonction du nombre de bâtonnets selon axe faible : théorique et expérimental

<sup>1</sup> Centre de rigidité : est le barycentre géométrique pondéré par le module d'élasticité. Dans le cas d'un matériau homogène, il est confondu avec le centre de gravité (comme représenté figure 10).

La tendance n'est pas tout à fait celle attendue, trois essais ne suffisent pas à obtenir une moyenne suffisamment fiable sur un matériau avec autant de variabilité que le bois. Il est donc important d'utiliser le quantile inférieur à 5% dans les dimensionnements (voir la ressource « *Caractérisation de la variabilité de la résistance en traction de bâtonnets en bois* » [2]).

## 6.1 - Axe fort

La même comparaison est effectuée avec l'effort maximal théorique des bâtonnets collés et l'effort maximal théorique des bâtonnets non collés pour des sollicitations suivant l'axe fort (courbe orange figure 12). On note que  $F_{max} (collés)/F_{max} (non collés)$  est toujours égale à 1 quelque soit le nombre de bâtonnets.

Le même tracé est réalisé avec l'effort maximal expérimental moyen (courbe bleue figure 38) déterminé avec les essais que l'on peut retrouver dans la ressource « *Expérimenter la RdM avec le banc 3R Bed100 : Caractérisation d'assemblages sollicités en flexion (bâtonnets bois)* » [1].

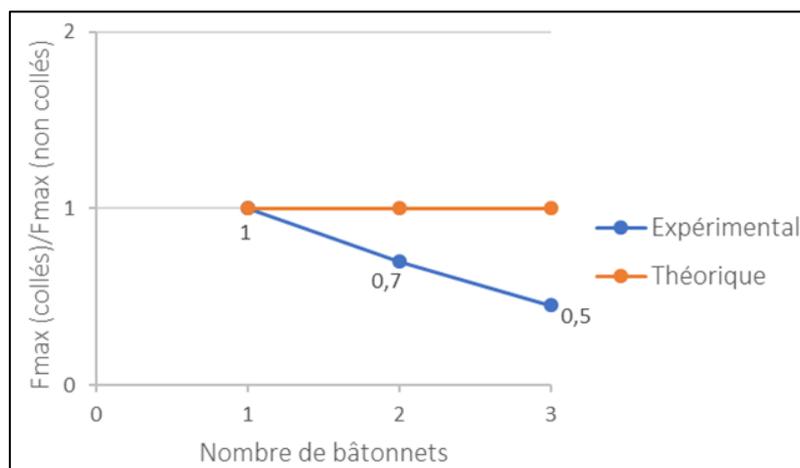


Figure 12 :  $F_{max} (collés)/F_{max} (non collés)$  en fonction du nombre de bâtonnets selon axe fort : théorique et expérimental

Comme pour les poutres sollicitées selon leur axes faibles, la tendance n'est pas tout à fait celle attendue, trois essais ne suffisent toujours pas à obtenir une moyenne suffisamment fiable sur un matériau avec autant de variabilité que le bois, d'où l'importance d'utiliser le quantile inférieur à 5% dans les dimensionnements (voir la ressource « *Caractérisation de la variabilité de la résistance en traction de bâtonnets en bois* » [2]).

## 7 – Conclusion

L'exploitation de ces résultats souligne l'importance des essais qui peuvent mettre en défaut des théories. Le fait de supposer la géométrie et le chargement « parfaits » ne nous permet pas de faire apparaître le phénomène de déversement. Ce phénomène d'instabilité n'a pas été étudié théoriquement ici mais ce phénomène se montre facilement expérimentalement comme nous avons pu le voir dans la ressource « *Expérimenter la RdM avec le banc 3R Bed100 : Caractérisation d'assemblages sollicités en flexion (bâtonnets bois)* » [1].

Les phénomènes d'instabilité (flambement, déversement) peuvent être démontrés avec la théorie des poutres toujours en hypothèse des petites perturbations mais en prenant en compte des imperfections géométriques. À ce sujet, on pourra consulter la ressource « *Move Your Bridge 2.0 : Modélisation* » [3].

## Références :

- [1]: Expérimenter la RdM avec le banc 3R Bed100 : Caractérisation d'assemblages sollicités en flexion (bâtonnets bois) X. Jourdain, H. Horsin Molinaro, [https://eduscol.education.fr/sti/si-ens-paris-saclay/ressources\\_pedagogiques/experimenter-la-rdm-banc-3rbed100-caracterisation-dassemblages-sollicites-en-flexion](https://eduscol.education.fr/sti/si-ens-paris-saclay/ressources_pedagogiques/experimenter-la-rdm-banc-3rbed100-caracterisation-dassemblages-sollicites-en-flexion)
- [2]: Caractérisation de la variabilité de la résistance en traction de bâtonnets en bois, X. Jourdain, H. Horsin Molinaro, [https://eduscol.education.fr/sti/si-ens-paris-saclay/ressources\\_pedagogiques/caracterisation-dela-variabilite-en-traction-de-batonnets-en-bois](https://eduscol.education.fr/sti/si-ens-paris-saclay/ressources_pedagogiques/caracterisation-dela-variabilite-en-traction-de-batonnets-en-bois)
- [3]: Move Your Bridge 2.0 : Modélisation, C. Desodt, X. Jourdain, M. Poncelet; H. Horsin Molinaro, [https://eduscol.education.fr/sti/si-ens-paris-saclay/ressources\\_pedagogiques/move-your-bridge-2-modelisation](https://eduscol.education.fr/sti/si-ens-paris-saclay/ressources_pedagogiques/move-your-bridge-2-modelisation)