ELEMENTS DE CORRECTION ACTIVITÉ 4

1.1 $M = Mec + Mef = \rho \cdot V$ où ρ est la masse volumique de l'eau et V le volume du ballon de stockage. Si on dérive cette relation pour faire apparaitre les débits on montre alors que $\frac{dM}{dt} = \frac{d\rho V}{dt} = \frac{dM_{ec}(t)}{dt} + \frac{dM_{ef}(t)}{dt} = 0$, en supposant une masse volumique constante, il en résulte que : $\frac{dM_{ec}(t)}{dt} = -\frac{dM_{ef}(t)}{dt}$, le débit sortant est compensé par le débit entrant.

L'hypothèse H_2 précise que la température est homogène dans le ballon. En réalité des phénomènes convectifs existent à l'intérieur du ballon. L'eau chaude dont la masse volumique est plus faible connait un phénomène d'ascension et l'eau froide dont la masse volumique est plus forte a tendance à descendre.

Il doit y avoir certainement des strates à l'intérieur du ballon avec un gradient de température qui n'est pas uniforme.

1.2 On a : $\boxed{Q_{ec} = MC(T_{ec} - T_{ef})}$.

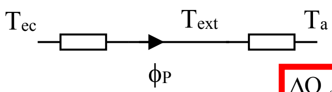
1.3 De la face interne du ballon à la face externe il y a de la conduction de chaleur. De la face externe avec le milieu extérieur nous avons un échange de chaleur par convection.

Pour la conduction on s'appuie sur la loi de Fourier en régime permanent :

$\phi_P = \frac{\lambda S}{e}(T_{ec} - T_{ext})$, On a négligé les résistances thermiques de la cuve (acier), mais on a considéré l'isolation thermique du ballon. Dans cette équation « e » désigne l'épaisseur de l'isolant, S la surface d'échange, λ la conductivité thermique de l'isolant et T_{ext} la température externe de la cuve.

Pour la convection on applique la loi de Newton : $\phi_P = hS(T_{ext} - T_a)$ où h est le coefficient de convection.

Schéma équivalent du circuit de déperdition thermique :



1.4 On a : $dQ_{ef} = M_{ef}CdT$, $\boxed{\int_0^{\Delta Q_{ef}} dQ_{ef} = \Delta Q_{ef} = \int_{T_{ef}}^{Tec} dT = M_{ef} \cdot C(T_{ec} - T_{ef})}$

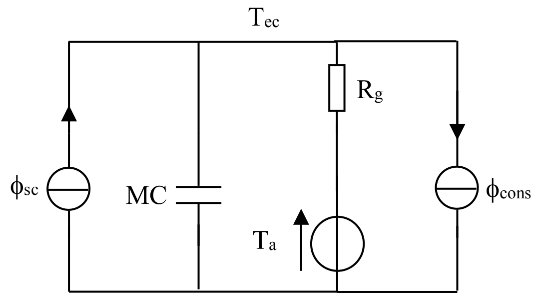
1.5 On recense le flux apporté à l'ensemble par les capteurs solaires ϕ_{sc}, le flux thermique stocké dans l'eau et le flux perdu avec le milieu ambiant ϕ_p et le flux dû à la consommation d'eau chaude.

On passe de l'énergie à la puissance en dérivant l'énergie par rapport au temps.

$MC\frac{dT_{ec}}{dt} = \phi_{sc} - \phi_p - \phi_{cons}$, avec $\phi_p = [\frac{1}{S}(\frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h})]^{-1} \cdot (T_{ec} - T_a) = U \cdot S(T_{ec} - T_a)$,où U est le coefficient de transmission thermique, on notera $\frac{1}{US} = R_g$, avec R_g la résistance thermique globale due aux déperditions.

$\phi_{cons} = \dot{m}C(T_{ec} - T_{ef})$, où $\dot{m}$ est le débit massique consommé.

1.6 Traduction du bilan par un schéma électrique équivalent :



1.7 Réponse temporelle à un échelon de puissance ϕ_{sc} sans consommation d'eau chaude :

On admet un échelon de puissance issue du capteur avec ϕ_{cons} = 250 W. L'équation du bilan devient :

$MC\frac{dT_{ec}}{dt} = \phi_{sc} - U \cdot S(T_{ec} - T_a)$, on établit une équation différentielle du premier ordre à coefficient constant :

$$MC\frac{dT_{ec}}{dt} + U \cdot S \cdot T_{ec} = \phi_{sc} + U \cdot S \cdot T_a.$$

On a une solution en régime permanent $\frac{dT_{ec}}{dt} = 0$:

$$\boxed{T_{ec} = \frac{\phi_{sc}}{US} + T_a}$$

La solution en régime libre (sans second membre) s'écrit :

$T_{ec} = K \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ où τ est la constante thermique de l'ensemble $\tau = \frac{MC}{US}$.

La solution générale s'écrit : $\boxed{T_{ec}(t) = \frac{\phi_{sc}}{US} + T_a + K \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}$.

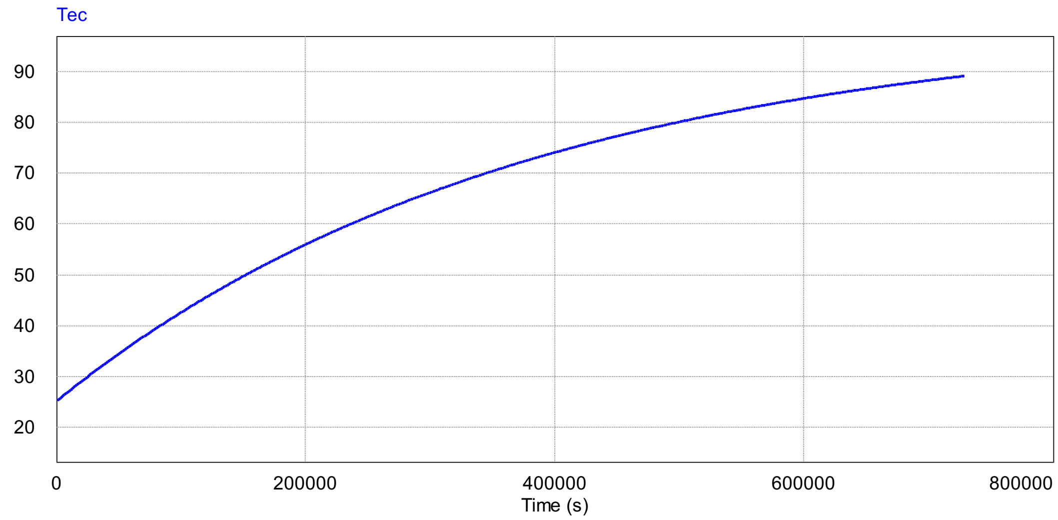
Pour déterminer k on s'appuie sur la condition initiale $T_{ec}(0) = T_a$

On aboutit à $K = -\frac{\phi_{sc}}{US}$

Au final nous obtenons : $\boxed{T_{ec}(t) = \frac{\phi_{sc}}{US}(1 - K \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}) + T_a}$

$\tau = MC \cdot R_g = 375000\ s$

Allure de la courbe :



1.8 Température atteinte par l'eau après 6 heures sans consommation d'eau chaude avec ϕ_{sc} = 0 W.

L'équation bilan devient : $MC\frac{dT_{ec}}{dt} + U \cdot S \cdot T_{ec} = U \cdot S \cdot T_a$.

Le régime permanent engendre T_{ec} = T_a et le régime libre $K \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$, on détermine K avec la condition initiale.

$T_{ec}(0) = 60 = T_a + K$ d'où $K = 60 - T_a$. Finalement on obtient :

$\boxed{T_{ec} = T_a + (60 - Ta) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}$.

La solution dépend de la constante de temps thermique qui dépend elle-même de la masse d'eau dans le ballon et surtout du coefficient de transmission thermique qui traduit l'ensemble des pertes avec le milieu ambiant.
Plus ce coefficient sera faible plus la température évoluera rapidement vers T_a.

Après 6h la température vaut : $\boxed{T_{ec} = T_a + (60 - Ta) \cdot e^{-\frac{12x3600}{375000}} = 56,2\,°C}$

ELEMENTS DE CORRECTION ACTIVITÉ 4

1.9 Réponse temporelle sans ensoleillement, et dans le cas d'un débit constant d'eau chaude égale à $0{,}1\,L\cdot s^{-1}$:

Compte-tenu des hypothèses l'équation bilan devient :

$$MC\frac{dT_{ec}}{dt} = -U\cdot S(T_{ec}-T_a) - \dot{m}C(T_{ec}-T_{ef}).$$

On doit résoudre : $MC\frac{dT_{ec}}{dt} + (\dot{m}C + U\cdot S)T_{ec} = \dot{m}C\cdot T_{ef} + U\cdot S\cdot T_a$.

La solution particulière est obtenue pour le régime permanent où la dérivée de T_{ec} est nulle :

$$\boxed{T_{ec} = \frac{\dot{m}\cdot C\cdot T_{ef} + U\cdot S\cdot T_a}{\dot{m}\cdot C + U\cdot S}}$$

La solution sans second membre correspond au régime libre :

$\boxed{T_{ec} = K\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}$ la solution s'écrit :

$T_{ec} = K\cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{\dot{m}\cdot C\cdot T_{ef} + U\cdot S\cdot T_a}{\dot{m}\cdot C + U\cdot S}$, on détermine K avec la condition initiale :

$$K = 60 - \frac{\dot{m}\cdot C\cdot T_{ef} + U\cdot S\cdot T_a}{\dot{m}\cdot C + U\cdot S}.$$

D'où :

$$\boxed{T_{ec} = \left(60 - \frac{\dot{m}\cdot C\cdot T_{ef} + U\cdot S\cdot T_a}{\dot{m}\cdot C + U\cdot S}\right)\cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{\dot{m}\cdot C\cdot T_{ef} + U\cdot S\cdot T_a}{\dot{m}\cdot C + U\cdot S}}$$

La température à la fin du puisage est obtenue pour t = 1800 secondes. Attention dans cette situation $\tau = \frac{MC}{\dot{m}\cdot C + U\cdot S} = 2976\text{ s}$.

$$\frac{\dot{m}\cdot C\cdot T_{ef} + U\cdot S\cdot T_a}{\dot{m}\cdot C + U\cdot S} = \frac{0{,}1\cdot 4180\cdot 20 + \frac{1}{0{,}3}\cdot 25}{0{,}1\cdot 4180 + \frac{1}{0{,}3}} = 20{,}04$$

$$T_{ec}(1800) = \left(60 - \frac{0{,}1\cdot 4180\cdot 20 + \frac{1}{0{,}3}\cdot 25}{0{,}1\cdot 4180 + \frac{1}{0{,}3}}\right)e^{-\frac{1800}{2976}} + \frac{0{,}1\cdot 4180\cdot 20 + \frac{1}{0{,}3}\cdot 25}{0{,}1\cdot 4180 + \frac{1}{0{,}3}}$$

$\boxed{T_{ec}(1800) = 42{,}22\ °C}$.