

DÉFI SAPHIRE - MOVE YOUR BRIDGE
ANNÉE SCOLAIRE 2018 - 2019

Équipe Pont Pidur (**Vert**)



JULIEN LANGLOIS - LOUEN POTTIER
LÉO LOUISSERAND - RODRIGO YANEZ

Table des matières

1	Présentation et problématique	3
1.1	Contextualisation	3
1.2	État de l'art et choix	3
1.2.1	Pont levant en translation	4
1.2.2	Pont levant en rotation	4
1.2.3	Pont inspiré du <i>Lake Shore Drive Bridge</i>	4
1.2.4	Analyse géométrique du <i>LSDB</i>	5
1.3	Démarche de conception	5
2	Cinématique	6
2.1	Paramétrage	6
2.2	Loi géométrique	6
2.3	Lieu des solutions	7
3	Essais réalisés	8
3.1	Essai de traction	8
3.2	Essai de flexion trois points	8
3.3	Essai de flambage	9
3.4	Maquette de la soutenance intermédiaire	9
4	Structure	10
4.1	Structure du pont	10
4.1.1	Tablier	10
4.1.2	Suspentes	10
4.1.3	Portiques treillis	10
4.1.4	Butées transversales	10
5	Modélisation mécanique	12
5.1	Modèle poutre	12
5.2	Problème d'élasticité linéaire	12
5.3	Vérification de non-rupture	13
5.3.1	Conditions aux limites	13
5.3.2	Modèle poutre retenu	14
5.4	Résultats de simulation	14
6	Prise en compte du flambement global	15
6.1	Abandon de l'hypothèse de petits déplacements	15
6.2	Explication du flambement de la maquette intermédiaire	16
6.2.1	Résultats des simulations pour la maquette finale	16
6.3	Minimisation du flambement	17
7	Guidage, motorisation et énergie	18
7.1	Conception des liaisons pivots	18
7.2	Engrainement des pivots	18
7.3	Guidage du tablier	18
7.4	Motorisation	18
7.5	Minimisation de l'énergie nécessaire à l'ouverture-fermeture	18
7.5.1	Modélisation statique	19
7.5.2	Problème d'optimisation	19
7.5.3	Résultats	19
7.6	Contact électrique	20
8	Conclusion et perspectives	21
9	Annexe	22

1 Présentation et problématique

Le défi *Saphire Move Your Bridge* consiste à concevoir et réaliser un pont ferroviaire de 130.5 m de portée, à la fois mobile et éco-responsable. Le cahier des charges donné peut se résumer de la façon suivante :

- Minimisation de la quantité de matériaux nécessaire (en CO2 équivalent),
- Consommation d'énergie minimale lors d'un cycle d'ouverture/fermeture,
- Respect des contraintes géométriques des gabarits ferroviaire et fluviaux,
- Résister au passage d'un train (modélisé par un effort réparti)

On cherche donc à concevoir un pont mobile à la fois efficace, optimisé, éco-responsable et artistique.

1.1 Contextualisation

Le contexte de ce défi est le suivant : nous nous plaçons dans le rôle d'un cabinet d'architecte doublé d'un bureau d'étude, et nous sommes chargés de concevoir, de dimensionner et de construire à partir de bâtonnets une maquette à l'échelle 1/87 d'un pont levant d'une portée de 130m. Après une période d'un an représentant l'appel d'offre restreint, nous recevons une note à la manière de celles attribuées aux entreprises après un appel d'offre. En effet, nous avons reçu un cahier des charges précis et quantitatif.

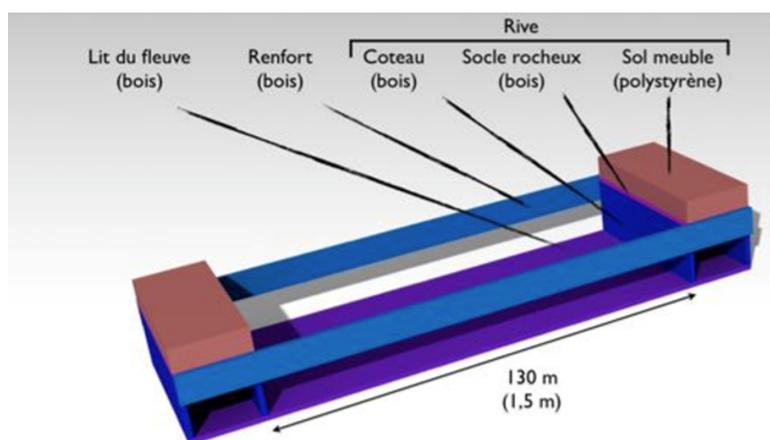


FIGURE 1 – Maquette servant de support pour le défi

Analyse du cahier des charges. Le cahier des charges comporte des critères impératifs ainsi que des critères graduels. Lorsqu'il est ouvert, notre pont devra nécessairement laisser passer des bateaux (passage de deux navires de classe *Post-Panamax* de front). En position fermée, il doit permettre de circuler à des péniches de gabarit *Freycinet*. Dans le cas contraire, nous ne pourrions prendre part à l'appel d'offre.

Les critères graduels couvrent plusieurs aspects de la conception et de la réalisation. Nous devons : minimiser le coût équivalent CO2 des matériaux utilisés (bois, colle et fil) ; optimiser la conception en rompant pour une force très légèrement supérieure aux passages concomitant de deux trains ; minimiser l'énergie consommée par un cycle d'ouverture ; ouvrir puis fermer notre pont le plus rapidement possible ; produire le pont le plus beau et le plus audacieux possible.

1.2 État de l'art et choix

Actuellement, il existe de nombreux types de ponts levant qui pourraient répondre au cahier des charges. Les plus utilisés sont le pont levant en translation (type *Chaban-Delmas* de Bordeaux) et le pont levant en rotation (type *Tower Bridge* de Londres).

FIGURE 2 – Pont *Chaban-Delmas* de Bordeaux

1.2.1 Pont levant en translation

Dans cette cinématique, le tablier est une poutre qui se lève verticalement, le long des pylônes sur les côtés. Il existe des ponts ferroviaires de ce type, par exemple le *Bridgewater Bridge* en Australie. Ce pont est le plus simple à réaliser : le tablier est guidé des deux côtés, les raccordements sont faits au niveau des glissières, là où la déformation est la plus faible, et les éléments sont rectilignes donc plus faciles à réaliser en bâtonnets.

1.2.2 Pont levant en rotation

FIGURE 3 – Pont *Tower Bridge* de Londres

Dans cette cinématique, le tablier est composé d'un ou deux tronçons se levant en tournant autour d'un axe le long des culées. Ce pont est plus difficile à réaliser, en effet, il présente plusieurs inconvénients : tout d'abord, une fois levées, les travées subissent une grande force due au vent, a fortiori si une unique travée compose le tablier. Ensuite, le raccordement se fait au milieu du pont, là où la flèche est la plus importante. Enfin, les efforts dans les pivots sont une contrainte supplémentaire.

1.2.3 Pont inspiré du *Lake Shore Drive Bridge*

Ces deux cinématiques représentent à elles seules la grande majorité des ponts mobiles. Pour plus d'originalité, nous avons choisi celle imaginée par l'architecte *Ross Barney* (www.r-barc.com). Ce pont, présenté en figures 20, 21 et 22, possède une cinématique originale qui n'a jamais été réalisée, ce qui complique grandement le questionnement de sa faisabilité. L'oeuvre porte le nom *Lake Shore Drive Bridge (LSDB)*.

De nombreuses caractéristiques du *Lake Shore Drive Bridge* sont néanmoins à revoir dans le cadre de ce défi, ce qui en fera un ouvrage totalement inédit. On peut citer : le *LSDB* est pensé pour le passage de piétons sur un tablier n'excédant pas une cinquantaine de mètre contrairement à notre pont qui doit faire passer un train de fret sur 130 mètres ; les câbles du *LSDB* sont directement raccordés à l'arche, de sorte que le tablier se segmente lors de l'ouverture du pont, ce qui n'est pas possible dans notre cas car cela complexifierait grandement le raccordement des rails.

1.2.4 Analyse géométrique du *LSDB*

La cinématique du *LSDB* repose sur une triangulation des câbles, qui, parce qu'ils sont de longueur constante, vont assurer la levée du tablier lorsque les arches effectuent un mouvement de rotation autour des quatre liaisons pivots, l'une à chaque pied d'arche (voir figures 21 et 22). L'un des avantages majeurs de ce système, comme nous allons le voir dans la section *Cinématique*, est que le tablier atteint une hauteur remplissant le cahier des charges pour un angle d'ouverture relativement faible (de l'ordre de 30 à 40 deg).

1.3 Démarche de conception

La difficulté de la conception réside dans le fait que toutes les parties du projet sont interdépendantes. La conception des treillis des différentes parties du pont dépend du choix des paramètres géométriques (hauteur des liaisons pivots, écart entre les liaisons pivots, largeur du tablier...), le choix de ces paramètres est appuyé par l'étude statique que nous allons mener afin de vérifier que le pont peut s'ouvrir suffisamment pour un couple moteur raisonnable, étude statique qui dépend de la répartition de masse des différentes parties du pont. Nous devons aussi concevoir les liaisons pivots entre les arches et les rives, concevoir un système d'entraînement des arches afin de garantir une ouverture égale des deux arches, réaliser le guidage du tablier dans la phase d'ouverture, et enfin assurer le contact électrique en position fermée, pour que le tronçon de rail puisse fournir de l'énergie électrique au train.

Ces choix de conceptions seront détaillés dans les parties dédiées.

2 Cinématique

La cinématique choisie nécessite de déterminer une loi entrée-sortie liant la hauteur du tablier et l'angle d'ouverture. On a commencé par poser le problème à l'aide d'un paramétrage du pont, puis après élaboration de ladite loi on a optimisé certaines grandeurs géométriques caractéristiques.

2.1 Paramétrage

Le paramétrage choisi est présenté en figure 4. On définit les paramètres cinématiques suivants :

- θ angle d'ouverture,
- h hauteur du tablier par rapport aux pivots
- D hauteur des arches
- d hauteur du tablier au repos,
- l largeur du tablier.

La hauteur h étant définie par rapport aux pivots, la hauteur du tablier par rapport à la berge est simplement $h - d$. La longueur de câble l_c est constante et vaut $l_c = l + D - d$.

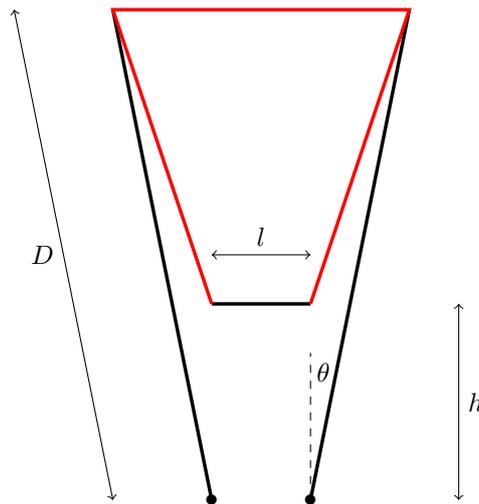


FIGURE 4 – Paramétrage du problème cinématique. Le câble, de longueur constante, est représenté en rouge

2.2 Loi géométrique

Par des arguments trigonométriques et en résolvant une équation du second degré, on montre que la loi cinématique *hauteur du tablier en fonction de l'angle d'ouverture* s'exprime analytiquement par la relation :

$$h(\theta) = D \cos \theta - \sqrt{(D - d)(D - 2D \sin \theta - d)} \quad (1)$$

On a tracé en figure 5 cette relation, qui est linéaire aux petits angles.

Il est intéressant de noter que cette loi est indépendante de la largeur du tablier l . De fait, ce paramètre n'intervient pas dans la cinématique et sa valeur sera donc déterminée à l'aide d'une autre étude. La loi (1) n'est valable que si $D - 2D \sin \theta - d > 0$, soit pour tout angle inférieur à θ_{lim} avec :

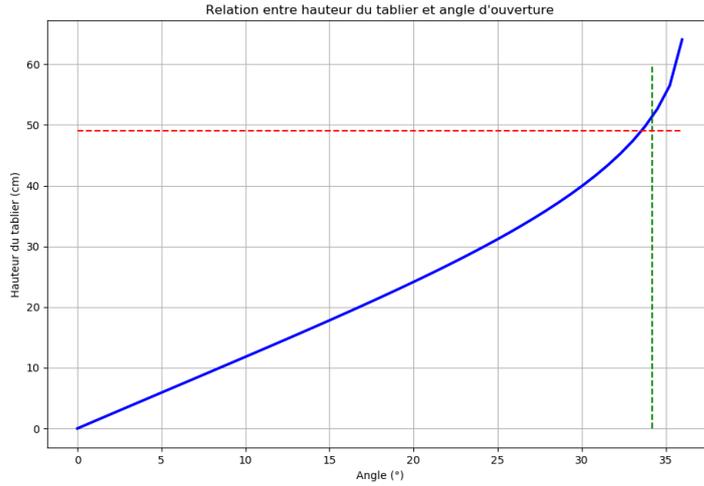


FIGURE 5 – Relation entre hauteur du tablier (par rapport à la berge) et angle d’ouverture pour le triplet (d, D, θ_{max}) choisi. La droite verte correspond à l’angle θ_{max} et la droite rouge à la hauteur demandée par le cahier des charges

$$\theta_{lim} = \arcsin\left(\frac{D-d}{2D}\right) \quad (2)$$

correspondant à l’angle tel que les câbles soient à l’horizontale (voir figure 23). Pour obtenir cette configuration on doit exercer un moment infini au niveau de l’axe des liaisons pivots, pour compenser la tension du câble \vec{F} :

$$\|\vec{F}\| = \frac{gM}{n \cos \theta} \xrightarrow{\theta \rightarrow \theta_{lim}} +\infty$$

avec M la masse totale et n le nombre de câbles. Pour éviter ce problème on ne cherchera pas à atteindre cet angle et on impose un angle maximal d’ouverture $\theta_{max} < \theta_{lim}$ dont la valeur sera choisie afin de garantir une tension acceptable dans le câble tout en garantissant l’ouverture suffisante du pont. Cette valeur est susceptible de varier par la suite quand on essaiera de minimiser le moment sur liaison pivot, mais on prendra comme ordre de grandeur :

$$\theta_{max} = 0.95 \theta_{lim} \quad (3)$$

2.3 Lieu des solutions

La hauteur d’ouverture du pont nécessaire pour répondre au cahier des charges étant fixée, la relation (1) devient une équation à deux variables (si on fixe d) que l’on cherche à optimiser :

$$\text{Cste} = x \cos y - \sqrt{(x-d)(x-2x \sin y - d)} \quad (4)$$

avec $x = D$ et $y = \theta_{max}$ et $\text{Cte} = 0.49 + d$. On cherche à minimiser x tout en s’assurant que y ne soit pas trop important. La figure 24 présente le lieu des solutions de cette équation pour trois valeurs de d différentes. A l’aide de la méthode de Newton, on réussit à optimiser le triplet (d, D, θ_{max}) :

$$(d, D, \theta_{max}) = (-18 \text{ cm}, 60 \text{ cm}, 38 \text{ deg})$$

La valeur de d est négative, ce qui signifie que les pivots se situent au dessus du niveau de la berge. Cette hauteur étant trop importante car elle nécessiterait une grande quantité de bois, nous avons opté pour un autre triplet intéressant et plus satisfaisant en terme de coût CO2 :

$$(d, D, \theta_{max}) = (-12 \text{ cm}, 65 \text{ cm}, 35 \text{ deg}) \quad (5)$$

3 Essais réalisés

Le cahier des charges nous demande d'avoir un pont supportant très légèrement plus que 941 N. La note croissant avec cette précision, il nous faut pouvoir prédire le comportement de notre maquette à l'aide d'une simulation numérique. Pour cela, nous avons besoin de connaître précisément les caractéristiques mécaniques de nos matériaux. Nous devons déterminer expérimentalement le module d'élasticité et la limite à rupture d'un bâtonnet en traction et en flexion, la charge critique de flambement d'un bâtonnet assemblé avec de la colle à bois ainsi que le module d'élasticité et le coefficient de fluage du fil. Nous avons à notre disposition une machine de traction/compression permettant de mesurer avec une bonne précision les paramètres mécaniques des bâtonnets. La démarche adaptée fut de réaliser un grand nombre d'essais, de les partager avec les autres groupes puis d'extraire les données comme en figure ??.

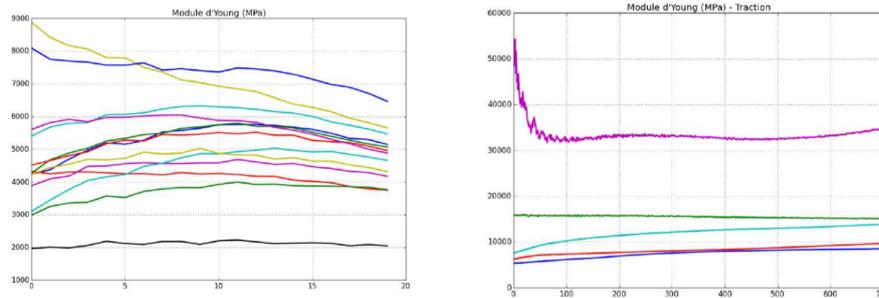


FIGURE 6 – Calcul du module d'Young à différents instants de temps pour tous les bâtonnets testés sur des essais de flexion et de traction

3.1 Essai de traction



FIGURE 7 – Schéma simplifié des essais de traction réalisés

On place notre bâtonnet dans la machine de traction. On impose un effort au niveau des mors et on relève la déformation dans le bâtonnet à l'aide d'un extensomètre. On obtient les résultats suivants :

- Moyenne : $E_{\text{moyen}} = 10780 \text{ MPa}$
- Ecart type : 3 200 MPa
- Limite à rupture : 83 MPa
- Ecart type : 10 MPa

3.2 Essai de flexion trois points

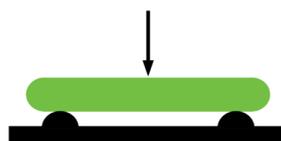


FIGURE 8 – Schéma simplifié des essais de flexion trois points réalisés

On applique une force ponctuelle au milieu du bâtonnet que l'on a posé sur deux cylindres métalliques fixes. On mesure le déplacement du point d'application de la force. On en déduit les résultats suivants :

- Moyenne : $E_{\text{moyen}} = 5040 \text{ MPa}$
- Ecart type : 1330 MPa

3.3 Essai de flambage

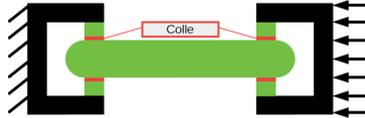


FIGURE 9 – Schéma simplifié des essais de flambage réalisés

La ruine d'un bâtonnet peut être provoquée par la rupture d'un bâtonnet en élasticité linéaire mais aussi par une instabilité. La charge critique F à partir de laquelle le flambage peut apparaître dépend des liaisons et est de la forme :

$$F = \pi^2 \frac{EI}{(\alpha L)^2}$$

On cherche à déterminer α pour nos liaisons, les autres paramètres étant connus (mesurables directement sur les bâtonnets pour la longueur L et le moment quadratique I ; obtenu expérimentalement pour le module d'Young E). on trouve après réalisation des essais de flambage :

$$\alpha = 0.71$$

3.4 Maquette de la soutenance intermédiaire

L'essai réalisé pour la soutenance intermédiaire fut déterminant pour valider le choix de notre pont. Les détails des résultats tirés de l'essai sont détaillés dans différentes sections du rapport. Les données brutes en effort/déformation ne sont cependant pas exploitables, tout comme l'enregistrement vidéo car l'application des charges par la machine de traction ne fut pas localisé sur la portion de tablier que l'on pensait.



FIGURE 10 – Essai réalisé en mont de la soutenance intermédiaire (le tablier faisait alors 50 cm de long)

4 Structure

4.1 Structure du pont

La solution que nous proposons pour répondre au cahier des charges est un pont qui ressemble à un bowstring mais qui ne travaille pas de la même manière : il est composé d'un tablier très léger, des suspentes et de quatre portiques treillis reliés transversalement (voir figures 25 et 26).

4.1.1 Tablier

Le tablier est composé de deux poutres longitudinales de deux bâtonnets d'épaisseur (placés verticalement) reliées entre elles par des poutres transversales d'un bâtonnet d'épaisseur (placé horizontalement) avec un espacement de 5 centimètres. Ces poutres transversales sont renforcées sur les points d'attache des câbles.

4.1.2 Suspentes

Cinq suspentes sont placées pour relier le tablier aux portiques. Elles sont attachées à la poutre longitudinale aval du tablier puis elles montent et passent au-dessus de la poutre inférieure du portique treillis intérieur côté aval, puis au-dessus de la poutre inférieure du portique treillis intérieur côté amont et descendent pour s'attacher à la poutre longitudinale en amont du tablier.

Ce montage permet d'assurer la cinématique du pont, comme il expliqué précédemment. Les câbles sont maintenues en place sur les poutre inférieures des portiques treillis par le système montré en figure 11.

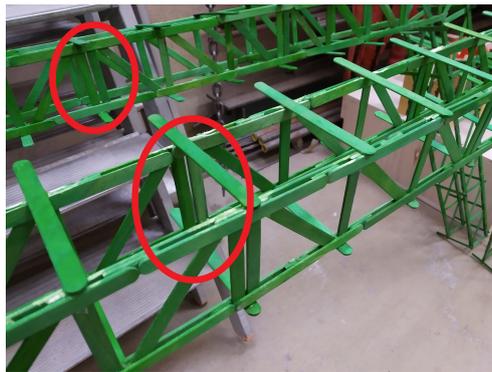


FIGURE 11 – Système de fixation des câbles aux poutres treillis

Les suspentes sont placées suivant X (axe défini en 26) au niveau des points d'application des forces pour l'essai à rupture qui tiendra lieu avant la soutenance finale de manière à éviter la flexion sur le tablier léger.

4.1.3 Portiques treillis

Les portiques treillis assurent le maintien du pont, ils doivent être capables de transmettre les charges des câbles aux systèmes d'appui sur les rives gauche et droite, ils sont composés d'une poutre supérieure et inférieure de 2 bâtonnets d'épaisseur (placés verticalement) espacées de 6.6 cm, des montants et des diagonales régulièrement espacés d'un bâtonnet d'épaisseur (placé verticalement).

Les deux portiques treillis côté aval sont reliés ensemble par des diagonales et des poutres transversales d'un bâtonnet d'épaisseur. Les deux portiques treillis côté amont sont reliés ensemble de la même manière.

4.1.4 Butées transversales

Pour que notre cinématique puisse fonctionner, on ne peut pas relier les portiques treillis intérieurs ensemble par des poutres encastées ou articulées car si c'était le cas ils ne pourraient pas tourner autour de l'axe de rotation et ainsi soulever le tablier. Cependant, il faut que ces portiques treillis soient reliés

mécaniquement pour assurer la stabilité mécanique du pont. Le système de butées transversales que nous avons choisi résout ce problème : des poutres transversales sont encastrées au portique treillis intérieur du côté amont au niveau de sa poutre inférieure et elles s'appuient contre la poutre inférieure du portique treillis intérieur du côté aval lors de la fermeture du pont. L'appui de ces poutres transversales est assuré par la force horizontale transmise par le câble comme il est montré sur la figure 27.

L'efficacité de ce système a été démontrée lors de l'essai à rupture fait lors de la soutenance intermédiaire. A cette occasion les portiques sont restés parallèles l'un à l'autre tout le long de l'essai, il n'y a pas eu d'écartement des butées transversales.

5 Modélisation mécanique

Nous allons dans cette partie mettre en oeuvre une modélisation mécanique du pont que nous allons construire.

5.1 Modèle poutre

L'élanement des bâtonnets étant assez grand, nous allons passer d'un problème de MMC 3D à un problème de MMC 1D en ne nous intéressant qu'aux déformations de la ligne moyenne des bâtonnets. Dans le cadre des petites perturbations, les équations de la théorie naturelle des poutres s'écrivent :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} N \\ T_y \\ T_z \\ M_t \\ M_{fy} \\ M_{fz} \end{pmatrix}}_{\mathcal{T}^{coh}} = \underbrace{\begin{pmatrix} ES & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu I_O & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & EI_y & EI_{yz} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & EI_{yz} & EI_z \end{pmatrix}}_{\mathcal{K}} \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \\ \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_z \end{pmatrix}}_{\mathcal{D}}$$

Ces équations peuvent être simplifiés en se plaçant dans les hypothèse d'Euler-Bernoulli (les sections restent parallèles à la ligne moyenne : $\gamma_x = \gamma_y = 0$), cette approximation n'est pas absurde pour les bâtonnets, mais elle est discutable dans le cas de poutres composées d'empilements de bâtonnets, on est à la limite de la validité de ce modèle. Nous comparerons les résultats obtenus avec les hypothèses de Timoshenko et d'Euler-Bernoulli et vérifierons si il est raisonnable de simplifier le problème.

5.2 Problème d'élasticité linéaire

Dans le cas le plus général, l'énergie de déformation d'une poutre s'écrit :

$$E_d(\mathcal{D}) = \frac{1}{2} \int_0^L (ES\gamma_x^2 + \mu S\gamma_y^2 + \mu S\gamma_z^2 + \mu I_O\chi_x^2 + ESI_y\chi_y^2 + ESI_z\chi_z^2) dS$$

Dans notre cas, cette énergie peut être calculée analytiquement en négligeant les forces de pesanteur s'exerçant sur chaque poutre devant les forces exercées aux noeuds. Pour cela, on se place dans le repère local d'une poutre, on calcule ses déplacements en tout point en fonction de l'effort appliqué aux noeuds, puis en fonction des déplacements aux noeuds. On obtient une expression explicite de l'énergie de déformation d'une poutre dans son repère local :

```
In [10]: Ed
Out[10]: (144E**3*Iy**2*Iz*ryA**2 - 288E**3*Iy**2*Iz*ryA*ryB + 144E**3*Iy**2*Iz*ryB**2 + 144E**3*Iy*Iz**2*rzA*rzB + 144E**3*Iy*Iz**2*rzB**2 + 144E**3*Iy*Iz*S*uxA*uxB + 144E**3*Iy*Iz*S*uxB**2 + 144E**2*Io*Iy*Iz*rxA*rxB**2 - 288E**2*Io*Iy*Iz*rxA*rxB**2 + 144E**2*Io*Iy*Iz*rxB**2 + 12E**2*Iy**2*L**2*S*ryA*ryB**2 - 24E**2*Iy**2*L**2*S*ryA*ryB**2 + 12E**2*Iy**2*L**2*S*ryB**2 + 48E**2*Iy*Iz*L**2*S*ryA**2 + 48E**2*Iy*Iz*L**2*S*ryB**2 + 48E**2*Iy*Iz*L**2*S*rzA*rzB**2 + 48E**2*Iy*Iz*L**2*S*rzB**2 - 144E**2*Iy*Iz*L**2*S*ryA*uzA**2 + 144E**2*Iy*Iz*L**2*S*ryA*uzB**2 - 144E**2*Iy*Iz*L**2*S*ryB*uzA**2 + 144E**2*Iy*Iz*L**2*S*ryB*uzB**2 + 144E**2*Iy*Iz*L**2*S*rzA*uyA**2 - 144E**2*Iy*Iz*L**2*S*rzA*uyB**2 + 144E**2*Iy*Iz*L**2*S*rzB*uyA**2 - 144E**2*Iy*Iz*L**2*S*rzB*uyB**2 + 144E**2*Iy*Iz*S*uyA*uyB**2 + 144E**2*Iy*Iz*S*uyB**2 + 144E**2*Iy*Iz*S*uzA*uzB**2 - 288E**2*Iy*Iz*S*uzB**2 + 144E**2*Iy*Iz*S*uzB**2 + 12E**2*Iy*L**2*S**2*uxA*uxB**2 + 12E**2*Iy*L**2*S**2*uxB**2 + 12E**2*Iz**2*L**2*S**2*rzA*rzB**2 - 24E**2*Iz**2*L**2*S**2*rzB**2 + 12E**2*Iz**2*L**2*S**2*uxA**2 + 12E**2*Iz**2*L**2*S**2*uxB**2 + 12E**2*Io*Iy*L**2*S*rxA*rxB**2 - 24E**2*Io*Iy*L**2*S*rxA*rxB**2 + 12E**2*Io*Iy*L**2*S*rxB**2 - 24E**2*Io*Iz*L**2*S*rzA*rzB**2 + 4E**2*Iy*L**4*S**2*ryA*ryB**2 + 4E**2*Iy*L**4*S**2*ryB*ryB**2 + 4E**2*Iy*L**4*S**2*ryA*uzA**2 + 4E**2*Iy*L**4*S**2*ryA*uzB**2 - 24E**2*Iy*L**4*S**2*ryB*uzA**2 + 4E**2*Iy*L**4*S**2*ryB*uzB**2 + 12E**2*Iy*L**4*S**2*rzA*uzA**2 + 12E**2*Iy*L**4*S**2*rzA*uzB**2 - 24E**2*Iz*L**4*S**2*rzA*uyA**2 + 12E**2*Iz*L**4*S**2*rzA*uyB**2 + 12E**2*Iz*L**4*S**2*rzB*uyA**2 + 12E**2*Iz*L**4*S**2*rzB*uyB**2 - 24E**2*Iz*L**4*S**2*rzB*uyB**2 + E*L**4*S**3*uxA**2*uy**2 - 2E*L**4*S**3*uxA*uxB**2 + E*L**4*S**3*uxB**2*uy**2 + Io*L**4*S**2*rxA**2*ry**3 - 2*Io*L**4*S**2*rxA*rxB**3 + Io*L**4*S**2*rxB**2*ry**3)/(2*L*(144E**2*Iy*Iz + 12E**2*Iy*L**2*S**2 + 12E**2*Iz*L**2*S**2 + L**4*S**2*uy**2))
```

FIGURE 12 – Énergie de déformation d'une poutre dans son repère local. Les calculs ont été fait formellement via sympy

Cette expression peut sembler complexe mais elle est en fait assez simple, il s'agit d'un polynôme de degré 2 en les composantes des déplacement nodaux.

On peut exprimer l'énergie de déformation de toute la structure en sommant simplement les énergies de déformation de chaque poutre. Pour exprimer l'énergie potentielle de la structure, il suffit de soustraire à E_d la somme des travaux extérieurs :

$$W_{ext} = \sum_{\text{point } P} \mathcal{F}_{ext \text{ en } P} \cdot U_P$$

(On fait l'hypothèse qu'il n'y a pas d'efforts répartis : on applique le chargement uniquement aux noeuds du treillis).

X	Charge
mm	N
0	0.000
345	58.813
585	117.625
835	117.625
1085	117.625
1325	58.813
1670	0.000

FIGURE 14 – On applique la charge N aux noeuds d’abscisse X sur la partie inférieure des arches.

Dans le modèle CAST3M, on applique les forces indiquées sur le tableau ci-dessus dans la direction verticale (suivant $-z$) et dans le sens horizontale (vers l’intérieur du pont) sur les points en rouge sur le schéma 28. Les appuis sont modélisés comme des articulations en trois dimensions (déplacements bloqués, rotations libres) sur les extrémités des poutres inférieures des portiques treillis intérieurs, montrés en orange sur le schéma 28

5.3.2 Modèle poutre retenu

Après plusieurs essais montrant seulement de légères différences entre les modèles de Timoshenko et d’Euler-Bernoulli au niveau de la répartition des contraintes, on décide de prendre ce dernier pour réduire le temps de calcul. La différence entre ces modèles est un peu plus élevée pour les déplacements, mais nous n’avons pas de contrainte sur ces derniers dans le cahier des charges et leur valeur nous intéresse finalement assez peu. Euler-Bernoulli sous-estime les déplacements par rapport à Timoshenko.

Les liaisons poutre-poutre sont modélisées comme des encastremets : dans la pratique elles sont faites avec de la colle qui pourrait être modélisée par une liaison élastique, mais les prédictions satisfaisantes du modèle avec des poutres encastrés lors de l’essai à rupture pendant la soutenance intermédiaire ainsi que des multiples essais réalisés par les différents groupes participant au même défi ont permis de démontrer que cette hypothèse est valide. Le *module d’Young moyen* utilisé pour les poutres est de 10.8 GPa et l’écart type est de 3.2 GPa. La *contrainte axiale à la rupture moyenne* utilisée pour les poutres est de 83.0 MPa et l’écart type est de 10.0 MPa.

5.4 Résultats de simulation

Nous avons réalisé plusieurs simulations avec une distribution aléatoire gaussienne des modules d’Young. Les contraintes axiales maximales (en traction) et minimales (en compression) sont égales à 27 MPa et -27 MPa. Le coefficient de sécurité par rapport à la contrainte en rupture des bâtonnets (de 83,0 MPa) est de 3,07. (voir figures 31, 32 et 33).

Nous pouvons donc être sûrs que la ruine de l’ouvrage n’aura pas lieu, du moins **sous l’hypothèse de petits déplacements**.

6 Prise en compte du flambement global

6.1 Abandon de l'hypothèse de petits déplacements

L'essai réalisé avant la soutenance intermédiaire nous a fait remarquer l'importance du phénomène de flambage d'ensemble pour la géométrie de notre pont. En effet, lors de cet essai, et avant rupture du pont, l'une des deux arches qui composait le pont a souffert d'un flambement hors plan visible à l'oeil nu. On est en fait sorti du cadre de validité de l'hypothèse des petites perturbations. Pour affiner notre modèle, nous devons nous affranchir de cette hypothèse : on fait maintenant l'hypothèse de déplacements modérés.

Par un raisonnement analogue à celui de la partie précédente, on peut montrer que le problème à résoudre pour calculer le déplacement de la structure se met sous la forme d'un système non linéaire de la forme :

$$KU + D(U)K_\sigma U = F$$

avec K la matrice de rigidité de la structure dont l'expression est la même que la partie précédente, K_σ la matrice de rigidité géométrique qui est obtenue en assemblant les matrices de rigidités géométriques élémentaires de chaque poutres, et $D(U)$ une matrice diagonale dont les coefficients dépendent non linéairement des coefficients de U . On pourrait résoudre cette équation avec une méthode de Newton, qui serait coûteuse en temps de calcul et dont la convergence ne serait pas assurée. On note U^* la solution exacte de ce problème.

On propose une méthode plus simple numériquement, qui n'implique pas le calcul de U^* : en exhibant une certaine suite de vecteurs qui converge vers U^* , on peut montrer que la solution en déplacement diverge lorsque la plus petite valeur propre du problème suivant est inférieure à 1 : $(K - \lambda K_\sigma)U = 0$. Le vecteur propre U_0 associé correspond à la "direction de flambement" : au fur et à mesure que l'on fait tendre la valeur propre vers 1, l'angle entre U^* et U_0 tend vers 0 et la norme de U^* tend vers l'infini.

Physiquement, ce qu'il se passe pour la structure est analogue au flambement d'une poutre : quand on dépasse la charge critique ($F_c/N < 1$) la poutre rompt en flambement. Le schéma suivant illustre ce phénomène :

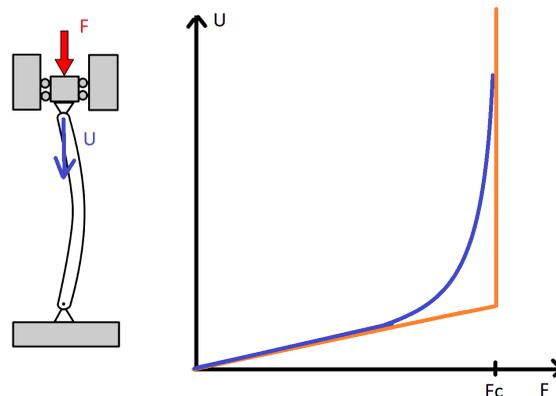


FIGURE 15 – Si on fait augmenter progressivement F en partant d'une valeur nulle, on observe au départ que le déplacement est proche de la solution du problème d'élasticité linéaire. Puis, au fur et à mesure que F se rapproche de F_c , U augmente plus vite que ce que le prédit l'élasticité linéaire. Enfin, lorsque F_c est dépassé, le déplacement diverge, il y a rupture.

Résoudre le problème $KU + D(U)K_\sigma U = F$ permettrait d'obtenir le déplacement prédit par la courbe en bleu, mais nous allons faire l'hypothèse qu'avant la charge critique, on peut assimiler le déplacement à la solution de $KU = F$. En résolvant le problème aux valeurs propres $(K - \lambda K_\sigma)X = 0$, on détermine si le déplacement est fini ou non. Notre modèle correspond en fait à la courbe en orange.

Limite du modèle : avec ce modèle, on sous-estime les déplacements et donc les contraintes lorsque la plus petite valeur propre du problème est proche de 1. Il pourrait y avoir rupture alors que ni l'élasticité linéaire ni le problème aux valeurs propres ne le prédisent. On prendra donc un coefficient de sécurité : la plus petite valeur propre du problème devra être supérieure à 1.25.

6.2 Explication du flambement de la maquette intermédiaire

On a créé un programme python orienté objet permettant de construire les matrices K et K_σ après avoir défini la structure et le chargement imposé. Le problème aux valeurs propres généralisé est résolu avec la méthode de la puissance inverse. Voici les résultats obtenus pour la maquette intermédiaire :

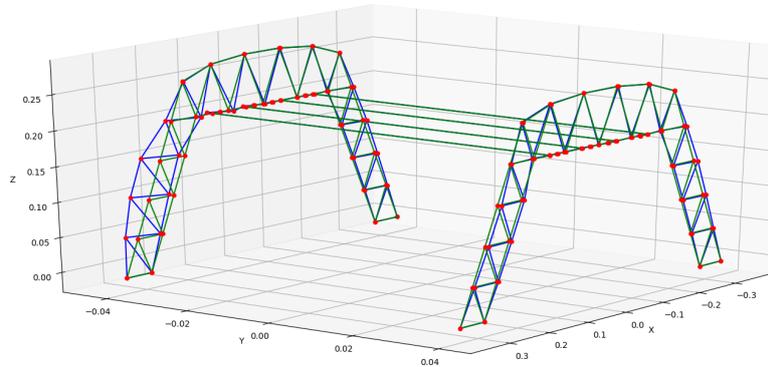


FIGURE 16 – Premier mode de flambement de la maquette intermédiaire, l'allure est proche de la déformée observée pendant l'expérience. Selon la distribution de module d'Young et la modélisation de l'effort sur les arches (c'est à dire en estimant la dissymétrie du chargement causée par les différences de longueurs des câbles), ce mode correspond à une valeur propre comprise entre 0.8 et 1.5 environ, on peut donc bien supposer que c'est cette instabilité qui aurait causée la rupture si l'essai n'avait pas été interrompu prématurément à cause de conditions de chargements que nous n'avions pas prévu (chargement sur les poutres transversales du tablier et pas sur les poutres longitudinales). Le pilier sur lequel apparaît le déplacement maximum dépend de la répartition de module d'Young, si elle est uniforme, le mode de flambement ne devient pas symétrique pour autant

Ce calcul peut aussi être fait avec la procédure **FLAMBAGE** du logiciel CAST3M.

Note : Nous ne sommes pas certains que CAST3M fait exactement les mêmes calculs que ceux explicités précédemment, mais les résultats obtenus sont presque identiques.

6.2.1 Résultats des simulations pour la maquette finale

En utilisant la procédure possède **FLAMBAGE** après avoir défini la structure, les conditions aux limites et le chargement unitaire donnés, on calcule le coefficient multiplicateur de ce chargement unitaire pour que la structure devienne instable.

Nous avons réalisé plusieurs simulations avec une distribution aléatoire gaussienne des modules d'Young et nous avons retenu la valeur moyenne du coefficient multiplicateur d'apparition de la première instabilité sans prendre en compte les cas extrêmes (pont trop résistant ou pont trop souple).

Le choix de prendre une valeur moyenne pour le dimensionnement du pont et non le fractil à 5% comme il est fait d'habitude dans le monde du génie civil s'explique par le caractère prédictif que doit avoir notre modèle. En effet, on ne cherche pas seulement que la charge de rupture soit supérieure à 941 N, mais plutôt à ce qu'elle soit supérieure et presque égale à 941 N. Le choix du fractil à 5% se montre trop sécuritaire pour les objectifs de ce projet.

On prédit ainsi une instabilité globale hors plan de la structure pour le chargement suivant :

X	Charge
mm	N
0	0.000
345	73,729
585	147,458
835	147,458
1085	147,458
1325	73,729
1670	0.000

FIGURE 17 – Chargements sur les noeuds de l’arche sur lesquels sont attachés des câbles

Les charges indiquées sur ce tableau sont à appliquer sur chaque poutre longitudinale du tablier, ce qui correspond à une charge appliquée par le vérin de 1179.664 N. La charge de rupture à viser étant de 941 N, le coefficient de sécurité de notre pont est de 1.25, comme souhaité. On trace en 29 le mode de flambement correspondant.

6.3 Minimisation du flambement

Pour notre géométrie de pont, le flambement est limitant. Nous avons choisi la géométrie du treillis pour tenter de minimiser la charge critique en instabilité tout en évitant un coût trop élevé en bâtonnets. Pour cela, nous avons dû abandonner la forme d’arche funiculaire que nous avons essayé d’approcher à la soutenance intermédiaire : plus l’arche était haute, plus la charge critique était faible. Cela explique notre choix d’arche droite. De plus, pour réduire la longueur de flambement, nous avons essayé de surélever au maximum l’axe des liaisons pivots. Avec le recul, nous pensons que ce choix n’était pas idéal car même s’il diminue l’instabilité, il augmente significativement le coût carbone (les supports des pivots étant réalisés en bois massif, nous aurions intérêt à les faire le plus petit possible). Finalement, le paramètre le plus influant sur l’instabilité est l’angle initial entre les arches : moins les arches sont parallèles, plus la structure est stable. Nous avons pris un angle le plus grand possible, limité par la place que nous devons laisser pour le système d’application du chargement. Dans la réalité, pour augmenter énormément la stabilité à moindre coût, nous ferions s’appuyer les arches directement l’une sur l’autre (donc sans les butées de la figure 27).

Dans un projet d’optimisation, nous avons développé un algorithme permettant de maximiser le coefficient de sécurité en rupture par instabilité par rapport aux positions des noeuds de fixations des poutres. Nous avons commencé à construire les arches avant les premiers résultats de ce projet, nous n’avons donc pas pu prendre cette étude en compte. Nous avons aussi réalisé un algorithme d’optimisation topologique de la structure permettant de minimiser son volume sous contrainte de stabilité, mais les résultats obtenus étaient inexploitable car trop difficiles à fabriquer en pratique.

7 Guidage, motorisation et énergie

7.1 Conception des liaisons pivots

Pour garantir le bon fonctionnement de notre pont, les arches doivent tourner autour d'un axe fixe. Pour réduire le coût carbone d'un cycle d'ouverture et simplement permettre à nos petits moteurs de mettre en mouvement les arches, il faut minimiser les frottements dans le mécanisme.

On choisit d'usiner une pièce intermédiaire en bois pour relier l'axe de sortie du moto-réducteur aux arches. Les arches sont reliées à l'arbre facilement avec de la colle à bois, et on fixe l'axe du moto-réducteur en perçant l'arbre dans l'axe et en utilisant de la colle bi-composant. Les surfaces de révolution ont été usinées au tour à bois (voir figure 34 et 35). Elles sont lubrifiées avec de la paraffine pour diminuer les frottements dans les pivots.

On relie les moteurs et les alésages à la rive avec des piles en bois. Ainsi, les arbres peuvent glisser dans les pivots fixes et sont mis en mouvement par les moteurs qui sont également solidement accrochés aux piles, solidaires de la rive (voir figure 36). L'équipe est consciente que l'utilisation de piles en bois massif permet difficilement d'assurer la minimisation de la quantité de matériau nécessaire et donc la construction d'un pont éco-responsable. Ce choix n'a été validé que par manque de temps, mais plusieurs études ont par ailleurs été initiées pour minimiser la consommation de bois des piles tout en assurant leurs fonctions premières.

Pour motoriser nos deux arches, nous ne disposons que de deux moteurs. Cela signifie que chaque arche sera mise en mouvement par un seul moteur. Pour éviter un effet de torsion à l'intérieur, nous relient les deux axes par des engrenages. Ainsi, les deux côtés de chaque arche sont motorisés et tournent à la même vitesse ; le tablier se lève donc de manière uniforme.

7.2 Engrainement des pivots

Afin d'assurer une ouverture symétrique, on utilise des engrenages qui ont été conçu à l'aide de CatiaV5 (figure 37) puis imprimés en 3D. Ces engrenages sont fixés sur la partie tournante de la liaison pivot. Nous aurions pu optimiser encore plus la masse de la pièce, elle est largement plus résistante que nécessaire. Nous avons prévu de relier les engrenages au bois des pivots en utilisant de la colle, mais aucune ne pouvait tenir à la fois sur du bois et sur de l'ABS. Nous avons donc percé les engrenages et utilisé des pointes pour garantir l'encastrement (figure 38). L'avantage de cette solution est que la position et l'orientation de l'engrenage est légèrement modifiable, les pointes pouvant être déformées plastiquement.

7.3 Guidage du tablier

Le guidage du tablier sera réalisé avec des bâtonnets permettant de réaliser une liaison glissière entre le tablier et la rive. Nous veillerons à ce que le raccord des rails soit suffisamment précis.

7.4 Motorisation

Nous avons choisi d'utiliser un interrupteur pour couper la motorisation une fois arrivé en position haute ou basse. Nous n'avons pas utilisé de capteurs de fin de course par manque de temps. Comme nous le démontrerons dans une étude statique de la partie suivante, le tablier est en équilibre stable en position ouverte comme fermée. Nous pouvons couper les moteurs en position haute et basse.

7.5 Minimisation de l'énergie nécessaire à l'ouverture-fermeture

La vitesse de rotation du moteur est imposée par la tension en entrée, et les couples de frottement risquent d'être importants. Sans aucune optimisation, le couple nécessaire dans la liaison pivot était de 11Nm dans la pire des configurations (ce moment dépend de l'angle d'ouverture). Nous avons d'abord envisagés d'utiliser des ressorts pour compenser le moment de pesanteur exercé sur l'arche, mais après discussion avec un fabricant, le ressort dont nous aurions eu besoin aurait été difficile à réaliser (ressort de traction avec une précharge très importante et une course élevée). Nous avons donc prévu d'utiliser

des contrepoids remplis d'eau, mais au dernier moment nous avons trouvé une solution bien meilleure car elle n'induit aucun coût carbone supplémentaire : décaler les arches par rapport à l'axe des pivots :

7.5.1 Modélisation statique

On cherche à calculer le moment exercé par les forces qui s'exercent sur une arche, exprimé sur l'axe de la liaison pivot, en fonction de l'angle d'ouverture et du décalage d de l'arche sur les pivots :

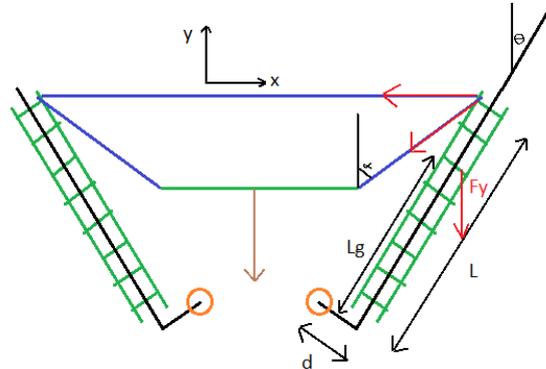


FIGURE 18 – Schéma du problème. Les différentes forces s'exerçant sur l'arche de droite sont représentées en rouge.

Nous allons isoler l'arche de droite. α dépend de θ et peut être calculé avec un peu de trigonométrie (l'expression fait intervenir beaucoup de paramètres n'apparaissant pas sur le schéma. La force normale dans le câble vaut :

$$N = \frac{m_{\text{tablier}}g}{\cos \alpha}$$

La force exercée par le câble sur l'arche de droite s'écrit :

$$\vec{F} = -\frac{m_{\text{tablier}}g}{\cos \alpha} \vec{x} + \frac{m_{\text{tablier}}g}{\cos \alpha} (-\sin \alpha \vec{x} - \cos \alpha \vec{y})$$

La force de pesanteur sur le tablier ainsi que son centre de gravité peuvent être mesurés via la maquette numérique. Finalement, le moment total $M(d, \theta)$ peut s'exprimer grâce à un produit vectoriel.

7.5.2 Problème d'optimisation

Le but est de minimiser par rapport à d le couple maximal s'exerçant sur la liaison pivot, on cherche donc : $d = \mathbf{arg}_d \min_d \max_{\theta} [M(d, \theta)]$, on a deux problèmes d'optimisation imbriqués, qui peuvent être résolu facilement avec une méthode de Newton (partant de plusieurs valeurs initiales pour éviter les extremums locaux).

7.5.3 Résultats

Pour les masses prévues du tablier et des arches, on trouve $d = 2.72$ cm. On peut alors tracer le moment exercé sur l'axe en fonction de θ sur une ouverture du pont (voir figure 19).

Pour $\theta = 0$ ou faiblement négatif, le moment exercé par les différentes forces de pesanteur sur l'axe de la liaison est positif : **le pont est stable en position fermé** puis pendant l'ouverture, ce moment devient négatif jusqu'en fin de course. **le pont est stable en position ouverte**. Pour θ grand, le moment commence à ré-augmenter, c'est en fait parce que l'influence de la force de tension du fil (qui tend à rapprocher les arches) est en train de devenir prépondérante devant la force de pesanteur s'exerçant sur l'arche (qui tend à éloigner les arches). La tension tend vers l'infini quand on approche θ_{lim} , en continuant l'ouverture le moment redeviendrait positif et tendrait vers $+\infty$ pour $\theta = \theta_{lim}$.

Le moment maximal que le moteur doit fournir pour ouvrir ou fermer le pont a été divisé par 20 par rapport à la position $d = 0$, l'énergie nécessaire pour une ouverture est donc bien plus faible. En ajoutant d'autres paramètres dans le problème de minimisation, on pourrait réduire encore ce moment, comme

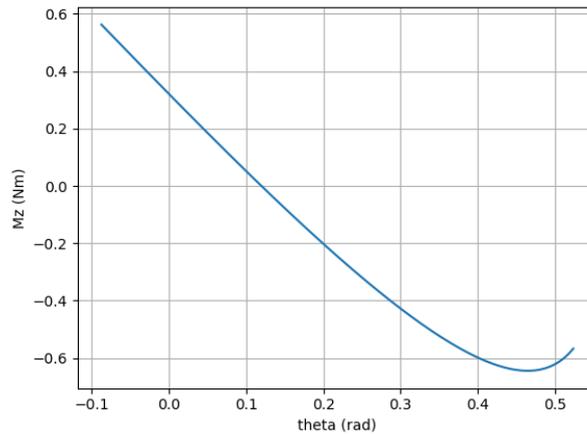


FIGURE 19 – Tracé du moment sur l'axe de la liaison pivot

des contrepoids à masse variable (réservoirs d'eau), ou encore des ressorts exploitant différentes non-linéarités géométriques. Mais ces solutions seront plus compliquées à mettre en oeuvre, et celle-ci est déjà satisfaisante compte tenu du fait que le moment n'est plus très grand devant les moments dus aux forces de frottement dans les liaisons pivots.

7.6 Contact électrique

Le contact mécanique entre rails est réalisé par le guidage du tablier. Il reste cependant à assurer le contact électrique pour que le train puisse avancer. La zone du contact entre deux rails étant insuffisante pour garantir le passage du courant, on a décidé d'utiliser des feuilles d'étain conductrices comme présentées en figure 39. La précision nécessaire au bon raccordement électrique des rails est donc grandement augmentée.

8 Conclusion et perspectives

Nous tenons tout d'abord à remercier les encadrants pour leur disponibilité et leurs conseils ainsi que tous les autres groupes du défi Move Your bridge qui nous ont permis d'avancer sur le projet en répondant à nos questions. Cette étude de 8 mois fut l'occasion de mener à bien une démarche scientifique inédite pour les membres de l'équipe, aussi bien d'un point de vue collaboratif que méthodologique.

Le défi sous sa forme « compétitive » nous obligea tout au long de l'année à poursuivre l'étude et la construction de notre pont à un rythme soutenu, parfois bien au delà des horaires prévus pour le projet. Il fut aussi l'occasion de pousser des concepts vus en cours beaucoup plus loin, parfois même trop pour qu'ils puissent être intégrés à ce rapport.

Parmi les perspectives d'amélioration de notre travail, nous pouvons citer : l'optimisation des piles, qui est clairement l'un des défauts majeurs de notre pont ; l'étude d'une cinématique telle qu'au repos ou les arches soient en contact (ce qui n'est pas possible ici du fait de la zone d'applications des efforts lors de l'essai).

Nous étions dès le départ conscients de la difficulté du pont choisi, mais son caractère inédit nous a particulièrement motivé.

9 Annexe

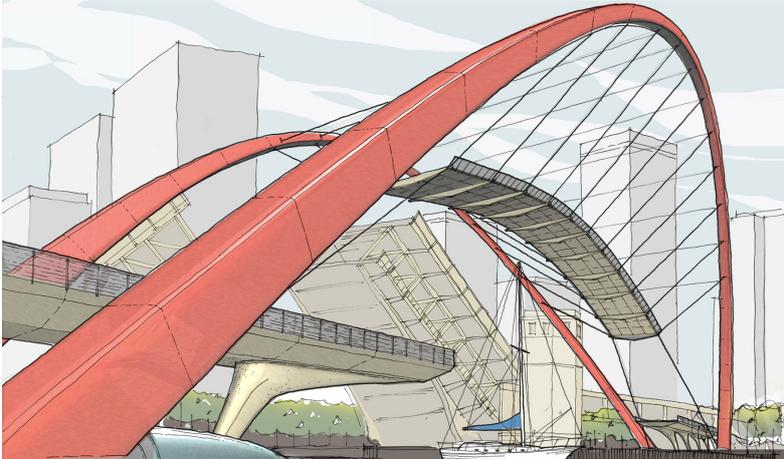


FIGURE 20 – Croquis du *Lake Shore Drive Bridge*

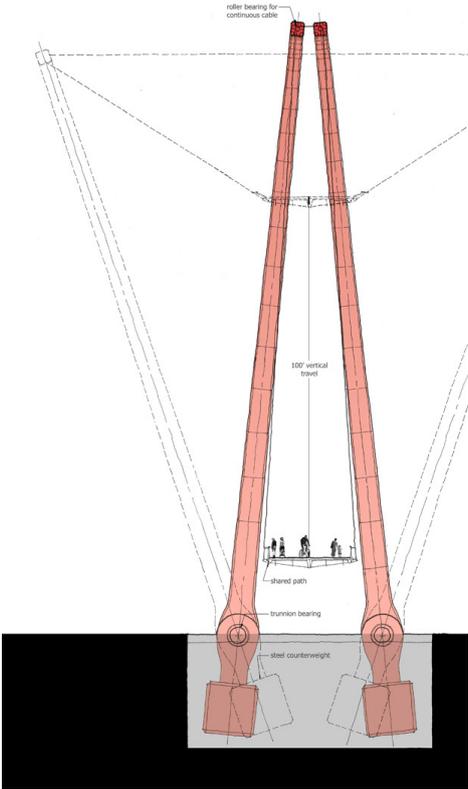


FIGURE 21 – Vue en coupe du *Lake Shore Drive Bridge*

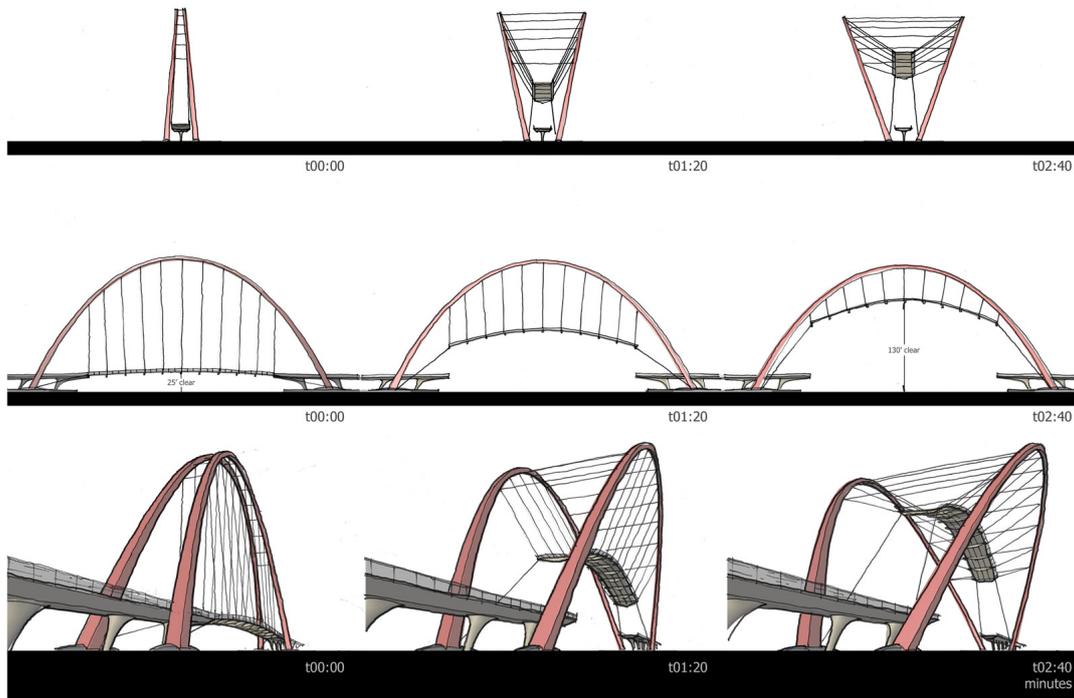


FIGURE 22 – Cinématique du *Lake Shore Drive Bridge* sous plusieurs angles et à différents instants de temps

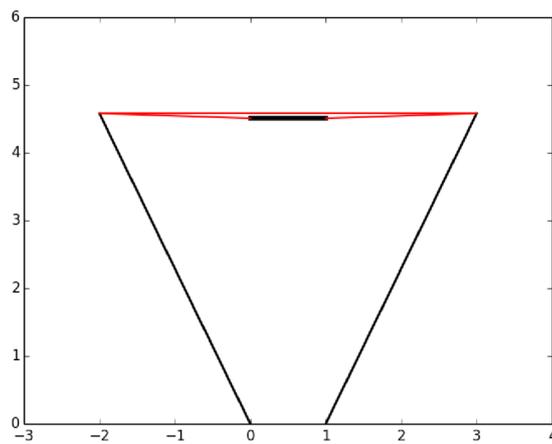


FIGURE 23 – Position des arches lorsque l'angle d'ouverture θ est égal à θ_{lim}



FIGURE 24 – Lieu des solutions de l'équation (24). En rouge, $d = 0.1$ cm. En blanc, $d = -0.1$ cm. En vert, $d = -0.18$ cm.

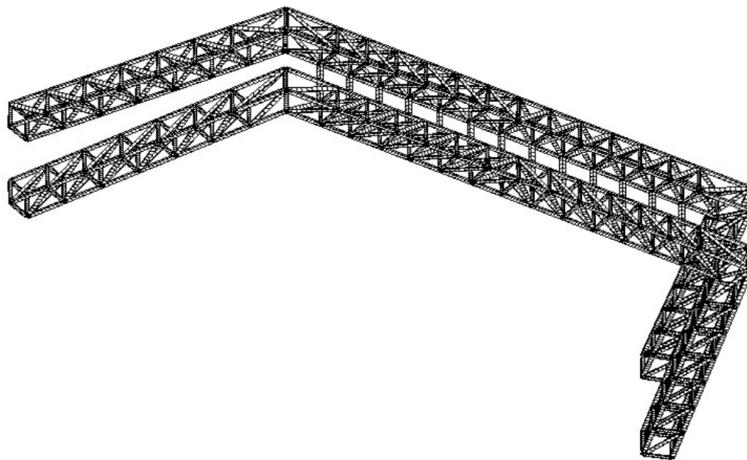


FIGURE 25 – Vue 3D du pont proposé (le tablier et les suspentes ne sont pas dessinés)

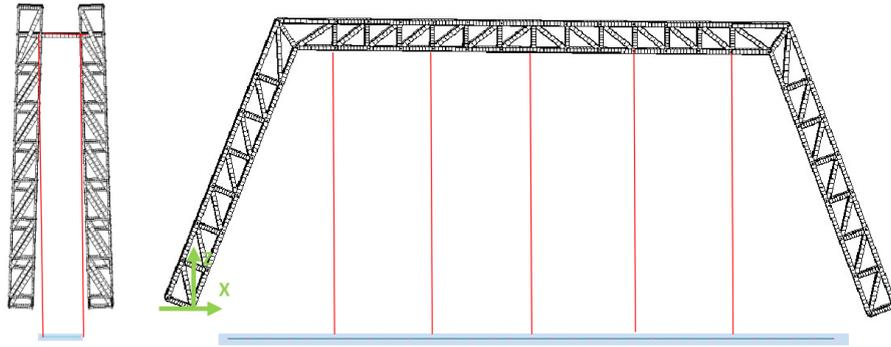


FIGURE 26 – Pont proposé. À gauche : élévation transversale. À droite : élévation longitudinale. (Le tablier et les suspentes ne sont pas dessinés)

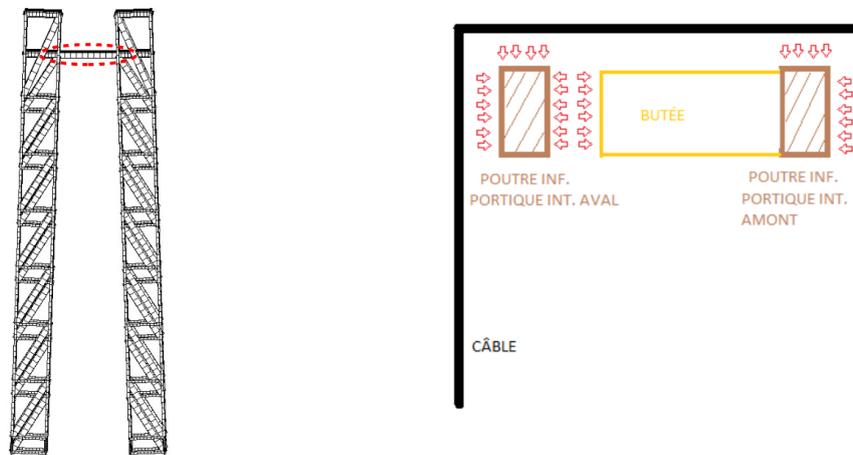


FIGURE 27 – Schéma de la transmission des efforts des câbles aux portiques treillis intérieurs. Les efforts horizontaux sont repris par les butées qui travaillent en compression, ce qui assure la bonne liaison mécanique entre les deux portique treillis d'amont et les deux portiques treillis d'aval

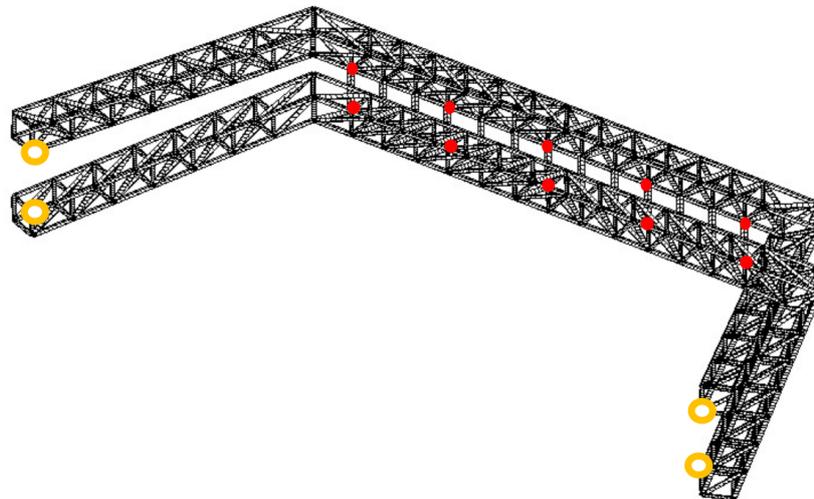


FIGURE 28 – Points d'application des forces verticales et horizontales (en rouge) et articulations aux pieds des portiques (en orange)

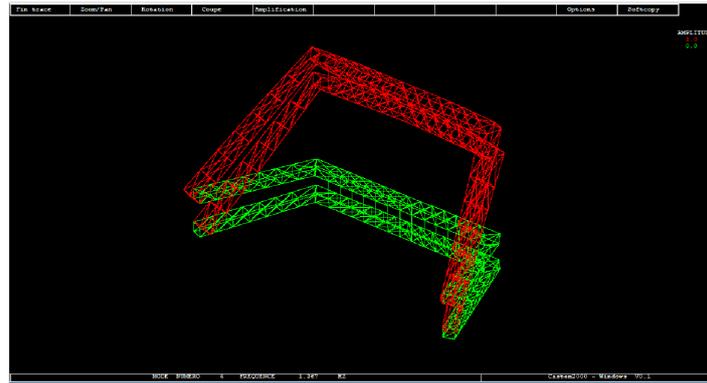


FIGURE 29 – Instabilité détectée par CAST3M pour un chargement de 1179.664 N

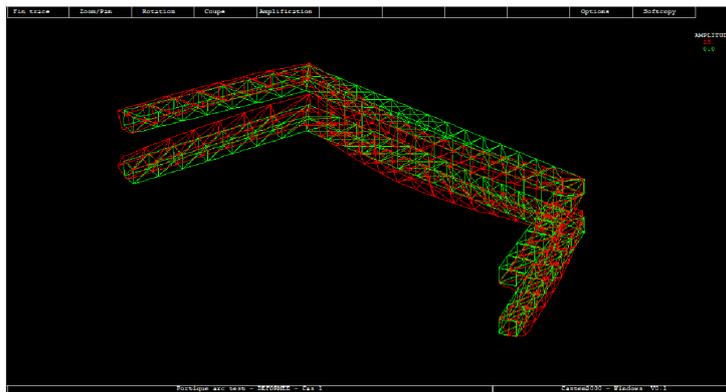


FIGURE 30 – Calcul en petits déplacements par CAST3M pour un chargement de 941 N

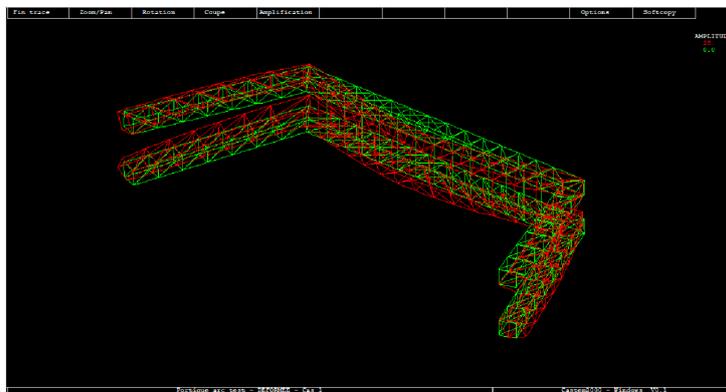


FIGURE 31 – Calcul en petits déplacements par CAST3M pour un chargement de 941 N

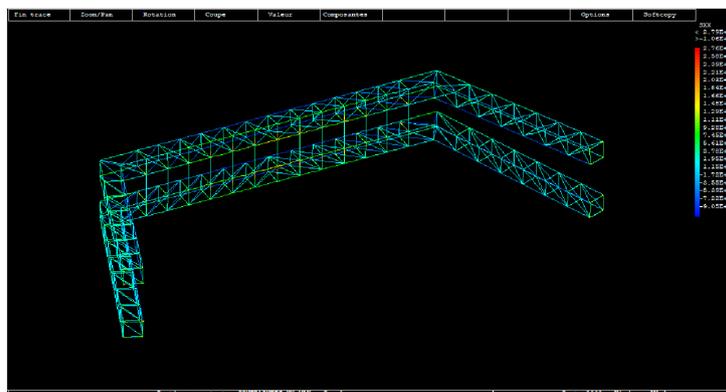


FIGURE 32 – Répartition des contraintes maximales (traction) sous HPP par CAST3M

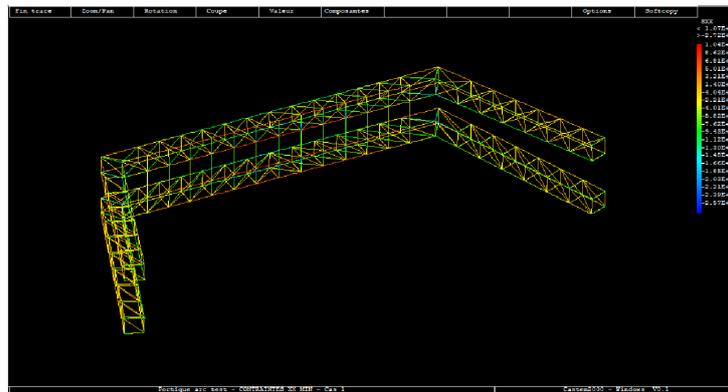


FIGURE 33 – Répartition des contraintes minimales (compression) sous HPP par CAST3M



FIGURE 34 – Arbre en bois réalisé par opération de tournage



FIGURE 35 – Liaison pivot assurant le bon fonctionnement de la cinématique



FIGURE 36 – Pile en bois

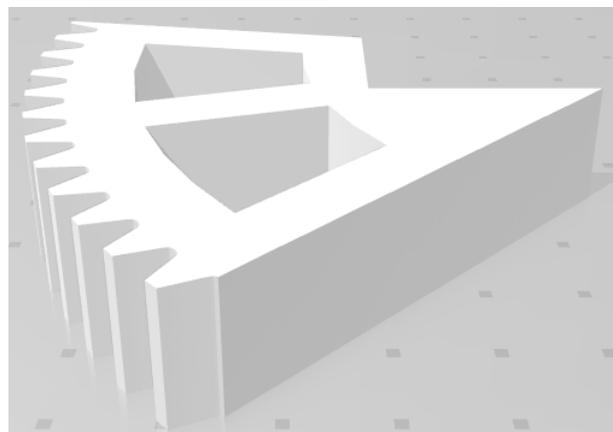


FIGURE 37 – Fichier STL de la CAO des engrenages

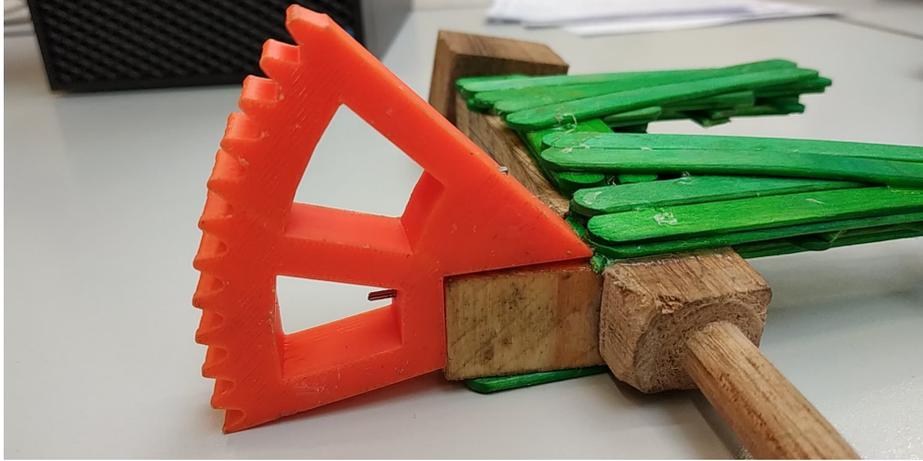


FIGURE 38 – Montage sur un pivot grâce à des pointes

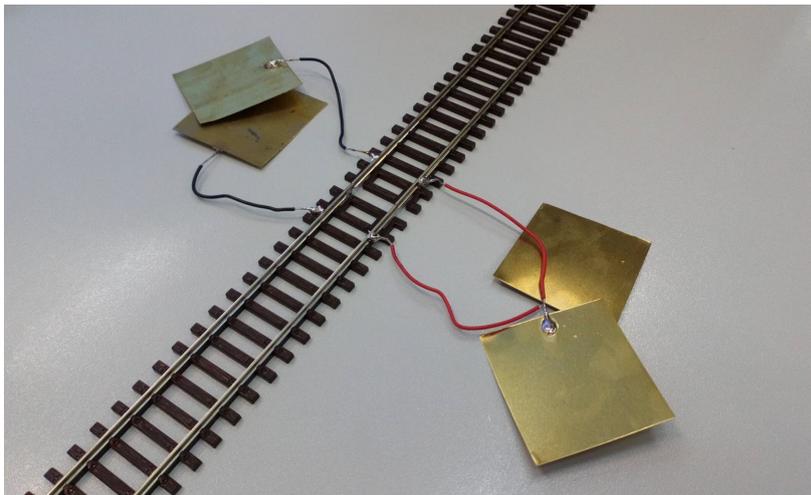


FIGURE 39 – Feuilles d'étain utilisées et câblage permettant d'assurer le bon raccordement électrique des rails