

# Étude théorique d'une poutre en flexion 4 points

Cette ressource expose l'étude théorique du comportement d'une poutre mise en flexion 4 points. La ressource « *Cassage d'une poutre en béton armé* » [1] présente l'essai de flexion menant à la ruine la poutre réalisée précédemment (voir ressource « *Fabrication d'une poutre en béton armé* » [2]). Ces ressources sont issues de séances de travaux pratiques de génie civil réalisés en formation SAPHIRE, première année commune des trois départements des Sciences de l'Ingénieur de l'ENS Paris-Saclay.

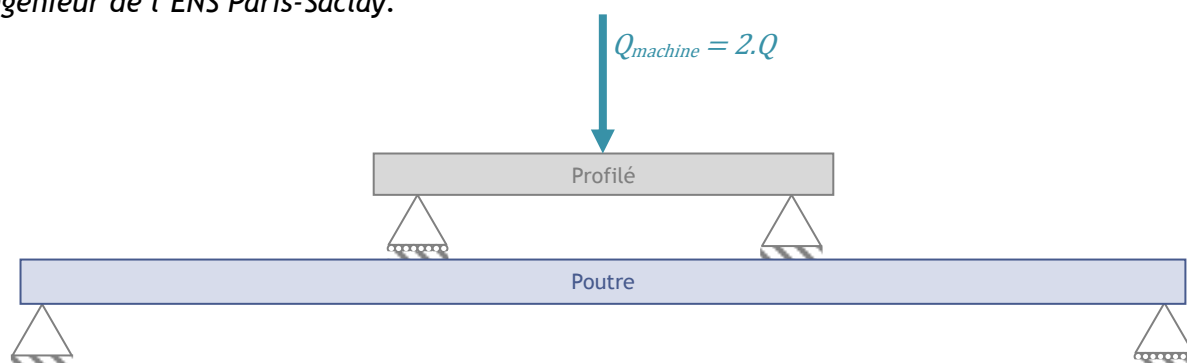


Figure 1 : Modélisation de la poutre en flexion 4 points

## 1 - Hypothèses

Afin de réaliser l'étude théorique du comportement de la poutre à la ruine, les hypothèses suivantes sont considérées :

- les effets de fluage sont négligés, la poutre n'ayant été soumise à aucun chargement depuis sa fabrication. Le coefficient de fluage  $\rho_{ef}$  sera donc considéré comme nul ;
- la section est considérée comme non fissurée pour le calcul du moment critique ;
- pour le calcul du moment de ruine, la fibre supérieure est considérée soumise à une déformation correspondant au pivot B, soit  $\varepsilon_{b,sup} = \varepsilon_{cu} = 3,5 \text{ ‰}$  ;
- utilisation du modèle de comportement parabole rectangle pour le béton ;
- le comportement de l'acier est considéré comme élasto-plastique parfait.

## 2 - Détermination du moment critique de première fissuration

### 2.1 - Définition

Dans un premier temps sont déterminés le moment critique de première fissuration  $M_{cr}$ , ainsi que l'effort  $Q_{cr}$  à appliquer sur la poutre pour y parvenir.

On définit la contrainte  $\sigma$  générée dans la section de la poutre par l'expression suivante :

$$\sigma(y, z) = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_{Gz}} \cdot y + \frac{M_y}{I_{Gy}} \cdot z \quad (1)$$

Avec  $N$  l'effort normal appliqué sur la section [N],  $A$  l'aire de la section [m<sup>2</sup>],  $M_z$  le moment autour de l'axe (0z) [N.m],  $M_y$  le moment autour de l'axe (0y) [N.m],  $I_{Gz}$  le moment quadratique au centre de gravité de la poutre par rapport à l'axe (0z) [m<sup>4</sup>],  $I_{Gy}$  le moment quadratique au centre de gravité de la poutre par rapport à l'axe (0y) [m<sup>4</sup>].

La poutre est sollicitée en flexion pure sur  $x \in [L/3 ; 2.L/3]$ , intervalle où le moment est maximal, par conséquent :

$$N = 0 \text{ et } M_y = 0$$

On obtient donc :

$$\sigma(y) = -\frac{M_z}{I_{Gz}} \cdot y \quad (2)$$

La poutre étudiée est en béton armé, il est donc également nécessaire de prendre en compte les sections d'acier en homogénéisant la section ; le repère est placé au niveau de la position du centre élastique  $d_E$  (figure 2), que l'on définira à partir de la fibre inférieure de la section (fibre tendue). Sachant que la première fissure sera localisée au niveau de la fibre tendue, on recherche donc  $\sigma(y = d_E)$ .

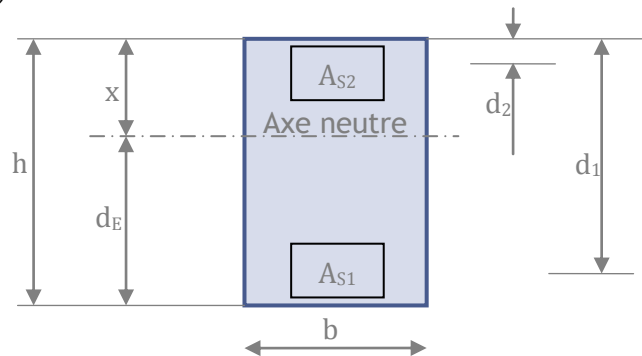


Figure 2 : Position de l'axe neutre

Il y a fissuration si la contrainte au niveau de la fibre tendue devient supérieure à la résistance en traction  $f_{ctm}$  du béton. On recherche alors  $M_z = M_{cr}$  tel que  $\sigma(y = -d_E) = f_{ctm}$ .

D'après les hypothèses précédemment énoncées, on considère que la section n'est pas fissurée ; on considère donc pour le calcul, le moment quadratique  $I_I$  de la section homogénéisée non fissurée. On obtient finalement :

$$M_{cr} = \frac{f_{ctm} \cdot I_{Gz}}{d_E} \quad (3)$$

## 2.2 - Détermination de l'aire homogénéisée

Considérons une section d'acier  $A_S$  soumise à un effort  $F$ , et de module d'élasticité  $E_S$ . Le principe de l'homogénéisation est de remplacer cette section d'acier  $A_S$  par une section équivalente de béton  $A_{C,éq}$ , de module d'élasticité  $E_{c,eff}$  (module d'élasticité prenant en compte le fluage), capable de reprendre le même effort.

De plus, on considère que la section d'acier est soumise à la même déformation que la section de béton, soit :  $\varepsilon_S = \varepsilon_C$

On obtient alors, d'après la loi de Hooke<sup>1</sup> :

$$\frac{\sigma_S}{E_S} = \frac{\sigma_C}{E_{c,eff}}$$

Sachant que :

$$\sigma_S = \frac{F}{A_C} \text{ et } \sigma_C = \frac{F}{A_{C,éq}}$$

<sup>1</sup> Du nom de Robert Hooke (1635-1703) scientifique britannique

On obtient finalement : 
$$A_{C,éq} = \frac{E_S}{E_{C,eff}} \cdot A_S = \alpha_E \cdot A_S$$

Soit : 
$$\alpha_E = \frac{E_S}{E_{C,eff}} \quad \text{et} \quad E_{C,eff} = \frac{E_{cm}}{1+\varphi_{ef}} \quad (4) \text{ et } (5)$$

Or, d'après les hypothèses formulées,  $\varphi_{ef} = 0$  ; on obtient donc :

$$\alpha_E = \frac{E_S}{E_{cm}}$$

L'aire de la section homogénéisée  $A_H$  reprenant des efforts s'exprime alors d'après la relation suivante :

$$\begin{aligned} A_H &= A_C + \alpha_E \cdot (A_{S1} + A_{S2}) \\ A_H &= b \cdot h + (\alpha_E - 1) (A_{S1} + A_{S2}) \end{aligned} \quad (6)$$

### 2.3 - Détermination de la position du centre élastique

La position du centre élastique par rapport à  $y$  est définie comme étant la somme des moments statiques divisée par la section homogénéisée. L'axe de référence pour le calcul des moments statiques est choisi comme étant l'axe passant au niveau de la fibre supérieure (figure 2). La position de l'axe neutre est alors définie par la relation suivante :

$$d_E = \frac{\sum S^{t/z}}{A_H}$$

Soit : 
$$d_E = \frac{\frac{b \cdot h^2}{2} + A_{S1} \cdot (h - d_1) + A_{S2} \cdot (h - d_2)}{b \cdot h + (\alpha_E - 1) \cdot (A_{S1} + A_{S2})} \quad (7)$$

### 2.4 - Détermination du moment quadratique de la section homogénéisée

Dans le cas où la section n'est pas fissurée, il est nécessaire de calculer le moment quadratique de la totalité de la section homogénéisée  $I_I$ , par rapport à la position de l'axe neutre. Afin de simplifier le calcul, les moments quadratiques des sections d'aciers  $A_{S1}$  et  $A_{S2}$  ne seront pas pris en compte, car négligeables devant celui de la section de béton. Par contre, on appliquera le théorème du transfert aux sections d'aciers. On obtient alors, en appliquant le théorème de Huygens<sup>2</sup> :

$$I_I = \frac{b \cdot h^3}{12} + b \cdot h \cdot \left(d_E - \frac{h}{2}\right)^2 + \alpha_E [A_{S1} \cdot (d_1 - X)^2 + A_{S2} \cdot (d_2 - X)^2] \quad (8)$$

Avec  $X = h - d_E$

### 2.5 - Calcul du moment critique de fissuration

Par les essais sur éprouvettes (voir ressource « *Essais destructifs sur éprouvettes en béton et acier d'armature* » [3], sont connus :  $E_{cm} = 41$  GPa,  $E_S = 237$  GPa,  $f_{ctm} = 3,2$  MPa.

Les caractéristiques de la poutre sont (figure 3) :  $b = 15$  cm,  $h = 22$  cm,  $A_{S1} = 101$  mm<sup>2</sup>,  $A_{S2} = 402$  mm<sup>2</sup>,  $d_1 = 19,1$  cm,  $d_2 = 2,5$  cm,  $L = 3$  m (voir ressource « *Fabrication d'une poutre en béton armé* » [2] et « *Annexe : Plan de ferrailage d'une poutre en béton armé* »).

<sup>2</sup> Du nom de Christiaan Huygens (1629-1695) mathématicien, astronome et physicien néerlandais

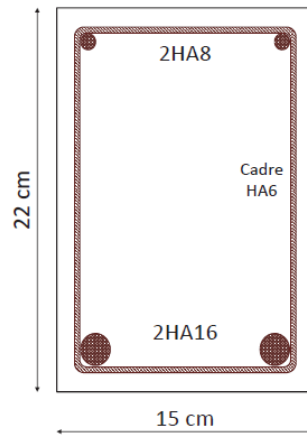


Figure 3 : Section la poutre expérimentale

On obtient :  $\alpha_E = 5,78$ ,  $A_H = 354 \text{ cm}^2$ ,  $d_E = 108 \text{ mm}$ ,  $X = 112 \text{ mm}$ ,  $I_I = 1,52 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$

Soit :  $M_{cr} = 4,52 \text{ kN.m}$

## 2.6 - Identification de la charge correspondant à la première fissuration $Q_{cr}$

Le moment maximale causé par le chargement de la poutre s'exprime par :

$$M_{max,chargement} = \frac{Q \cdot L}{3}$$

Le moment maximal causé par le poids propre s'exprime par :

$$M_{max,poids} = \frac{p_p \cdot L^2}{8} = \frac{(\rho_b \cdot g \cdot b \cdot h) \cdot L^2}{8}$$

Le moment maximal à la fissuration s'exprime alors par :

$$M_{cr} = \frac{Q_{cr} \cdot L}{3} + \rho_b \cdot g \cdot \frac{b \cdot h \cdot L^2}{8}$$

Soit :  $F_{cr} = \frac{3}{L} \left( M_{cr} - \rho_b \cdot g \cdot \frac{b \cdot h \cdot L^2}{8} \right)$  (9)

Pour  $\rho_b = 2500 \text{ kg.m}^{-3}$  et  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ ,  $F_{cr} = 3,59 \text{ kN}$ .

Or, le chargement de la machine s'exprime par  $Q_{M,cr} = 2 \cdot Q$ , la première fissure devrait donc apparaître pour un chargement de la machine :  $F_M = 7,19 \text{ kN}$ .

## 2.7 - Évaluation de la flèche maximale

La flèche maximale due au chargement de la machine s'exprime par la relation suivante :

$$f_{max,chargement} = -\frac{23}{648} \cdot \frac{QL^3}{E_{cm} \cdot I_I}$$

La flèche maximale due au poids propre de la poutre s'exprime par :

$$f_{max,poids} = -\frac{5}{384} \cdot \frac{p_p \cdot L^4}{E_{cm} \cdot I_I} = -\frac{5}{384} \cdot \frac{\rho_b \cdot g \cdot h \cdot b \cdot L^4}{E_{cm} \cdot I_I}$$

Soit :

$$f_{max} = -\left( \frac{23}{648} \cdot \frac{Q \cdot L^3}{E_{cm} \cdot I_I} + \frac{5}{384} \cdot \frac{\rho_b \cdot g \cdot h \cdot b \cdot L^4}{E_{cm} \cdot I_I} \right)$$
 (10)

Pour  $Q = Q_{cr}$ ,  $f_{cr,max} = -692 \mu\text{m}$

À noter que lors de l'expérimentation, la flèche due au poids propre ne sera pas mesurée. En effet, le capteur LVDT sera paramétré de telle manière qu'à l'instant initial, soit au moment où la poutre est déjà soumise à son poids propre, la flèche soit nulle. Nous allons donc uniquement mesurer la flèche causée par le chargement de la poutre, soit :

$$f_{cr,chargement} = -552 \mu\text{m}$$

## 2.8 - Profils des déformations et des contraintes sur la hauteur de la section

Pour étudier les résultats expérimentaux de l'extensomètre, le profil théorique des déformations au sein de la section doit être déterminé ; il est linéaire en phase élastique, et se présente sous la forme suivante :

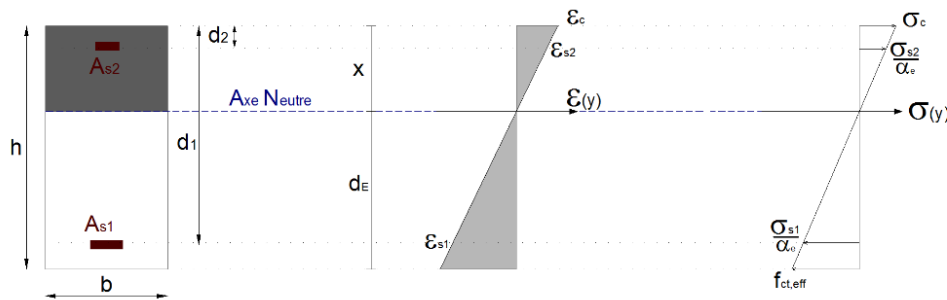


Figure 4 : Allure des profils des contraintes et des déformations dans la section en phase élastique

Lorsqu'apparaît la fissuration, la contrainte au niveau de la fibre tendue est égale à  $f_{ctm} = 3,2 \text{ MPa}$ , et celle au niveau de l'axe neutre à la position  $d_E$  est nulle. L'expression des contraintes dans la section en est alors déduite :

$$\sigma(y) = f_{ctm} \cdot \left(1 - \frac{y}{d_E}\right)$$

Avec  $y \in [0 ; h]$

On en déduit alors, d'après la loi de Hooke :

$$\epsilon(y) = \frac{f_{ctm}}{E_{cm}} \cdot \left(1 - \frac{y}{d_E}\right)$$

Avec  $y \in [0 ; h]$

On utilise ici le module d'élasticité du béton car la section a été homogénéisée par rapport à ce matériau. On obtient alors les tracés suivants (figures 5 et 6) :

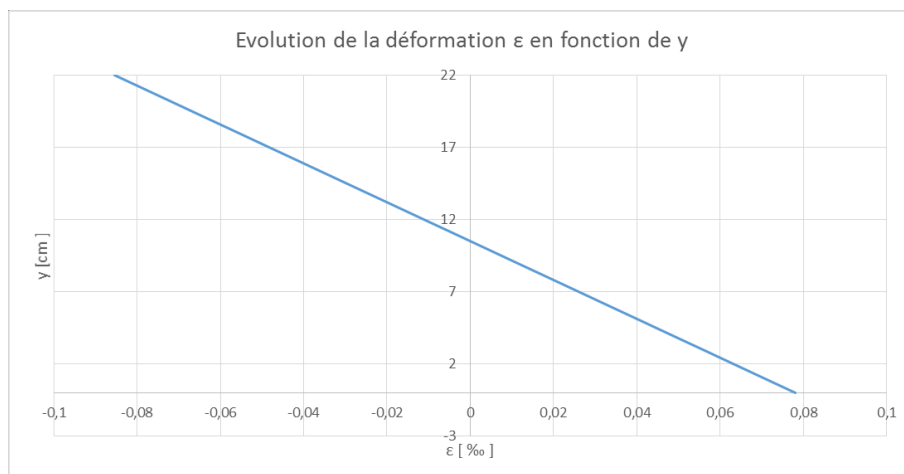


Figure 5 : Allure théorique du profil des déformations lors de la première fissuration

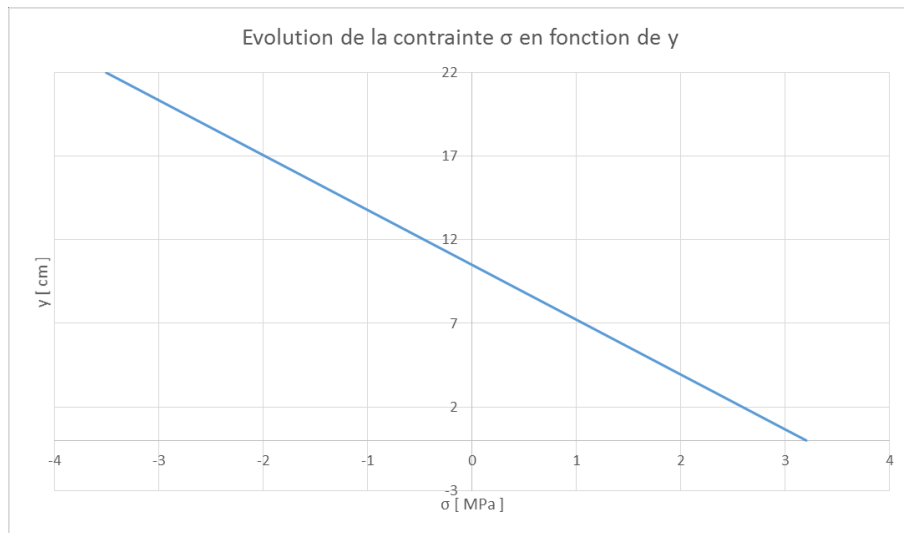


Figure 6 : Allure théorique du profil des contraintes lors de la première fissuration

### 3 – Moment de ruine $M_{ru}$

Pour déterminer le moment de ruine  $M_{ru}$  de la poutre, on considère que la ruine est atteinte lorsque la déformation de la fibre supérieure de la poutre atteint la valeur de 3,5 ‰ : une rupture du béton sur la fibre comprimée est donc observée.

Afin de modéliser le comportement du béton, le diagramme de contraintes parabol rectangle est utilisé (figure 7).

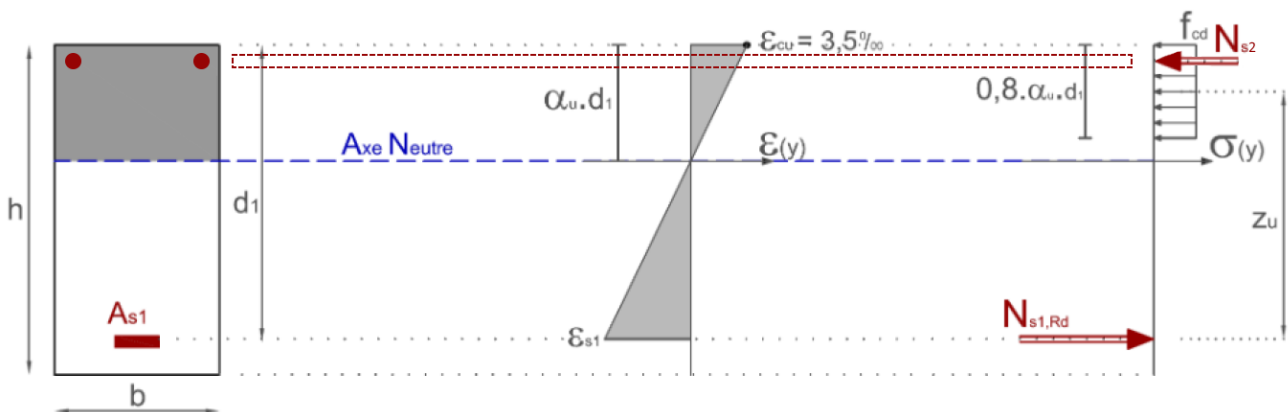


Figure 7 : Équilibre de la section en pivot B

#### 3.1 - Détermination de $\alpha_u$

Le coefficient  $\alpha_u$  caractéristique de la section comprimée est déterminé en réalisant l'équilibre des efforts normaux appliqués sur la section :

$$\sum N = f_{cm} \cdot b \cdot 0,8 \cdot \alpha_u \cdot d_1 + A_{S2} \cdot \sigma_{S2} - A_{S1} \cdot \sigma_{S1} = 0$$

La détermination de  $\alpha_u$  nécessite un calcul itératif puisque nous ne connaissons pas, a priori, les contraintes dans les aciers. On initialise ces itérations en considérant que les armatures supérieures et inférieures plastifient, c'est-à-dire en considérant :  $\sigma_{S1} = \sigma_{S2} = f_{ym}$ .

*Remarque* : On considère  $f_{ym}$  et  $f_{cm}$ , et non pas  $f_{yd}$  et  $f_{cd}$ , dans tous les calculs car nous sommes en phase d'étude du comportement réel de la structure. Nous ne sommes pas en effet, dans une phase de projet et dimensionnement pour laquelle il faudrait prendre en compte  $f_{yd}$  et  $f_{cd}$ .

Soit :

$$\alpha_u = \frac{(A_{S1} - A_{S2}) \cdot f_{ym}}{b \cdot 0,8 \cdot d_1 \cdot f_{cm}} \quad (11)$$

À partir du diagramme des déformations de la figure 8, et en appliquant le théorème de Thalès, on peut déterminer les déformations dans les armatures :

- Pour les armatures inférieures :  $\varepsilon_{S1} = \varepsilon_{cu} \frac{d_1 - \alpha_u d_1}{\alpha_u d_1} = \varepsilon_{cu} \frac{d_1 - \alpha_u}{\alpha_u} = 11,2\text{‰} > 2,3\text{‰}$  qui est la limite considérée pour la plastification des aciers. Donc on a bien plastification des armatures inférieures, ce qui est recherché en béton armé.
- Pour les armatures supérieures :  $\varepsilon_{S2} = \varepsilon_{cu} \frac{\alpha_u d_1 - d_2}{\alpha_u d_1} = \varepsilon_{cu} \left(1 - \frac{d_2}{\alpha_u d_1}\right) = 1,58\text{‰} < 2,3\text{‰}$ , donc les armatures supérieures ne plastifient pas et l'hypothèse faite est fautive. On détermine alors la contrainte dans les armatures supérieures :  $\sigma_{S2} = E_{sm} \varepsilon_{S2} = 373 \text{ MPa}$ .

On réitère alors jusqu'à la convergence de la contrainte dans les aciers des armatures supérieures en réalisant les calculs suivants :

1.  $\alpha_u = \frac{(A_{S1} \cdot f_{ym} - A_{S2} \cdot \sigma_{S2})}{b \cdot 0,8 \cdot d_1 \cdot f_{cm}}$
2.  $\varepsilon_{S1} = \varepsilon_{cu} \frac{1 - \alpha_u}{\alpha_u}$
3.  $\varepsilon_{S2} = \varepsilon_{cu} \left(1 - \frac{d_2}{\alpha_u d_1}\right)$
4.  $\sigma_{S2} = E_{sm} \varepsilon_{S2}$

Ce qui donne les résultats du tableau 1 :

N° Itération	$\alpha_u$ [MPa]	$\varepsilon_{S1}$ [‰]	$\varepsilon_{S2}$ [‰]	$\sigma_{S2}$ [MPa]
1	0,238	11,2	1,58	373
2	0,265	9,72	1,77	419
3	0,258	10,1	1,73	409
4	0,260	9,98	1,74	411
5	0,259	10,0	1,73	411

Tableau 1 : Détermination des contraintes dans les aciers d'armature

On a donc bien plastification des aciers des armatures inférieures mais pas des aciers des armatures supérieures.

### 3.2 - Détermination du moment résistant $M_{ru}$ de la section

On détermine le moment résistant  $M_{ru}$  en appliquant l'équilibre des moments par rapport au centre de gravité des aciers tendus.

On obtient alors :

$$\sum M = 0,8 \cdot \alpha_u \cdot d_1^2 \cdot b \cdot f_{cm} (1 - 0,4 \cdot \alpha_u) + A_{S2} \cdot \sigma_{S2} \cdot (d_1 - d_2) - M_{ru} = 0$$

Soit : 
$$M_{ru} = 0,8 \cdot \alpha_u \cdot d_1^2 \cdot b \cdot f_{cm} (1 - 0,4 \cdot \alpha_u) + A_{S2} \cdot \sigma_{S2} \cdot (d_1 - d_2) \quad (12)$$

À la ruine, en fibre supérieure, la déformation du béton est égale à  $\varepsilon_{cu} = 3,5 \text{‰}$ , et elle est nulle au niveau de l'axe neutre, à la position  $\alpha_u \cdot d_1$  depuis la fibre supérieure (figure 8).

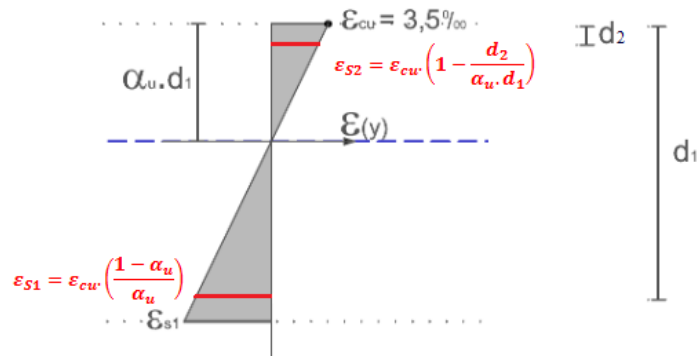


Figure 8 : Expression des déformations des sections d'acier

Soit :  $\sigma_{S2} = 411 \text{ MPa} < f_{ym} = 561 \text{ MPa}$  et  $M_{ru} = 38,4 \text{ kN.m}$ .

Les aciers comprimés ne plastifient pas d'après les hypothèses de calcul à la ruine.

### 3.3 - Détermination de la charge $Q_{ru}$ menant la poutre à la ruine

$$Q_{ru} = \frac{3}{L} \cdot \left( M_{ru} - \rho_b \cdot g \cdot \frac{b \cdot h \cdot L^2}{8} \right) \quad (13)$$

Soit :  $Q_{ru} = 37,5 \text{ kN}$        $Q_{\text{machine},ru} = 74,9 \text{ kN}$

### 3.4 - Profil des déformations sur la hauteur de la section à la ruine

La déformation évolue linéairement sur la hauteur de la section (figure 8), avec pour valeur en fibre supérieure  $\epsilon_{cu} = 3,5 \text{ ‰}$ , et s'annule au niveau de l'axe neutre, situé à la distance  $\alpha_u \cdot d_1$  de la fibre comprimée.

La déformation par rapport à la hauteur de la section en est alors déduite (figure 9) :

$$\epsilon(y) = \epsilon_{cu} \left( 1 + \frac{y-h}{\alpha_u \cdot d_1} \right) \quad (14)$$

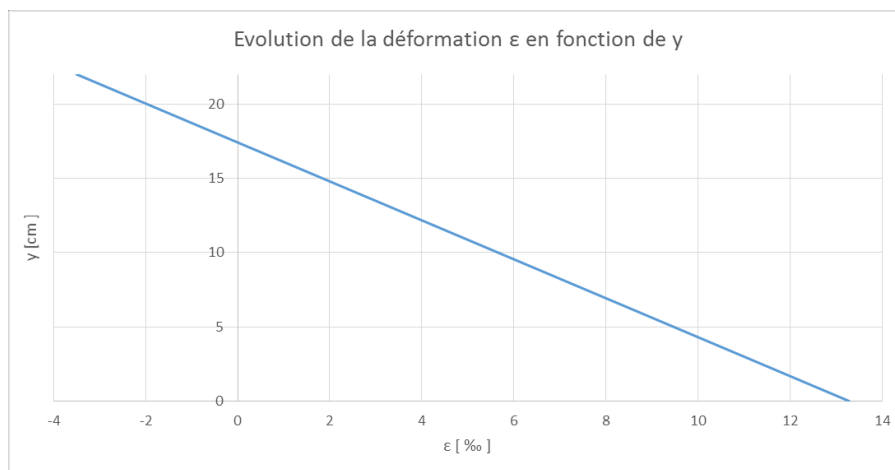


Figure 9 : Allure théorique du profil des déformations à l'état de ruine



## 4 – Détermination du moment maximal aux ELU avec prise en compte des coefficients en situation de projet

### 4.1 - Détermination des résistances caractéristiques des matériaux

En situation de projet, il est nécessaire de prendre en compte des coefficients de sécurité lors du calcul des résistances caractéristiques des matériaux ; il y a de possibles écarts entre la résistance obtenue et la résistance recherchée.

Soient  $f_{cd}$  et  $f_{yd}$  les résistances de calcul du béton et de l'acier utilisés pour le dimensionnement en phase projet. Les coefficients  $\gamma_c$  et  $\gamma_s$  s'appliquent pour le béton et pour l'acier à l'aide des relations suivantes :

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad \text{et} \quad f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \quad (15) \text{ et } (16)$$

Les coefficients de sécurité pour le béton et l'acier sont :  $\gamma_c = 1,5$  et  $\gamma_s = 1,15$

Avec les valeurs déterminées précédemment :  $f_{ck} = f_{cm} - 8(\text{MPa}) = 23 \text{ MPa}$  et  $f_{yk} = 500 \text{ MPa}$ ,

On obtient :  $f_{cd} = 15,3 \text{ MPa}$  et  $f_{yd} = 435 \text{ MPa}$

### 4.2 - Moment résistant à la ruine $M_{ru}$ , aux ELU

La démarche de calcul est la même que précédemment, cependant il est nécessaire de remplacer les résistances de calcul. On obtient ainsi :

$$\alpha_u = \frac{(A_{S1} - A_{S2}) \cdot f_{yd}}{b \cdot 0,8 \cdot d_1 \cdot f_{cd}}$$

$$M_{ru,ELU} = 0,8 \cdot \alpha_u \cdot d_1^2 \cdot b \cdot f_{cd} (1 - 0,4 \cdot \alpha_u) + A_{S2} \cdot \sigma_{S2} \cdot (d_1 - d_2)$$

Dans ce cas, on a alors :

- $\alpha_u = \frac{(A_{S1} \cdot f_{yd} - A_{S2} \cdot f_{yd})}{b \cdot 0,8 \cdot d_1 \cdot f_{cd}} = 0,373$
- $\varepsilon_{S1} = \varepsilon_{cu} \frac{1 - \alpha_u}{\alpha_u} = 5,89 \text{ ‰}$
- $\varepsilon_{S2} = \varepsilon_{cu} \left(1 - \frac{d_2}{\alpha_u d_1}\right) = 5,27 \text{ ‰}$
- $\sigma_{S2} = f_{yd}$

Cette fois, les aciers des armatures supérieures plastifient également, on a donc bien  $\sigma_{S2} = f_{yd}$  et les itérations sont inutiles.

Par conséquent :  $M_{ru,ELU} = 28,6 \text{ kN.m}$

### 4.3 - Détermination de la charge $Q_{ru,ELU}$

$$Q_{ru,ELU} = \frac{3}{L} \cdot \left( M_{ru,ELU} - 1,35 \cdot \rho_b \cdot g \cdot \frac{b \cdot h \cdot L^2}{8} \right) \quad (17)$$

On obtient alors :  $Q_{ru,ELU} = 27,6 \text{ kN}$  et  $Q_{machine,ru,ELU} = 55,3 \text{ kN}$

#### 4.4 - Profil des déformations sur la hauteur de la section à la ruine aux ELU

D'après la relation (14) le profil des déformations est le suivant :

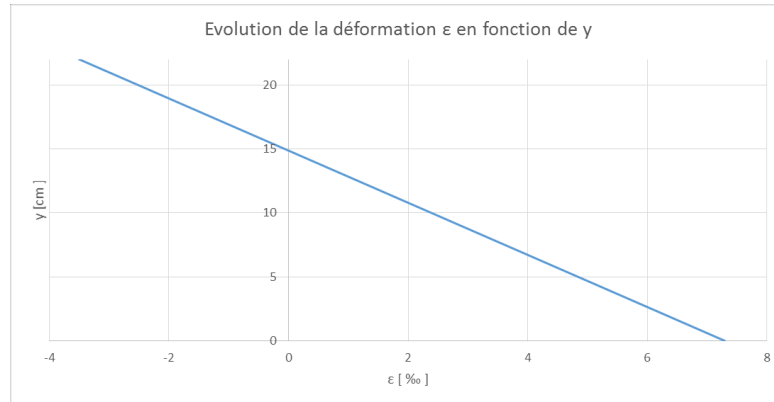


Figure 10 : Allure théorique du profil des déformations à l'état de ruine aux ELU

### 5 – Évolution de la flèche lors du chargement

Afin de pouvoir confronter la flèche aux mesures expérimentales, la flèche maximale à mi-travée  $f_{max}$  est exprimée en fonction du chargement de la presse ; l'inertie fissurée va ainsi intervenir.

#### 5.1 - Détermination de l'inertie fissurée $I_{II}$

On considère que la partie fissurée d'une section ne reprend plus d'effort, donc le béton considéré est celui uniquement en partie supérieure. L'inertie considérée pour le calcul de la flèche va alors diminuer. L'aire de la section homogénéisée s'exprime alors par la relation suivante :

$$A_H = b \cdot X + \alpha_E \cdot A_{S1} + (\alpha_E - 1) \cdot A_{S2} \quad (18)$$

Avec  $X = h - d_E$

On en déduit alors l'expression de la position de l'axe neutre :

$$d_E = \frac{b \cdot X \cdot \left(h - \frac{X}{2}\right) + \alpha_E \cdot A_{S1} \cdot (h - d_1) + \alpha_E \cdot A_{S2} \cdot (h - d_2)}{A_H} = h - X \quad (19)$$

La seule racine positive de l'équation est alors :

$$X = \frac{\alpha_E \cdot (A_{S1} + A_{S2})}{b} \cdot \left[ \sqrt{1 + \frac{2 \cdot b \cdot (A_{S1} \cdot d_1 + A_{S2} \cdot d_2)}{\alpha_E \cdot (A_{S1} + A_{S2})^2}} - 1 \right] \quad (20)$$

L'inertie fissurée s'exprime alors par :

$$I_{II} = \frac{b \cdot X^3}{12} + b \cdot X \cdot \left(\frac{X}{2}\right)^2 + \alpha_E \cdot A_{S1} \cdot (d_1 - X)^2 + \alpha_E \cdot A_{S2} \cdot (X - d_2)^2$$

Soit :  $X = 6,12 \text{ cm}$  et  $I_{II} = 5,14 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$

#### 5.2 - Expression de la flèche maximale en fonction du chargement de la presse

La flèche d'une section fissurée s'exprime par :

$$f = \zeta \cdot f_{II} + (1 - \zeta) \cdot f_I \quad (21)$$

Avec  $f$  la flèche moyenne calculée,  $f_I$  la flèche calculée pour une section non fissurée,  $f_{II}$  la flèche calculée pour une section fissurée,  $\zeta$  un coefficient de distribution prenant en compte la

contribution du béton tendu et  $M_{cr}$  le moment critique de fissuration, ainsi que la valeur du moment dans la section  $M$ .

$$\zeta = 1 - \beta \cdot \left( \frac{M_{cr}}{M} \right) \quad (22)$$

Avec  $\beta = 1$  pour un chargement de courte durée,  $\beta = 0,5$  pour un chargement de longue durée

Dans le cas du chargement par presse lors de l'expérimentation (voir ressource « *Cassage d'une poutre en béton armé* » [1]),  $\beta = 1$ . En prenant en compte, l'évolution de la flèche au cours du chargement devient :

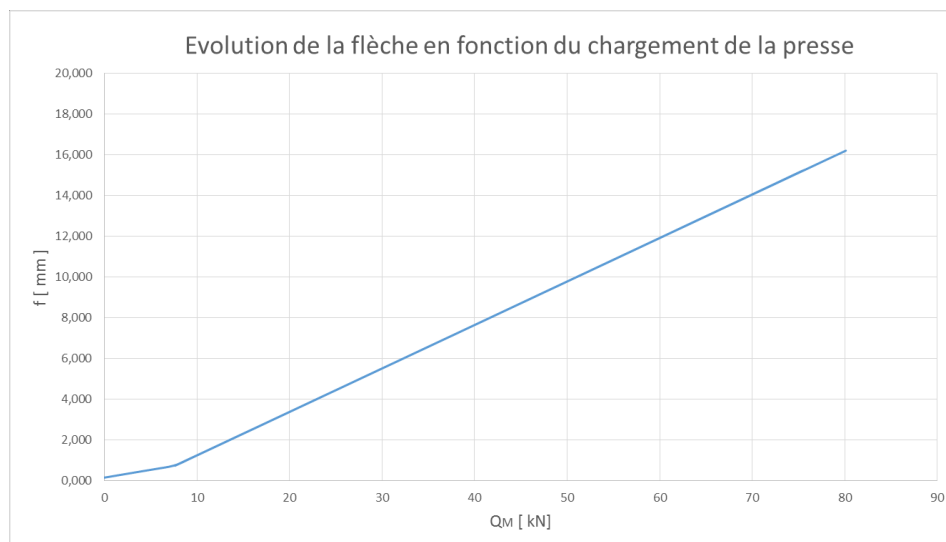


Figure 21 : Évolution de la flèche de la poutre en fonction du chargement de la presse

On identifie ainsi les flèches mesurées au cours du chargement lors de l'expérimentation :

$$f_0 = 139 \mu\text{m}, f_{cr} = 720 \mu\text{m}, f_{ru,ELU} = 11,1 \text{ mm}, f_{ru} = 15,2 \text{ mm}$$

Sachant que le capteur LVDT est remis à 0 au début de l'essai, les flèches qui devraient être théoriquement mesurées sont les suivantes :

$$f_{cr,LVDT} = 581 \mu\text{m}, f_{ru,ELU,LVDT} = 11,0 \text{ mm}, f_{ru,LVDT} = 15,1 \text{ mm}$$

## 6 – Synthèse des résultats

État	Première fissuration	Ruine	Ruine aux ELU
Moment maximal $M$ [kN.m]	3,59	38,4	28,6
Charge de la presse $Q_M$ [kN]	7,19	74,9	55,3
Flèche $f$ [mm]	0,692	5,9	4,39
Flèche LVDT $f_{LVDT}$ [mm]	0,552	5,76	4,25
Position de l'axe neutre $d_E$ [mm]	108	170	148
Déformation de la fibre supérieure $\varepsilon_{sup}$ [‰]	0,081	3,5	3,5
Déformation de la fibre inférieure $\varepsilon_{inf}$ [‰]	0,078	12,0	7,3

## Références :

[1]: Cassage d'une poutre en béton armé, A. Asselin, B. Bodnar, M. Briat, C. Chambeuil, X. Jourdain, H. Horsin Molinaro, [https://eduscol.education.fr/sti/si-ens-paris-saclay/ressources\\_pedagogiques/cassage-dune-poutre-en-beton-arme](https://eduscol.education.fr/sti/si-ens-paris-saclay/ressources_pedagogiques/cassage-dune-poutre-en-beton-arme)

[2]: Fabrication d'une poutre en béton armé, X. Jourdain, H. Horsin Molinaro, [http://eduscol.education.fr/sti/si-ens-paris-saclay/ressources\\_pedagogiques/fabrication-dune-poutre-en-beton-arme](http://eduscol.education.fr/sti/si-ens-paris-saclay/ressources_pedagogiques/fabrication-dune-poutre-en-beton-arme)

[3] : Essais destructifs sur éprouvettes en béton et acier d'armature, X. Jourdain, H. Horsin Molinaro, [https://eduscol.education.fr/sti/si-ens-paris-saclay/ressources\\_pedagogiques/essais-destructifs-sur-eprouvettes-en-beton-et-acier-darmature](https://eduscol.education.fr/sti/si-ens-paris-saclay/ressources_pedagogiques/essais-destructifs-sur-eprouvettes-en-beton-et-acier-darmature)

Ressource publiée sur Culture Sciences de l'Ingénieur : <http://eduscol.education.fr/sti/si-ens-paris-saclay>