

SESSION 2013

**AGRÉGATION
CONCOURS EXTERNE**

Section : SCIENCES INDUSTRIELLES DE L'INGÉNIEUR

**Option : SCIENCES INDUSTRIELLES DE L'INGÉNIEUR
ET INGÉNIERIE MÉCANIQUE**

**MODÉLISATION D'UN SYSTÈME, D'UN PROCÉDÉ,
OU D'UNE ORGANISATION**

Durée : 6 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : La copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.

Compresseur centrifuge pour l'extraction pétrolière

Les sociétés actuelles sont devenues dépendantes du pétrole. La consommation mondiale actuelle s'élève à plus de 30 milliards de barils par an (soit $4,6 \text{ km}^3$). Cette énergie primaire n'est cependant pas inépuisable et les technologies se développent afin, d'une part, de trouver de nouveaux gisements et, d'autre part, d'optimiser l'extraction des puits actuellement exploités. En effet, seulement 35% en moyenne de la quantité de pétrole disponible dans les réserves est extraite actuellement.



Figure 1 – Plateforme pétrolière.

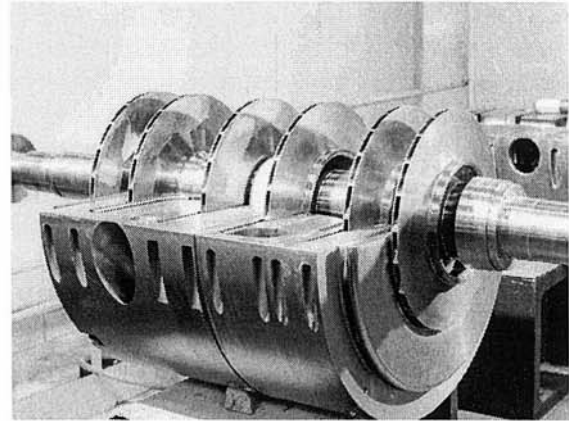


Figure 2 – Photographie d'un demi-cartouche de compresseur centrifuge équipé de l'arbre et des disques.

Pour améliorer le taux d'extraction, une solution consiste à réaliser des forages complémentaires à une certaine distance du puits, et d'y injecter du gaz sous pression afin de pousser le pétrole vers le puits d'extraction. Cette solution nécessite un compresseur à très haute pression et très fort débit (et donc de très grande puissance, de l'ordre de plusieurs méga-Watt).

La société Thermodyn (GE – Oil & Gas) conçoit et fabrique des compresseurs centrifuges pour les applications pétrolières et gazières. On distingue généralement quatre familles d'applications nécessitant des compresseurs aux performances différentes :

- les compresseurs de tête de réseau chargés du transfert du gaz d'un puits vers le réseau, ces compresseurs travaillent à pression d'entrée et de sortie quasi-constantes, mais doivent s'adapter à un débit très variable ;
- les compresseurs de recompression sur les gazoducs chargés de compenser les pertes de charge régulières, ces compresseurs travaillent dans des conditions bien maîtrisées mais doivent présenter un bon rendement ;
- les compresseurs d'injection et de soutirage chargés de gérer le stockage du gaz, ces compresseurs doivent admettre une gamme de pression et de débit très large ;
- les compresseurs de réinjection dans un gisement de pétrole (figure 1) chargés de pousser le pétrole vers le puits, ces compresseurs sont conçus pour de très hautes pressions et très forts débits.

Ce dernier type de compresseur fait l'objet de cette étude. On s'intéresse plus particulièrement à un compresseur centrifuge à 6 étages injectant $1\,400 \text{ m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$ de gaz à 380 bar dans le puits (figure 2). L'arbre est mis en rotation à des vitesses de l'ordre de $11\,000 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$. Le gaz est comprimé dans chaque disque par effet centrifuge, puis ralenti dans un diffuseur avant d'être à nouveau comprimé dans l'étage suivant (figure 3).

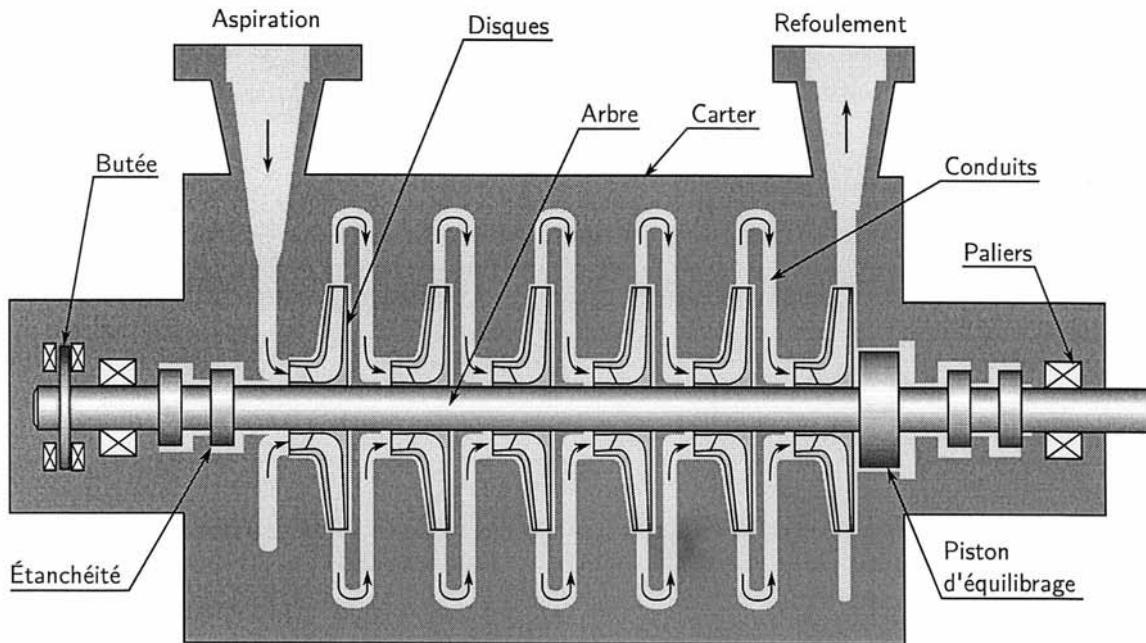


Figure 3 – Schéma du compresseur multi-étagé en coupe.

Le sujet propose au candidat de mobiliser ses compétences pour dimensionner les caractéristiques du compresseur en fonction des niveaux de performance à atteindre. Il se décompose en quatre parties :

- partie 1, dimensionner la géométrie du compresseur permettant d'assurer la compression (diamètres des disques et de l'arbre, nombre de disques, etc) ;
- partie 2, spécifier la solution d'assemblage des disques sur l'arbre ;
- partie 3, valider le comportement vibratoire dans la plage de fonctionnement du compresseur ;
- partie 4, valider l'encombrement radial assurant un compromis raisonnable avec le rendement.

Le tableau 1 donne un extrait du cahier des charges auquel doit répondre le compresseur, auquel s'ajoutent les contraintes technologiques importantes pour le dimensionnement :

- vitesse périphérique maximale des disques $250 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;
- vitesse optimale de l'écoulement en sortie de disque comprise entre Mach 0,3 et Mach 0,5.

Fonction de service	Critère	Niveau
FP1 : mettre en pression le gaz	Débit de gaz en entrée	$90,3 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$
	Pression du gaz en sortie	380 bar
	Composition du gaz	CH_4 (80%), CO_2 (10%), Propane (5%) et Butane (5%)
FC1 : limiter le coût d'achat et d'exploitation	Complexité de l'installation	Minimale
	Rendement global	$> 0,6$
	Durée de vie	20 ans en fonctionnement continu
FC2 : s'adapter au site	Température d'entrée du gaz	40°C
	Pression du gaz en entrée	140 bar
	Température de sortie du gaz	$< 250^\circ\text{C}$

Tableau 1 – Extrait du cahier des charges fonctionnel.

1 Dimensionnement de la géométrie du compresseur

Objectif : définir les éléments de dimensionnement majeurs du compresseur, c'est-à-dire le nombre d'étages de compression nécessaires et le diamètre des disques. Choisir l'implantation ou non d'un refroidissement intermédiaire.

Dans cette partie, le gaz est considéré comme parfait, satisfaisant la relation $pv = rT$, où la constante spécifique du gaz vaut $r = 332 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. La chaleur spécifique à pression constante vaut $c_p = 660 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ et la chaleur spécifique à volume constant vaut $c_v = 412 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$, le rapport étant égal à $\gamma = c_p/c_v = 1,6$.

On admet que, vu les sections des conduits, les vitesses d'entrée et de sortie d'étage valent $V_0 = 50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

La pression est notée p , la masse volumique ρ , le volume massique v et la température T .

Quelques relations pour les systèmes ouverts, en considérant une transformation $1 \rightarrow 2$ quelconque, sont rappelées ci-dessous :

Premier principe : $\Delta k_{12} + \Delta h_{12} = w_{1 \rightarrow 2} + q_{1 \rightarrow 2}$

où :

- Δk_{12} est la variation d'énergie cinétique ;
- Δh_{12} la variation d'enthalpie ;
- $w_{1 \rightarrow 2}$ le travail des parties mobiles ;
- $q_{1 \rightarrow 2}$ la chaleur reçue par le gaz, fournie par les parois.

Théorème de l'énergie cinétique en référentiel mobile :

$$\frac{W_2^2 - W_1^2}{2} - \frac{U_2^2 - U_1^2}{2} + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + g(z_2 - z_1) + \Delta_1^2 f_r = 0$$

où :

- W est la vitesse dans le référentiel du disque ;
- U la vitesse d'entraînement ;
- $\int \frac{dp}{\rho}$ le travail des forces de pression ;
- gz le travail du poids (négligé) ;
- $\Delta_1^2 f_r$ la perte de charge, correspondant à l'énergie dissipée entre 1 et 2 (négligée).

Théorème d'Euler :

$$w_{1 \rightarrow 2} = U_2 V_{\theta 2} - U_1 V_{\theta 1}$$

où :

- $w_{1 \rightarrow 2}$ est le travail des parties mobiles ;
- U la vitesse d'entraînement ;
- V_θ la composante orthoradiale de la vitesse absolue.

Vitesse du son : $V_{\text{son}} = \sqrt{\gamma r T}$. Le nombre de Mach Ma est le rapport de la vitesse d'un gaz sur la vitesse du son dans le milieu.

\vec{U} est la vitesse du disque à sa périphérie (figure 4), \vec{V} la vitesse absolue du gaz (par rapport au carter), \vec{W} la vitesse relative du gaz (par rapport au disque) et V_θ la projection de \vec{V} sur la direction orthoradiale, c'est-à-dire la direction de \vec{U} . De façon évidente, $\|\vec{U}\| = U$, $\|\vec{W}\| = W$.

Pour simplifier l'étude, les aubes sont supposées radiales, c'est-à-dire qu'en l'absence de *glissement* ($\mu_G = 1$), la vitesse orthoradiale absolue du gaz en sortie de disque V_θ est égale à celle du disque U . En réalité, des recirculations entre les aubes conduisent à une vitesse plus faible. Ce phénomène est caractérisé par le *glissement*, défini par $\mu_G = V_\theta/U$, de l'ordre de $\mu_G = 0,5$.

L'arbre tourne à la vitesse $\Omega = 11\,000 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$.

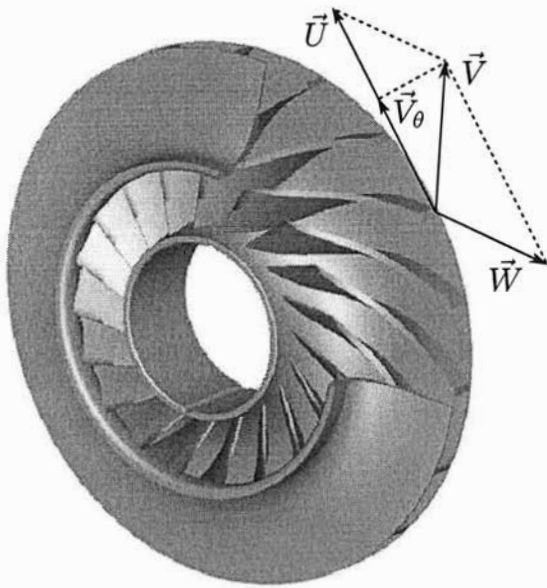


Figure 4 – Disque d'entraînement du gaz.

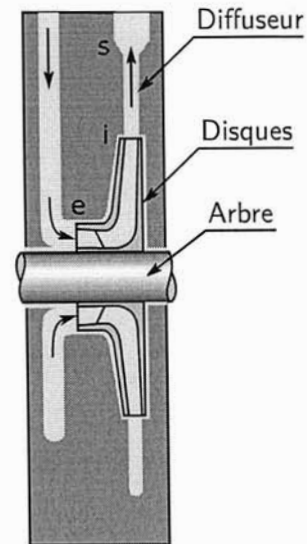


Figure 5 – Coupe d'un compresseur à 1 seul étage.

1.1 Cas de référence

En premier lieu, le cas idéal de référence (figure 5) d'une compression adiabatique isentropique, en un seul étage, entre l'entrée et la sortie, sans *glissement* en sortie de disque ($\mu_G = 1$) est envisagé.

$e - i$ désigne la transformation entre l'entrée et la sortie du disque, et $i - s$ la transformation entre l'entrée du diffuseur et la sortie. $p_e, T_e, \rho_e, p_s, T_s$ et ρ_s sont respectivement les pressions, températures et masses volumiques en entrée et sortie d'étage. Q_v et Q_m sont les débits volumique et massique de gaz.

Les vitesses du gaz en entrée et en sortie, ainsi que la vitesse radiale, sont faibles devant la vitesse tangentielle en sortie de disque. En première approximation, ces quantités sont négligées.

Question 1 : déterminer les conditions de sortie (p_s, T_s et ρ_s) du gaz et déduire du premier principe la puissance fournie par l'arbre.

Question 2 : montrer que dans le cas où il n'y a pas de glissement, $w_{es} = U^2$, et en déduire le diamètre du disque D_e permettant d'assurer cette transformation en un seul étage.

Question 3 : à partir de ces résultats, conclure sur les critères de température maximale en sortie, de vitesse périphérique maximale et de nombre de Mach maximal imposés.

1.2 Modélisation des irréversibilités et du glissement

Les sources d'irréversibilités sont très diverses et difficiles à modéliser finement. Un modèle global sous la forme d'une transformation polytropicque adiabatique est adopté. Selon les retours d'expérience, l'exposant polytropicque est fixé à $k = 1,8$ et le *glissement* à $\mu_G = 0,5$.

Question 4 : pourquoi l'hypothèse isentropique ne conduit-elle pas à un modèle représentatif de la compression réelle ? Pourquoi l'hypothèse adiabatique est quant à elle raisonnable ?

Question 5 : reprendre les calculs de la partie précédente et déterminer les conditions de sorties, la puissance fournie par l'arbre et en déduire le rendement isentropique (rapport des puissances fournies par l'arbre dans le cas idéal isentropique et dans le cas polytropicque).

Question 6 : déterminer la vitesse périphérique du disque U et le diamètre du disque D_e (en tenant compte du glissement) puis conclure au regard des contraintes technologiques et du cahier des charges.

Question 7 : en supposant que, dans une machine multi-étagée, chaque étage assure la même variation d'enthalpie, déterminer le nombre d'étages permettant de respecter la condition de vitesse

maximale $U < 250 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, ainsi que le nombre d'étages permettant de respecter la condition sur la vitesse d'écoulement $Ma = \frac{V}{v_{son}} < 0,5$. En déduire le nombre d'étages à adopter et le diamètre des disques D_e (utiliser la vitesse du son dans les conditions d'entrée, ainsi que la vitesse périphérique du disque U pour le calcul du nombre de Mach).

Question 8 : à partir de la puissance fournie par l'arbre et la vitesse de rotation, déterminer le diamètre de l'arbre assurant la tenue en torsion avec un coefficient de sécurité de 4 (l'arbre est en acier, de limite élastique $R_e = 180 \text{ MPa}$). Utiliser le critère de Tresca : la contrainte tangentielle maximale ne doit pas dépasser $R_e/2$.

1.3 Évaluation d'une solution avec refroidissement intermédiaire

L'ajout d'un échangeur thermique représente une augmentation significative du coût et de la complexité de l'installation. Ce choix n'est économiquement rentable que si le rendement global de l'installation présente un gain d'au moins 20%.

Par souci de simplicité, la compression est décomposée en 3 transformations :

- e – 1 compression adiabatique polytropique ;
- 1 – 2 échange thermique isobar avec un retour à 40°C (température d'entrée) ;
- 2 – s compression adiabatique polytropique.

La variation d'enthalpie est supposée identique dans les deux compressions e – 1 et 2 – s.

Question 9 : déterminer les états du gaz (p et T) en 1, 2 et s.

Question 10 : déterminer la puissance fournie par l'arbre et conclure sur le choix à adopter.

2 Spécification de la solution d'assemblage des disques

Objectif : modéliser la liaison complète disque – arbre pour un étage et en déduire un encadrement de l'ajustement à spécifier pour respecter le cahier des charges.

La partie précédente a permis de calculer la puissance (et le couple) transmis au gaz par les aubages. Cette partie vise à valider la solution technique d'assemblage des disques sur l'arbre.

Afin d'assurer un positionnement optimal et sans jeu des disques sur l'arbre, l'assemblage est fretté. Le couple est transmis par frottement au contact. Le couple à transmettre est supposé réparti de façon égale sur les six étages.

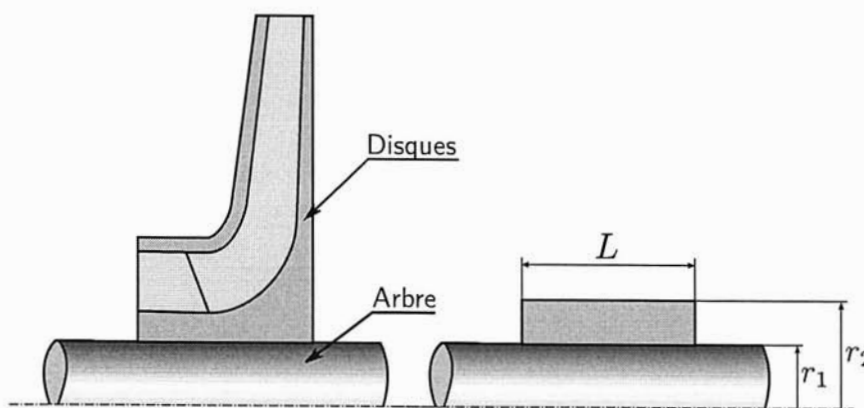


Figure 6 – Géométrie du disque fretté sur l'arbre (à gauche) et modélisation simplifiée pour le calcul du fretage (à droite).

2.1 Modèle d'étude

Le disque est composé d'une partie massive et des aubages. Pour le calcul du frettage, seule la partie massive assimilée à un anneau cylindrique de rayon intérieur r_1 , de rayon extérieur r_2 et de longueur L est prise en compte (figure 6).

Notations :

- anneau cylindrique de rayon intérieur $r_1 = 63,5$ mm, de rayon extérieur $r_2 = 100$ mm et de longueur $L = 100$ mm ;
- serrage s ;
- rayon de l'arbre $r_1 + s/2$;
- accélération centripète $r\omega^2$;
- limite élastique du matériau $R_e = 180$ MPa ;
- module d'Young $E = 210$ GPa ;
- coefficient de Poisson $\nu = 0,3$;
- masse volumique $\rho = 7\,800$ kg · m⁻³
- coefficient de frottement à l'interface arbre – disque $f = 0,1$;
- pression à l'interface arbre – disque p ;
- les tenseurs des contraintes et des déformations seront notés, dans la base cylindrique, avec un exposant a pour l'arbre et b pour le disque,

$$\sigma^a = \begin{pmatrix} \sigma_{rr}^a & \sigma_{r\theta}^a & 0 \\ \sigma_{r\theta}^a & \sigma_{\theta\theta}^a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \varepsilon^a = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr}^a & \varepsilon_{r\theta}^a & 0 \\ \varepsilon_{r\theta}^a & \varepsilon_{\theta\theta}^a & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz}^a \end{pmatrix}, \sigma^b = \begin{pmatrix} \sigma_{rr}^b & \sigma_{r\theta}^b & 0 \\ \sigma_{r\theta}^b & \sigma_{\theta\theta}^b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \varepsilon^b = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr}^b & \varepsilon_{r\theta}^b & 0 \\ \varepsilon_{r\theta}^b & \varepsilon_{\theta\theta}^b & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz}^b \end{pmatrix}$$

- le déplacement radial sera noté $u(r)$;
- couple à transmettre par la liaison frettée $C_{\max} = 1\,550$ N · m par étage ;
- vitesse maximale $N_{\max} = 11\,000$ tr · min⁻¹, soit $\Omega_{\max} = 1\,150$ rad · s⁻¹.

Hypothèses :

- matériau homogène isotrope et au comportement élastique linéaire ;
- modèle axisymétrique ;
- modèle en contraintes planes.

Question 11 : justifier ou critiquer les hypothèses retenues pour l'étude du frettage du disque sur l'arbre et en particulier l'emploi d'un modèle en contraintes planes.

Par la suite, un modèle adapté, dit "modèle de l'enveloppe épaisse", est choisi pour définir un encadrement du serrage (parties 2.2 et 2.3).

2.2 Critère de serrage maximal

L'objectif de cette partie est de déterminer le serrage maximal admissible lors du frettage, afin de rester dans le domaine élastique pour l'arbre et le disque. Les pressions maximales sont atteintes à l'arrêt, si bien que les accélérations centripètes ne sont pas prises en compte pour ce critère. La température est supposée uniforme.

Le disque et l'arbre sont considérés comme des cylindres soumis à des pressions internes et externes. Le modèle de l'enveloppe épaisse choisi est décrit dans le document annexe A.1, qui précise le paramétrage, les expressions des solutions en contraintes et la forme du champ de déplacement. L'annexe A.2 donne les expressions des opérateurs différentiels courants en coordonnées cylindriques.

Question 12 : rappeler, sous une forme générale, l'ensemble des équations auxquelles doit satisfaire la solution $\{\vec{U}(M), \varepsilon(M), \sigma(M)\}$ du modèle de l'enveloppe épaisse, c'est-à-dire :

- les équations d'équilibre ;
- les relations entre contraintes et déformations (loi de Hooke) ;
- les relations entre les déformations et les déplacements ;
- les conditions aux limites.

À partir des hypothèses proposées par l'énoncé et du paramétrage choisi, simplifier ces équations de façon à obtenir un système d'équations liant σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, ε_{rr} , $\varepsilon_{\theta\theta}$, ε_{zz} , p_i , p_e , u_r et u_z .

Aucune résolution de ces équations n'est demandée. Le résultat final est donné sous forme littérale en annexe A.1.

Par la suite, les solutions du modèle de l'enveloppe épaisse présentées en annexe A.1 peuvent être utilisées sans démonstration.

Question 13 : en tenant compte des conditions limites, exprimer le champ de contraintes pour les deux pièces frettées en fonction de la pression à l'interface p .

Question 14 : à partir de la relation de compatibilité cinématique à l'interface, déterminer littéralement l'expression de la pression d'interface p .

Question 15 : à partir du critère de Tresca, déterminer le rayon pour lequel le matériau est le plus sollicité et en déduire l'expression et la valeur numérique du serrage maximal s_{\max} admissible sans déformation plastique. Pour rappel, le critère de Tresca précise que la différence entre les contraintes principales ne doit pas dépasser R_e .

2.3 Critère de serrage minimal

Le couple à transmettre nécessite un serrage minimal lors du frettage. Les pressions minimales sont atteintes à la vitesse maximale, si bien que les accélérations centripètes sont prises en compte pour ce critère. La température est supposée uniforme.

Question 16 : indiquer quelles modifications aux équations de la question 12 sont à apporter pour tenir compte des accélérations centripètes dans le modèle de l'enveloppe épaisse.

Aucune résolution de ces équations n'est demandée. Le résultat final est donné sous forme littérale en annexe A.1.

Par la suite, les solutions du modèle de l'enveloppe épaisse présentées en annexe A.1 peuvent être utilisées sans démonstration.

Question 17 : à partir du critère à respecter pour le serrage minimal, déterminer la pression minimal p_{\min} à assurer au contact.

Question 18 : expliquer comment les modèles des questions 12 et 16 peuvent permettre de déterminer la pression p à l'interface puis exprimer cette pression en fonction du serrage s et de la vitesse de rotation ω .

Question 19 : en déduire la valeur du serrage minimal s_{\min} et conclure sur un encadrement de l'ajustement du frettage.

Le procédé d'assemblage est réalisé par dilatation. Le disque est porté de la température ambiante $T_0 = 20^\circ\text{C}$ à une température T_c pour créer un jeu diamétral j d'assemblage entre l'arbre et l'alésage. Afin de ne pas modifier les caractéristiques mécaniques du matériau, la température ne doit pas dépasser 350°C .

Le rayon de l'alésage à l'état initial est r_1 . Le rayon de l'arbre à l'état initial est $r_1 + s/2$. Le jeu d'assemblage choisi pour le montage vaut $j = 2r_1 \cdot 10^{-3}$. Le coefficient de dilatation du matériau de l'alésage vaut $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$.

Question 20 : donner sous forme littérale l'expression permettant de calculer la température minimale de chauffe T_c nécessaire pour pouvoir monter le disque sur l'arbre sans presse. Faire l'application numérique avec les données ci-dessus. Conclure sur la pertinence de ce procédé de fabrication.

Cette partie a permis de déterminer les spécifications dimensionnelles de l'assemblage fretté et d'envisager la possibilité d'un montage à chaud sans presse.

3 Validation du comportement vibratoire du compresseur

Objectif : valider le comportement vibratoire dans la plage de fonctionnement du compresseur.

La première partie a montré que le travail de compression est directement lié à la vitesse périphérique du disque. La vitesse de rotation doit être la plus élevée possible (dans la limite de la tenue des disques).

Néanmoins, le rotor ne pouvant être parfaitement équilibré, la machine est sensible aux vibrations et il convient de s'assurer de ne pas travailler à une vitesse de rotation voisine d'un mode de vibration.

La première partie vise à déterminer les modes de corps rigide à partir d'un modèle simple à paliers souples et arbre rigide. La seconde partie vise à déterminer les premiers modes souples à partir d'un modèle simple à paliers rigides et arbre souple.

3.1 Modes de corps rigide

L'arbre et le disque sont assimilés à un corps rigide 3 en appui sur deux paliers en A et B , guidant l'arbre autour de l'axe (O, \vec{z}_0) .

Les paliers ne sont pas infiniment rigides ce qui conduit à des vibrations à certaines fréquences de rotation. Dans le cadre de cette étude, pour éviter les calculs fastidieux, les paliers sont modélisés par des raideurs k_x et k_y dans les directions \vec{x} et \vec{y} , et ne présentent aucun amortissement.

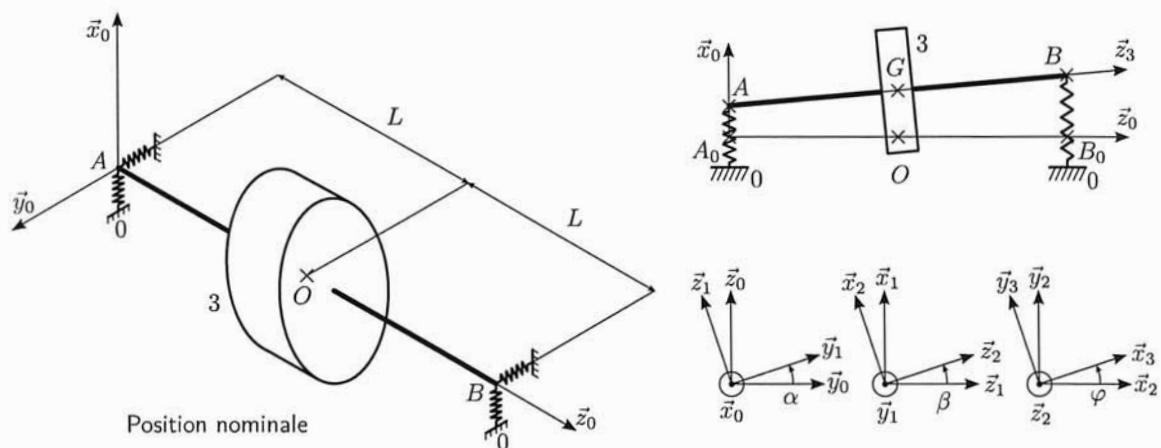


Figure 7 – Paramétrage de l'étude des modes de corps rigide.

Paramétrage :

Soit une base B_0 liée au bâti fixe et une base B_3 accrochée à l'arbre 3. α , β et φ définissent les trois angles de rotation de B_3 par rapport à B_0 autour respectivement des axes \vec{x}_0 , \vec{y}_1 et \vec{z}_2 (voir figure 7). α et β sont petits tandis que $\varphi = \Omega t$ avec Ω supposée constante. La vitesse de rotation Ω est notée N lorsqu'elle est exprimée en $\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$.

Le déplacement du centre de gravité G est paramétré par $\vec{OG} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0$. A_0 et B_0 sont les centres des paliers, liés au bâti 0, et A et B les centres des paliers liés à l'arbre 3. A et A_0 , ainsi que B et B_0 , sont confondus pour la position nominale ($\alpha = \beta = x = y = 0$).

Notations :

– $M_3 = 223,5 \text{ kg}$ la masse et $I_{G,3} = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{B_3}$ la matrice d'inertie de l'ensemble

{arbre + disque} noté 3, avec $A_3 = 52 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ et $C_3 = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$;

– $\vec{OG} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0$;

– $\vec{A_0O} = \vec{OB_0} = L\vec{z}_0$, avec $L = 0,65 \text{ m}$;

- $\vec{AG} = \vec{GB} = L\vec{z}_3$;
- $k_x = 3.10^7 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ et $k_y = 2,3.10^7 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ les raideurs des paliers suivant les directions \vec{x} et \vec{y} ;
- $\vec{F}_{\text{bal}} = F_0\vec{x}_3 = F_x(t)\vec{x}_0 + F_y(t)\vec{y}_0$ une sollicitation de type balourd appliquée en G ;
- $\vec{M}_{\text{bal}} = M_0\vec{x}_3 = M_x(t)\vec{x}_0 + M_y(t)\vec{y}_0$ une sollicitation en moment de type balourd;
- les torseurs d'actions mécaniques de 0 sur 3 transmises par les liaisons en A et B sont notés :

$$\left\{ \mathcal{T}_{0/3}^{(A)} \right\} =_{A_0} \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{0/3}^{(A)} \\ \vec{M}_{A_0,0/3}^{(A)} \end{array} \right\} \quad \text{et} \quad \left\{ \mathcal{T}_{0/3}^{(B)} \right\} =_{B_0} \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{0/3}^{(B)} \\ \vec{M}_{B_0,0/3}^{(B)} \end{array} \right\}$$

Hypothèses :

- α et β petits devant 1;
- x et y petits devant L ;
- $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$ petits devant Ω ;
- le poids n'est pas considéré dans cette étude vibratoire.

Question 21 : appliquer le principe fondamental de la dynamique à l'ensemble 3 {arbre+disque} et déterminer les équations différentielles linéarisées du mouvement en x , y , α et β .

Vérifier que le moment cinétique linéarisé s'écrit dans la base 2 : $\vec{\sigma}_{G,3/0} = A_3(\dot{\alpha}\vec{x}_2 + \dot{\beta}\vec{y}_2) + C_3\Omega\vec{z}_2$
Exprimer le résultat sous la forme :

$$\mathbb{M} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{pmatrix} + \mathbb{C} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{pmatrix} + \mathbb{K} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \mathbb{F}$$

en précisant les matrices \mathbb{M} , \mathbb{C} , \mathbb{K} et \mathbb{F} .

Dans un premier temps, l'étude se limite au régime libre ($\vec{F}_{\text{bal}} = \vec{M}_{\text{bal}} = \vec{0}$) en posant la solution sous la forme $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ A \\ B \end{pmatrix} e^{rt}$ où X , Y , A , B et r sont des constantes complexes.

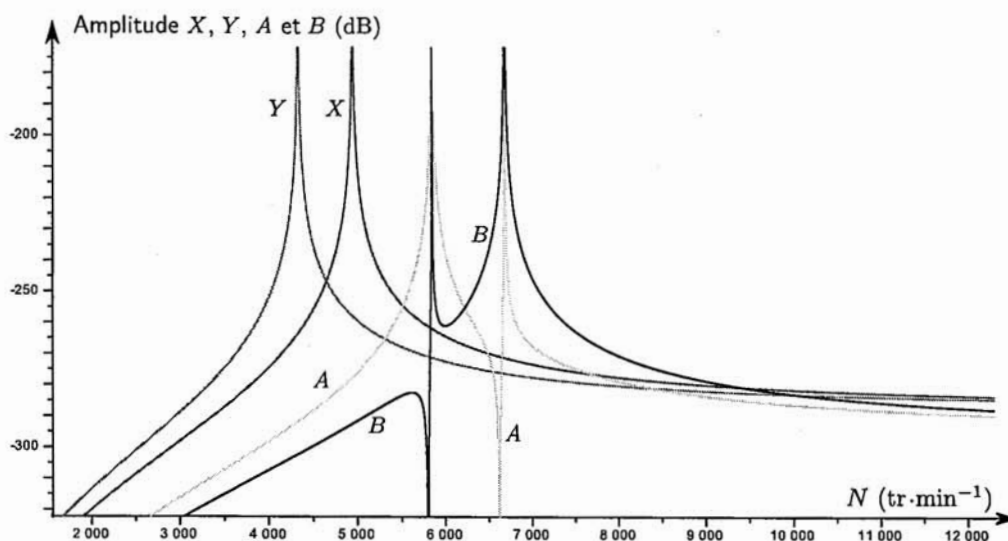


Figure 8 – Amplitudes X , Y , A et B de la réponse à une excitation de balourd (courbes obtenues à partir des expressions demandées question 23).

Question 22 : déterminer le polynôme caractéristique. En déduire, pour chaque mode, la forme de la réponse temporelle et la valeur numérique de la pulsation propre du rotor (dans le cas où $N = 11\,000 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$).

Dans un second temps, l'étude porte sur la réponse à une excitation de balourd avec $\vec{F}_{\text{bal}} = F_0 \vec{x}_3$ et $\vec{M}_{\text{bal}} = M_0 \vec{x}_3$, où $F_0 = m r_0 \Omega^2$ et $M_0 = l F_0$. La forme de la solution proposée est :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \cos \varphi \\ Y \sin \varphi \\ A \cos \varphi \\ B \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Question 23 : déterminer littéralement les amplitudes X, Y, A et B des modes de vibration de l'arbre et justifier à partir de vos expressions la présence ou non de résonances et d'anti-résonances sur la courbe donnée figure 8.

Question 24 : quelles sont les conséquences de la présence d'une part de fréquences de résonance et d'autre part de fréquences d'anti-résonance sur la montée en vitesse du compresseur.

3.2 Modes souples

L'étude porte désormais sur les modes souples de vibration du rotor. L'arbre est assimilé à une poutre mince souple et le disque 3 à un corps rigide encastré sur l'arbre en G . Une base $B_3(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ est liée au disque 3.

L'arbre est guidé par deux appuis supposés infiniment rigides (voir figure 9).

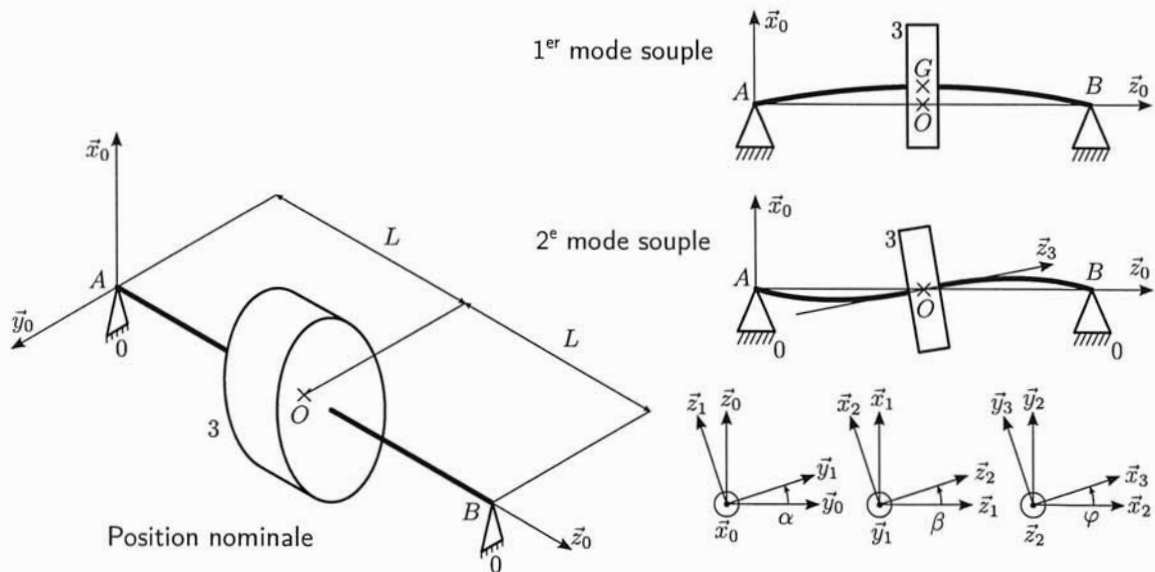


Figure 9 – Paramétrage de l'étude des modes souples.

La rotation du disque 3 est paramétrée par les trois angles α, β et φ . α et β sont petits tandis que $\varphi = \Omega t$ avec Ω supposée constante. La vitesse de rotation Ω est notée N lorsqu'elle est exprimée en $\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$.

Notations :

– G le centre de gravité du disque, $\vec{OG} = x_G \vec{x}_0 + y_G \vec{y}_0$;

– $M_d = 46 \text{ kg}$ la masse du disque ;

– $I_{G,d} = \begin{pmatrix} A_d & 0 & 0 \\ 0 & A_d & 0 \\ 0 & 0 & C_d \end{pmatrix}_{B_3}$ la matrice d'inertie du disque avec $\begin{cases} A_d = 3,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \\ C_d = 0,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{cases}$.

- $E = 200 \text{ GPa}$ le module d'Young de l'arbre ;
- $I = 128.10^{-7} \text{ m}^4$ le moment quadratique en flexion de l'arbre ;
- $S = 127.10^{-4} \text{ m}^2$ la section de l'arbre ;
- $\rho = 7,8.10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ la masse volumique de l'arbre ;
- $L = 0,65 \text{ m}$ la demi-longueur de l'arbre.

Hypothèses :

- α et β petits devant 1 ;
- x et y petits devant L ;
- $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$ petits devant Ω ;
- les sections droites restent normales à la fibre neutre (hypothèse de Bernoulli) ;
- le poids n'est pas considéré dans cette étude vibratoire.

Une approximation de la solution est obtenue par la méthode de Rayleigh-Ritz. La déformée de l'arbre est approchée par les fonctions de forme correspondant aux premiers modes de vibration de la poutre seule. Afin de limiter les calculs, seul le second mode de vibration est déterminé (le premier mode sera donné en fin de partie). La fonction de forme s'écrit :

$$\begin{cases} x(z, t) = q_x(t) \sin(\pi z/L) \\ y(z, t) = q_y(t) \sin(\pi z/L) \end{cases}$$

Dans le cas du second mode souple, le centre de gravité G reste confondu avec O .

Question 25 : montrer que les énergies cinétiques E_{cd} du disque et E_{ca} de l'arbre par rapport au bâti s'écrivent, dans l'hypothèse où les angles α et β restent petits :

$$E_{cd} = \frac{1}{2} A_d \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 [\dot{q}_x^2(t) + \dot{q}_y^2(t)] + \frac{1}{2} C_d \left[\Omega^2 - 2q_x(t)\dot{q}_y(t)\Omega \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \right]$$

$$E_{ca} = \frac{\rho S L}{2} [q_x^2(t) + q_y^2(t)]$$

Question 26 : vérifier que les expressions de $x(z, t)$ et $y(z, t)$ proposées vérifient les conditions aux limites du problème puis montrer que l'énergie de déformation de l'arbre E_{da} s'écrit :

$$E_{da} = \frac{EI\pi^4}{2L^3} [q_x^2(t) + q_y^2(t)]$$

La forme classique des équations de Lagrange est rappelée ci-dessous :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = F_{q_i}$$

Question 27 : déterminer, à l'aide des équations de Lagrange issues des paramètres q_x et q_y , un système de deux équations différentielles en $q_x(t)$ et $q_y(t)$, mis sous la forme :

$$\mathbb{M} \begin{pmatrix} \ddot{q}_x \\ \ddot{q}_y \end{pmatrix} + \mathbb{C} \begin{pmatrix} \dot{q}_x \\ \dot{q}_y \end{pmatrix} + \mathbb{K} \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix} = \mathbb{F}$$

Préciser les expressions des matrices \mathbb{M} , \mathbb{C} , \mathbb{K} et \mathbb{F} .

Pour compléter le calcul précédent, l'équation de Lagrange correspondant au premier mode souple est donnée :

$$(M_d + L\rho S)\ddot{q}_x + \frac{EI\pi^4}{16L^3}q_x = F_1(t)$$

Pour la suite des calculs, utiliser les notations :

$$M = \rho S L + A_d \left(\frac{\pi}{L} \right)^2, \quad C = C_d \left(\frac{\pi}{L} \right)^2, \quad K = EI \frac{\pi^4}{L^3}.$$

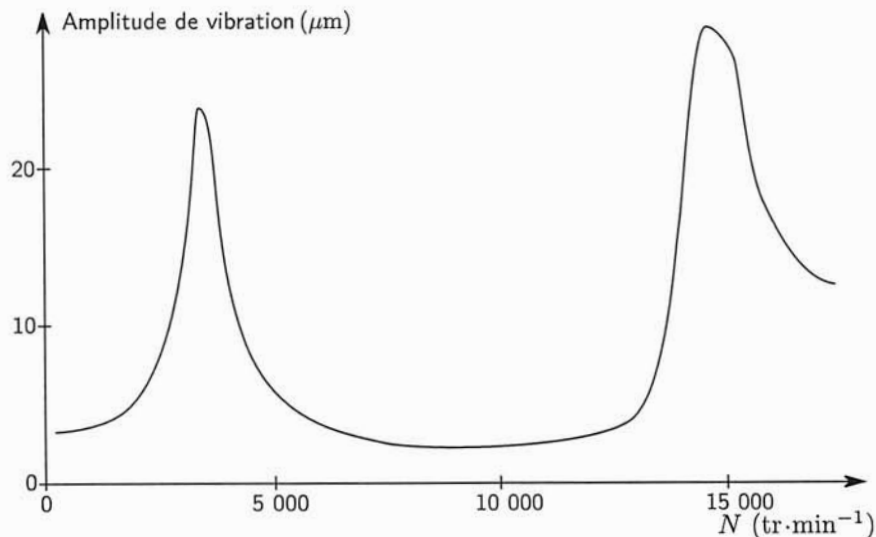


Figure 10 – Diagramme fréquentiel obtenu par simulation.

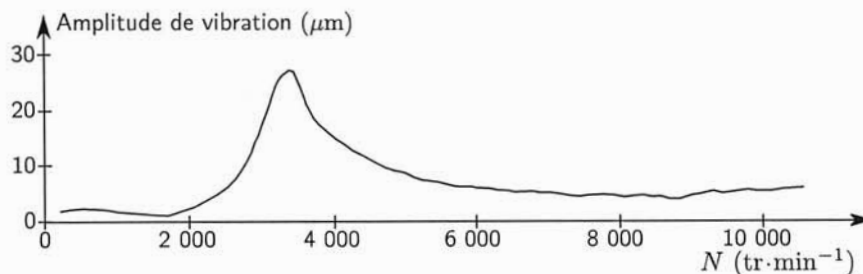


Figure 11 – Diagramme fréquentiel mesuré sur le compresseur.

Question 28 : par une démarche similaire à la partie précédente, déterminer la forme de la réponse en régime libre et calculer les pulsations propres des modes souples (dans le cas où $N = 11\,000 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$).

Question 29 : les courbes figures 10 et 11 montrent un résultat de simulation et un relevé expérimental réalisé sur un compresseur. Confronter les résultats analytiques, les résultats de simulation et les mesures afin de discuter des écarts.

Cette partie a permis d'évaluer le risque vibratoire sur la gamme de vitesse du compresseur. Il a été possible de montrer que le compresseur traverse des modes de résonance lors de la montée en vitesse (ce qui nécessite une accélération rapide du rotor) mais qu'aucun mode de résonance ne perturbe la plage de vitesse de travail.

4 Validation de l'encombrement radial du compresseur

Objectif : valider le choix du diamètre extérieur du diffuseur lisse sur les critères de réduction de la vitesse du gaz et de perte de charge.

Le rôle du diffuseur est de réduire la vitesse du gaz en sortie du disque afin de convertir l'énergie cinétique en enthalpie.

Deux types de diffuseurs sont classiquement utilisés : les diffuseurs à aubes et les diffuseurs lisses (c'est-à-dire sans aube). Dans le second cas, l'augmentation du rayon et les frottements visqueux sur les parois suffisent à réduire significativement la vitesse du gaz avant l'entrée dans la volute (figure 12).

Un diffuseur lisse présente un rendement moindre au voisinage du régime nominal de la pompe, mais meilleur lorsque les conditions d'utilisation s'éloignent du régime nominal.

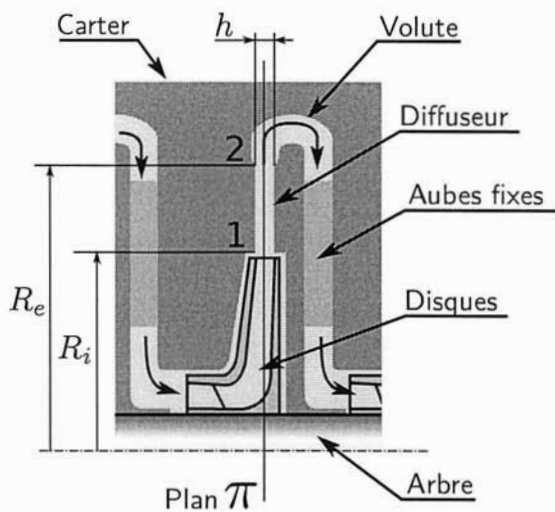


Figure 12 – Schéma en coupe d'un étage.

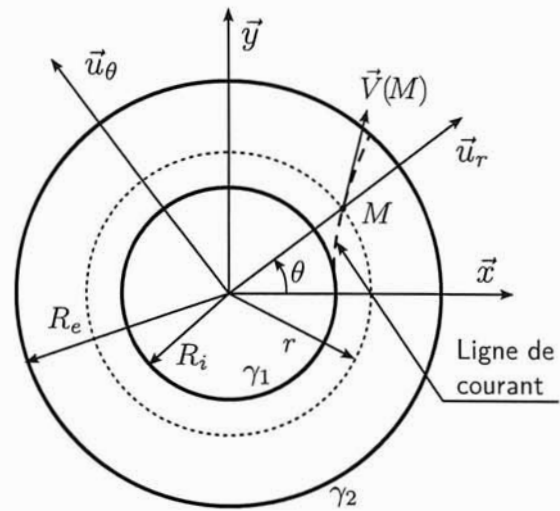


Figure 13 – Paramétrage, dans le plan π , de l'écoulement dans le diffuseur.

Le choix du diamètre extérieur du diffuseur résulte d'un compromis. Un diffuseur de grand diamètre permet un meilleur ralentissement du gaz avant la volute mais conduit aussi à une plus grande perte de charge.

- Cette partie vise à valider la géométrie du diffuseur vis-à-vis de deux critères de performance :
- une conversion de l'énergie cinétique en pression à plus de 60% (pourcentage de diminution du carré de la vitesse entre l'entrée et la sortie du diffuseur) ;
 - une perte de charge due à la viscosité inférieure à 25% de l'augmentation de pression entre l'entrée et la sortie du diffuseur.

L'écoulement dans le diffuseur lisse est modélisé par un écoulement entre deux plans distants de h , depuis le rayon interne R_i , jusqu'au rayon externe R_e (figure 13). Pour simplifier le modèle de l'écoulement, le gaz est assimilé à un fluide parfait incompressible et les frottements visqueux sur les parois (responsables de la perte de charge régulière) sont modélisés par une force volumique \vec{f}_d .

Le débit massique vaut $Q_m = 90,3 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ et on admet que le *glissement* en sortie du disque vaut $\mu_G = V_u/U = 0,5$, où V_u est la composante orthoradiale de la vitesse du fluide et U la vitesse périphérique du disque.

Hypothèses :

- l'écoulement est supposé stationnaire ;
- le fluide est supposé parfait et incompressible ;
- l'action de la pesanteur est négligée ;
- les pertes de charges par viscosité sont modélisées par une force volumique \vec{f}_d .

On note :

- $\rho = 150 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ la masse volumique ;
- $\mu = 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ la viscosité dynamique ;
- \vec{f}_d la force volumique de frottement visqueux ;
- $\varepsilon = 1,5 \text{ } \mu\text{m}$ la rugosité des surfaces du diffuseur ;
- $h = 7 \text{ mm}$ la distance entre les plans ;
- $R_i = 0,173 \text{ m}$ et $R_e = 0,260 \text{ m}$ les rayons intérieur et extérieur du diffuseur ;
- γ_e et γ_s les surfaces d'entrée et de sortie du fluide ;
- vitesse maximale $N_{\max} = 11\,000 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$, soit $\Omega_{\max} = 1\,150 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Le formulaire donné en annexe A.2 rappelle les expressions de certains opérateurs en coordonnées cylindriques.

Question 30 : donner, dans le cas général, les expressions des équations locales de conservation de la masse et de Navier-Stockes.

Question 31 : traduire analytiquement les hypothèses proposées par l'énoncé. Compléter par les différentes hypothèses qui vous paraissent pertinentes dans le cadre du problème posé. Définir précisément les conditions aux limites du problème.

L'abaque de Moody (figure 15) permet de déterminer le coefficient de perte de charge régulière dans un tube. Bien que la géométrie ne soit pas réellement celle d'un tube, cet abaque permet d'estimer la perte de charge régulière dans le diffuseur, en considérant la grandeur caractéristique h comme étant le diamètre du tube.

Question 32 : sachant que la vitesse du fluide dans le diffuseur est comprise entre environ $50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $130 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, déterminer à l'aide de l'abaque de Moody (figure 15) l'expression du frottement visqueux \vec{f}_d en précisant les applications numériques.

Afin de faciliter la résolution à la main des calculs suivants, la forme $\vec{f}_d = -\frac{1}{2}\lambda\vec{V}$ pour le frottement visqueux est adoptée, avec une expression adaptée du coefficient $\lambda = 27\,000 \text{ Pa} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}$.

Question 33 : traduire les équations de conservation de la masse et de Navier-Stockes en coordonnées cylindriques puis simplifier ces équations à l'aide des hypothèses formulées, de façon à obtenir un système de trois équations les plus simples possibles.

Question 34 : résoudre analytiquement le problème pour déterminer le champ de vitesse $\vec{V} = V_r\vec{u}_r + V_\theta\vec{u}_\theta$ ainsi que la variation de pression radiale $\frac{\partial p}{\partial r}$. En déduire la vitesse en sortie du diffuseur puis conclure sur le critère de conversion de l'énergie cinétique en pression du cahier des charges proposé.

Question 35 : dans le cas où $\vec{f}_d = \vec{0}$, intégrer le gradient de pression et déterminer l'augmentation de pression à travers le diffuseur.

Dans le cas où $\vec{f}_d \neq \vec{0}$, l'intégration du gradient de pression nécessite un outil numérique. La différence de perte de charge dans le diffuseur par rapport au cas sans frottement est calculée à 1,1 bar.

Question 36 : conclure sur le critère de perte de charge du cahier des charges proposé.

5 Conclusions

Question 37 : Conclure sur cette étude en dégagant les principaux critères dimensionnants pour un compresseur centrifuge. Présenter votre synthèse sous forme d'un tableau faisant apparaître les critères de performance, les contraintes technologiques, les modèles utilisables et les principaux paramètres dimensionnants.

A Annexes

A.1 Formulaire pour le modèle de l'enveloppe épaisse

Caractéristiques géométriques :

- problème invariant par rotation ;
- le tube est cylindrique, de rayon intérieur r_i et de rayon extérieur r_e .

Caractéristiques du matériau :

- module d'Young E ;
- coefficient de Poisson ν ;
- masse volumique ρ .

Caractéristiques du chargement :

- le rayon intérieur r_i est soumis à une pression p_i ;
- le rayon extérieur r_e est soumis à une pression p_e ;
- le disque est en rotation à vitesse constante ω .

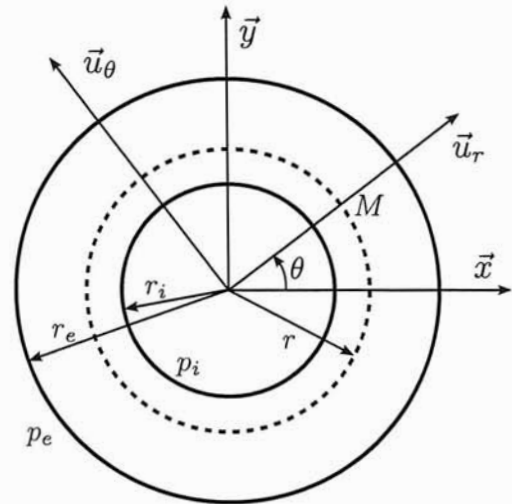


Figure 14 – Paramétrage de l'enveloppe épaisse.

Champ de contraintes :

La résolution des équations d'équilibre donne un champ de contraintes en coordonnées cylindriques de la forme :

$$\sigma_{rr} = A + \frac{B}{r^2} - \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 r^2 \quad \sigma_{\theta\theta} = A - \frac{B}{r^2} + \frac{1+3\nu}{8}\rho\omega^2 r^2 \quad \sigma_{r\theta} = 0$$

Pour une enveloppe épaisse à l'arrêt ($\omega = 0$), soumise à une pression intérieure p_i et extérieure p_e , ces expressions conduisent à la solution :

$$\sigma_{rr} = p_i \frac{r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} \left[1 - \frac{r_e^2}{r^2} \right] - p_e \frac{r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} \left[1 - \frac{r_i^2}{r^2} \right]$$

$$\sigma_{\theta\theta} = p_i \frac{r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} \left[1 + \frac{r_e^2}{r^2} \right] - p_e \frac{r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} \left[1 + \frac{r_i^2}{r^2} \right]$$

Champ de déformations : Les déformations sont liées par les lois de Hooke :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E}(\sigma_{rr} - \nu\sigma_{\theta\theta}) \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E}(\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr})$$

Champ de déplacement :

$$\vec{U} = u_r \vec{u}_r + u_z \vec{u}_z \quad \varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr} \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}$$

A.2 Opérateurs différentiels en coordonnées cylindriques

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z \quad \text{div } \vec{U} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rU_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial U_z}{\partial z}$$

$$\underline{\underline{\text{grad}}} \vec{U} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} - \frac{U_\theta}{r} & \frac{\partial U_r}{\partial z} \\ \frac{\partial U_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{U_r}{r} & \frac{\partial U_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial U_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \theta} & \frac{\partial U_z}{\partial z} \end{pmatrix}_{(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)} \quad \vec{\text{rot}} \vec{U} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial U_z}{\partial \theta} - \frac{\partial(rU_\theta)}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial U_r}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rU_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial U_r}{\partial \theta} \right) \end{pmatrix}_{(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)}$$

$$\vec{\text{div}} \underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} \\ \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{\theta r}}{r} \\ \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} \end{pmatrix}_{(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)}$$

A.3 Abaque de Moody

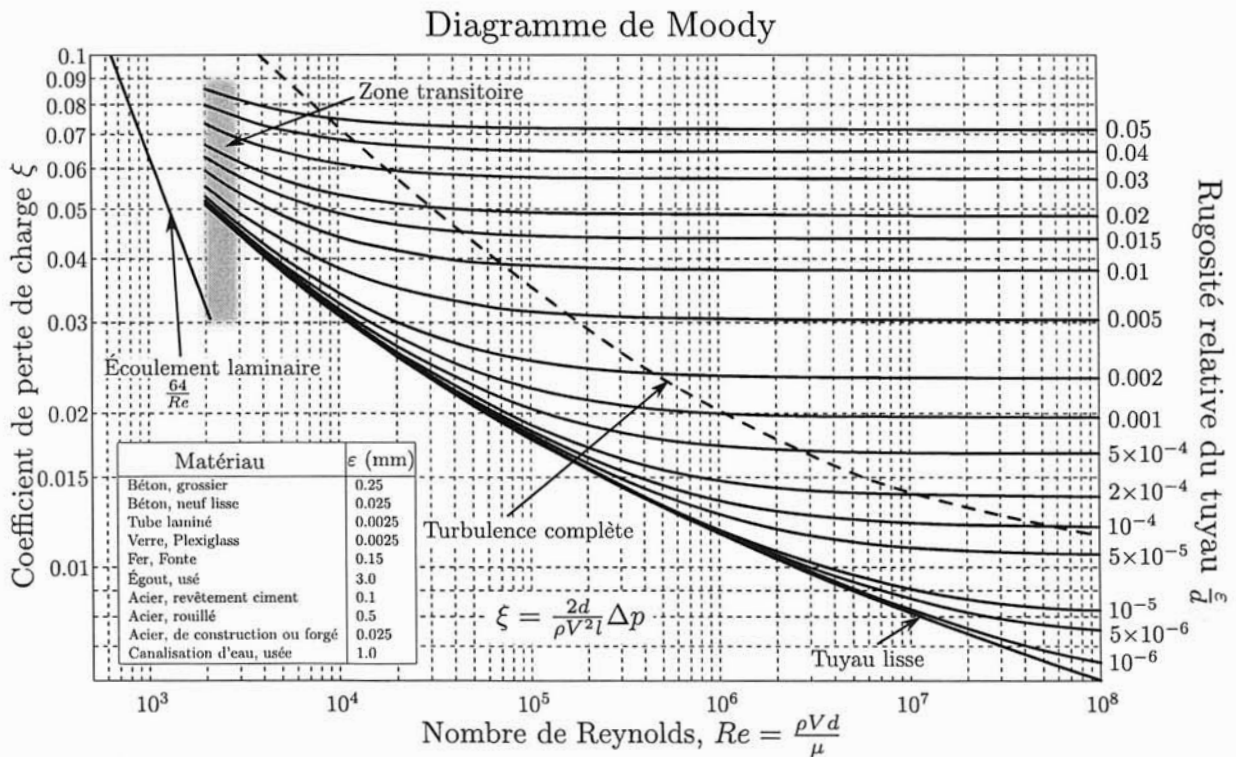


Figure 15 – Abaque de Moody (où Δp est la perte de charge, ξ le coefficient de perte de charge régulière, Re le nombre de Reynolds, d le diamètre du tube, l la longueur du tube, μ la viscosité dynamique, V la vitesse du fluide, ρ la masse volumique et ε la rugosité des parois).