

# Éléments de correction de l'épreuve de sciences industrielles de l'ingénieur

## Question 1

Équipement	P	Q	S	cos(φ)
Dessableur Sotres	326	193	379	0,86
Dessilteur	144	108	180	0,80
Centrifugeuse	90	58	107	0,84
Base vie	32	0	32	1,00
Auxiliaires	14	7	16	0,90
<b>Total</b>	<b>606</b>	<b>366</b>	<b>709</b>	<b>0,86</b>

$$S = \sqrt{(\sum P)^2 + (\sum Q)^2} = \sqrt{606^2 + 366^2} = 709 \text{ kVA}$$

La puissance apparente nominale du groupe électrogène vaut 800 kVA pour une puissance nominale consommée de 709 kVA, le groupe semble bien dimensionné.

## Question 2

$$\underline{I}_1 = \frac{(U_{12} - U_{31})}{\left(\frac{R_m}{g} + j \cdot X_m\right)}, \quad \underline{I}_1 = \frac{(V_1 - V_2 - V_3 + V_1)}{\left(\frac{R_m}{g} + j \cdot X_m\right)} \text{ avec } \underline{V}_1 + \underline{V}_2 + \underline{V}_3 = 0$$

$$\text{d'où } \underline{I}_1 = \frac{3 \cdot V_1}{\left(\frac{R_m}{g} + j \cdot X_m\right)} = \frac{V_1}{Z_{MPND}}$$

$$Z_{MPND} = \frac{\left(\frac{R_m}{g} + j \cdot X_m\right)}{3}$$

## Question 3

pour  $g = 1$  (démarrage) :

$$I = \frac{V'}{\sqrt{\left(R_c + \frac{R_m}{3g}\right)^2 + \left(X_c + \frac{X_m}{3}\right)^2}} = \frac{230}{10^{-3} \sqrt{\left(1,1 + \frac{54}{3}\right)^2 + \left(2,4 + \frac{600}{3}\right)^2}} = 1131 \text{ A}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{X_m \cdot g}{R_m}\right) = \arctan\left(\frac{600}{54}\right) = 85^\circ$$

Au démarrage, le seul moteur du dessableur absorbe à lui tout seul un courant plus important que le courant nominal total de l'installation. Le groupe électrogène sera très fortement surchargé si le démarrage a lieu alors que plusieurs machines sont déjà sous tension.

#### Question 4

$$I = \frac{E}{R_s + R_c + \frac{R_m}{3g} + j \cdot \left( X_s + X_c + \frac{X_m}{3} \right)}$$

Ce qui donne en module :

$$I = \frac{E}{\sqrt{\left( R_s + R_c + \frac{R_m}{3g} \right)^2 + \left( X_s + X_c + \frac{X_m}{3} \right)^2}} = \frac{230}{10^{-3} \sqrt{\left( 40 + 1,1 + \frac{54}{3} \right)^2 + \left( 180 + 2,4 + \frac{600}{3} \right)^2}} = 594 \text{ A}$$

$$\underline{V} = \frac{E \cdot (R_m + j \cdot X_m)}{3R_s + 3R_c + R_m + j \cdot (3X_s + 3X_c + X_m)}$$

$$V = \frac{E \cdot \sqrt{R_m^2 + X_m^2}}{\sqrt{(3R_s + 3R_c + R_m)^2 + (3X_s + 3X_c + X_m)^2}} = \frac{230 \cdot \sqrt{54^2 + 600^2}}{\sqrt{(3 \cdot 40 + 3 \cdot 1,1 + 54)^2 + (3 \cdot 180 + 3 \cdot 2,4 + 600)^2}} = 119 \text{ V}$$

La chute de tension sur le réseau est très importante, elle provoquera un affaiblissement très marqué des appareils d'éclairages alimentés par l'installation et causera de nombreux dysfonctionnements. Cette chute de tension provoquera une baisse importante du couple de démarrage du moteur. Il en résultera une augmentation du temps de démarrage, voire l'impossibilité de démarrer.

#### Question 5

On obtient directement  $Z_{MPNY} = \left( \frac{R_m}{g} + j \cdot X_m \right)$

#### Question 6

$$I' = \frac{V'}{\sqrt{\left( R_c + \frac{R_m}{g} \right)^2 + \left( X_c + X_m \right)^2}} = \frac{230}{10^{-3} \sqrt{(1,1 + 54)^2 + (2,4 + 600)^2}} = 392 \text{ A}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{X_m \cdot g}{R_m}\right) = \arctan\left(\frac{600}{54}\right) = 85^\circ$$

Le courant de démarrage est trois fois plus faible que précédemment. Le gain est très intéressant.

### Question 7

Équipement	P	Q	S	cos(φ)	I
Dessableur Sotres	326	193	379	0,86	547
Dessilteur	144	108	180	0,80	260
Centrifugeuse	24	270	272	0,09	392
Base vie	32	0	32	1,00	46
Auxiliaires	14	7	16	0,90	23
<b>Total</b>	<b>541</b>	<b>579</b>	<b>792</b>	<b>0,68</b>	<b>1143</b>

$$I_2 = \frac{S_{total}}{\sqrt{3} \cdot U} = 1143A$$

Ce courant reste inférieur au courant maximal du groupe électrogène qui vaut 1 270 A. Cette solution est donc utilisable.

### Question 8

$$I = \frac{V}{\sqrt{\left(\frac{R_m}{g}\right)^2 + X_m^2}}$$

$$P_T = 3 \cdot \left(\frac{R_m}{g}\right) \cdot I^2 \quad \text{et} \quad C_{EM} = \frac{P_T}{\Omega_s}$$

$$C_{EM} = \frac{3 \cdot R_m}{g \cdot \Omega_s} \cdot \frac{V^2}{\left(\frac{R_m}{g}\right)^2 + X_m^2}$$

d'où

$$C_{EM} = 3 \cdot R_m \cdot V^2 \cdot \frac{(\Omega_s - \Omega)}{\Omega_s^2 \cdot R_m^2 + (\Omega_s - \Omega)^2 \cdot X_m^2}$$

### Question 9

Pendant le démarrage étoile,  $\Omega = 0$ , le moteur est sous tension réduite d'un facteur  $\sqrt{3}$ .

$$C_{démarrage} = V^2 \cdot \frac{3 \cdot R_m}{\Omega_s \cdot (R_m^2 + X_m^2)}$$

Le couple électromagnétique est 3 fois moins élevé qu'en démarrage direct. Ce couple de démarrage faible impose que le moteur démarre à vide ou avec une charge réduite. C'est le cas des centrifugeuses dont le moment du couple est une fonction quadratique de la vitesse de rotation :

$$C_{charge} = K_\Omega \cdot \Omega^2 + K$$

### Question 10

Le variateur de vitesse permet un démarrage plus progressif, moins brutal pour la machine et la charge entraînée en limitant les à-coups mécaniques. Le courant de démarrage est fortement réduit et le fort appel de courant transitoire lors du passage du couplage étoile au couplage triangle est éliminé.

En revanche, le variateur présente l'inconvénient d'absorber un courant non sinusoïdal, générateur d'harmoniques qui, compte tenu des fortes impédances du groupe électrogène, déformera la tension du réseau.

### Question 11

Pour une pompe, on a :

$$H_p = H_{oha} + A_a \cdot Q_1 + B_a \cdot Q_1^2$$

$$H_c = H_s + M \cdot Q_1^2$$

Le point de fonctionnement correspond à  $H_c = H_p$ .

d'où, en ne conservant que la solution positive :

$$Q_1 = \frac{A_a + \sqrt{A_a^2 - 4 \cdot (M - B_a) \cdot (H_s - H_{oha})}}{2 \cdot (M - B_a)} = \frac{0,1 + \sqrt{0,1^2 - 4 \cdot (2 \cdot 10^{-4} + 1,9 \cdot 10^{-3}) \cdot (5 - 70)}}{2 \cdot (2 \cdot 10^{-4} + 1,9 \cdot 10^{-3})} = 201,3 \text{ m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$$

Pour deux pompes, chacune fournit un débit  $Q = \frac{Q_2}{2}$  où  $Q_2$  est le débit total fourni par les deux pompes. On obtient la caractéristique des deux pompes en parallèle :

$$H_p = H_{oha} + \frac{A_a}{2} \cdot Q_2 + \frac{B_a}{4} \cdot Q_2^2$$

$$H_c = H_s + M \cdot Q_2^2$$

d'où, en ne conservant que la solution positive :

$$Q_2 = \frac{A_a + \sqrt{A_a^2 - 4 \cdot (4 \cdot M - B_a) \cdot (H_s - H_{oha})}}{(4 \cdot M - B_a)} = \frac{0,1 + \sqrt{0,1^2 - 4 \cdot (4 \cdot 2 \cdot 10^{-4} + 1,9 \cdot 10^{-3}) \cdot (5 - 70)}}{(4 \cdot 2 \cdot 10^{-4} + 1,9 \cdot 10^{-3})} = 349,6 \text{ m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$$

On applique le même raisonnement pour trois pompes fournissant chacune un tiers du débit total  $Q_3$ .

$$H_p = H_{oha} + \frac{A_a}{3} \cdot Q_3 + \frac{B_a}{9} \cdot Q_3^2$$

$$H_c = H_s + M \cdot Q_3^2$$

d'où, en ne conservant que la solution positive :

$$Q_3 = \frac{3 \cdot A_a + 3 \cdot \sqrt{A_a^2 - 4 \cdot (9 \cdot M - B_a) \cdot (H_s - H_{oha})}}{2 \cdot (9 \cdot M - B_a)}$$

$$Q_3 = \frac{3 \cdot 0,1 + 3 \cdot \sqrt{0,1^2 - 4 \cdot (9 \cdot 2 \cdot 10^{-4} + 1,9 \cdot 10^{-3}) \cdot (5 - 70)}}{(9 \cdot 2 \cdot 10^{-4} + 1,9 \cdot 10^{-3})} = 440,2 \text{ m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$$

### Question 12

On cherche la caractéristique manométrique de la pompe entraînée à une vitesse de rotation différente de la valeur nominale.

D'après les lois de similitude, en posant  $\mu_1 = \mu_2$  et  $\sigma_1 = \sigma_2$  on obtient :

$$\frac{g \cdot H_1}{\omega_1^2 \cdot R_1^2} = \frac{g \cdot H_2}{\omega_2^2 \cdot R_2^2} \quad \text{et} \quad \frac{Q_1}{\omega_1 \cdot R_1^3} = \frac{Q_2}{\omega_2 \cdot R_2^3}$$

C'est la même pompe donc le rayon de la roue ne change pas :

$$H_2 = \frac{H_1 \cdot \omega_2^2}{\omega_1^2} \quad \text{et} \quad Q_2 = \frac{Q_1 \cdot \omega_2}{\omega_1}$$

$$H_p = \frac{\omega_x^2}{\omega_N^2} \left( H_{ohe} + A_e \cdot \frac{\omega_N}{\omega_x} \cdot Q_x + B_e \cdot \frac{\omega_N^2}{\omega_x^2} \cdot Q_x^2 \right)$$

$$H_p = H_{ohe} \cdot \frac{\omega_x^2}{\omega_N^2} + A_e \cdot \frac{\omega_x}{\omega_N} \cdot Q_x + B_e \cdot Q_x^2$$

$$H_c = H_s + M \cdot Q_x^2$$

dont on tire  $\omega_x$  en résolvant l'équation :

$$H_{ohe} \cdot \frac{\omega_x^2}{\omega_N^2} + A_e \cdot \frac{\omega_x}{\omega_N} \cdot Q_x + (B_e - M) \cdot Q_x^2 - H_s = 0$$

$$\omega_x = \frac{\left( \sqrt{A_e^2 \cdot Q_x^2 - 4 \cdot H_{ohe} \cdot (B_e \cdot Q_x^2 - M \cdot Q_x^2 - H_s)} - A_e \cdot Q_x \right) \cdot \omega_N}{2 \cdot H_{ohe}}$$

#### Application numérique

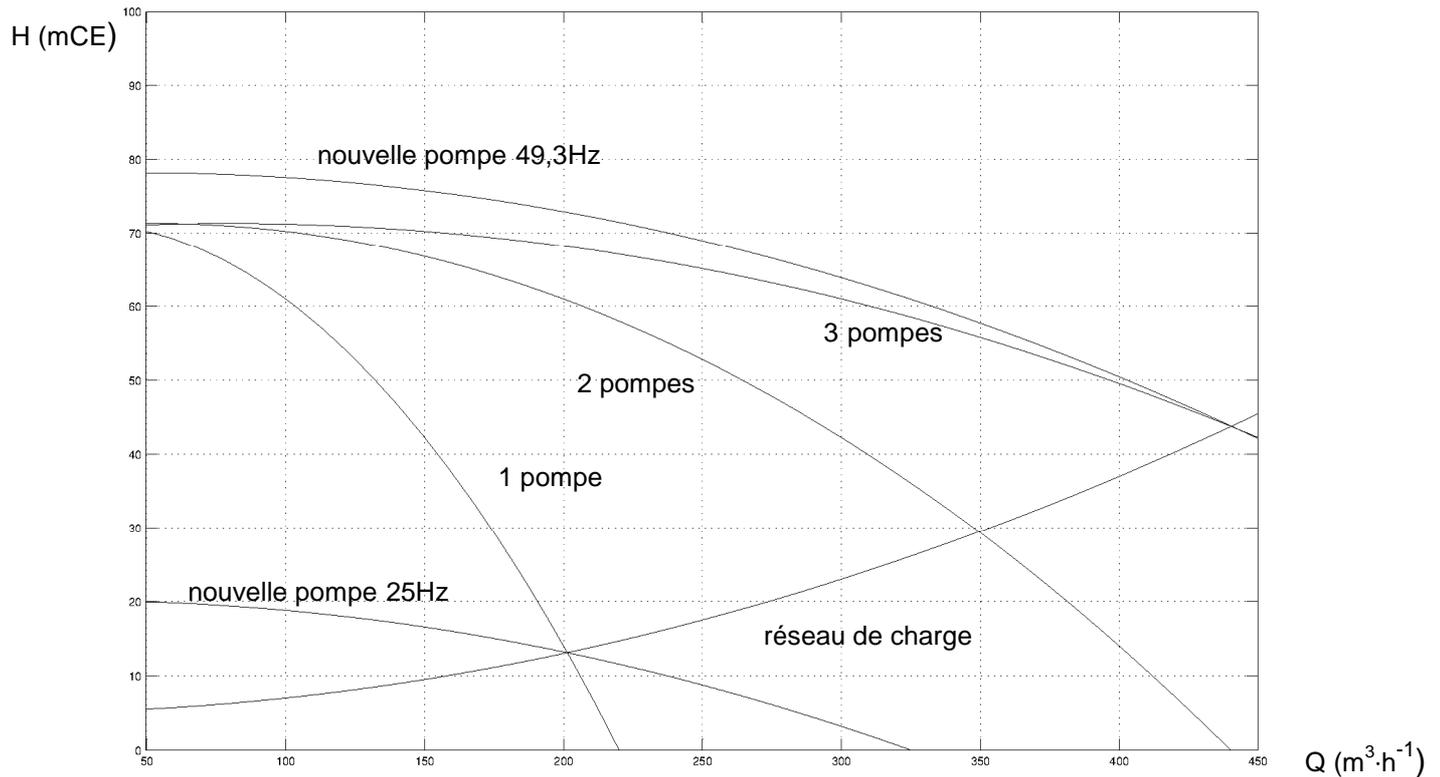
Pour  $Q_x = 200 \text{ m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$ , on obtient

$$\omega_x = \frac{\left( \sqrt{0,02^2 \cdot 200^2 - 4 \cdot 80 \cdot (-2,2 \cdot 10^{-4} \cdot 200^2 - 2 \cdot 10^{-4} \cdot 200^2 - 5)} - 0,02 \cdot 200 \right) \cdot 50}{2 \cdot 80} = 24,9 \text{ Hz}$$

Pour  $Q_x = 450 \text{ m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$ , on obtient

$$\omega_x = \frac{\left( \sqrt{0,02^2 \cdot 450^2 - 4 \cdot 80 \cdot (-2,2 \cdot 10^{-4} \cdot 450^2 - 2 \cdot 10^{-4} \cdot 450^2 - 5)} - 0,02 \cdot 450 \right) \cdot 50}{2 \cdot 80} = 50,3 \text{ Hz}$$

La nouvelle pompe, alimentée entre 25 et 50 Hz, permet bien de couvrir la même plage de débit que le gradin (ensemble) de trois pompes.



### Question 13

Le débit d'eau  $q$  pénétrant dans un cylindre d'aire latérale  $S$  est donné par la relation  $q = v \times S$   
D'où :

$$q = k \frac{dz}{dr} \cdot 2\pi r z$$

### Question 14

L'intégration de l'expression précédente entre  $r_0$  et  $R$  d'une part et  $h_0$  et  $H_0$  d'autre part conduit à :

$$q \int_{r_0}^R \frac{dr}{r} = 2\pi k \int_{h_0}^{H_0} z dz$$

et donc :

$$q = \pi k \frac{H_0^2 - h_0^2}{\ln \frac{R}{r_0}}$$

Si nous calculons maintenant entre  $r$  et  $R$  d'une part et entre  $z(r)$  et  $H_0$  d'autre part, nous obtenons :

$$q = \pi k \frac{H_0^2 - z^2(r)}{\ln \frac{R}{r}}$$

puis, en utilisant les expressions ci-dessous,

$$H_0 - z(r) = s(r) \text{ et } H_0 + z(r) = 2 \left( H_0 - \frac{H_0 - z(r)}{2} \right) = 2 \left( H_0 - \frac{s(r)}{2} \right)$$

Comme  $q = \pi k \frac{(H_0 - z(r))(H_0 + z(r))}{\ln \frac{R}{r}}$ , alors on en déduit :

$$q = 2\pi k \frac{s(r) \left( H_0 - \frac{s(r)}{2} \right)}{\ln \frac{R}{r}}$$

Puisque  $H_0 \geq s(r)$  alors  $q = 2\pi k H_0 \frac{s(r)}{\ln \frac{R}{r}}$ .

D'où la relation souhaitée :  $s(r) = \frac{q}{2\pi k H_0} \ln \frac{R}{r}$

### Question 15

Si l'on considère les puits dont l'ordonnée est positive, manifestement, les points les plus éloignés de la fouille sont les points  $M_3(-55, -15)$  et  $M_4(55, -15)$ . Le même raisonnement s'opère en considérant les puits dont l'ordonnée est négative. Les quatre coins du rectangle sont donc les points où le rabattement est le plus faible.

### Question 16

Ces quatre pompes étant les pompes les plus proches des points où le rabattement sera le plus faible, il est donc logique que les pompes  $P_1, P_4, P_5, P_8$  soient choisies en priorité pour optimiser le pompage. On pourrait vérifier que le débit (supposé identique) d'une de ces pompes par rapport à l'autre choix serait plus faible.

### Question 17

On se place, par exemple, au point  $M_2(55, 15)$ .

Le rabattement total à réaliser en ce point a pour valeur numérique :

$$s = 68,1 - 56,7 + 2 = 13,4 \text{ m}$$

Soit  $q$  le débit identique de chaque pompe. Soit  $s$  le rabattement souhaité. Chaque pompe apportera un rabattement en fonction de sa position dans la fouille. On aura donc au total :

$$s = \frac{q}{2\pi k H_0} \sum_{i \in \{1,4,5,8\}} \ln \frac{R}{r_{ij}}$$

Le débit d'une pompe est donc donné par :

$$q = \frac{2\pi k H_0 s}{\sum_{i \in \{1,4,5,8\}} \ln \frac{R}{r_{ij}}}$$

Numériquement, on trouve :

$$q = \frac{2\pi \times 10^{-6} \times 68,1 \times 13,4}{\ln \frac{200}{\sqrt{(55+33)^2 + (15-9)^2}} + \ln \frac{200}{\sqrt{(55-33)^2 + (15-9)^2}} + \ln \frac{200}{\sqrt{(55-33)^2 + (15+9)^2}} + \ln \frac{200}{\sqrt{(55+33)^2 + (15+9)^2}}}$$

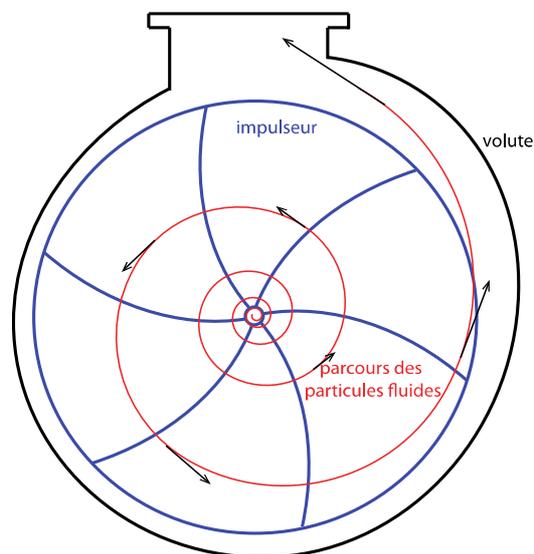
$$= 1,025 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

$$= 3,7 \text{ m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$$

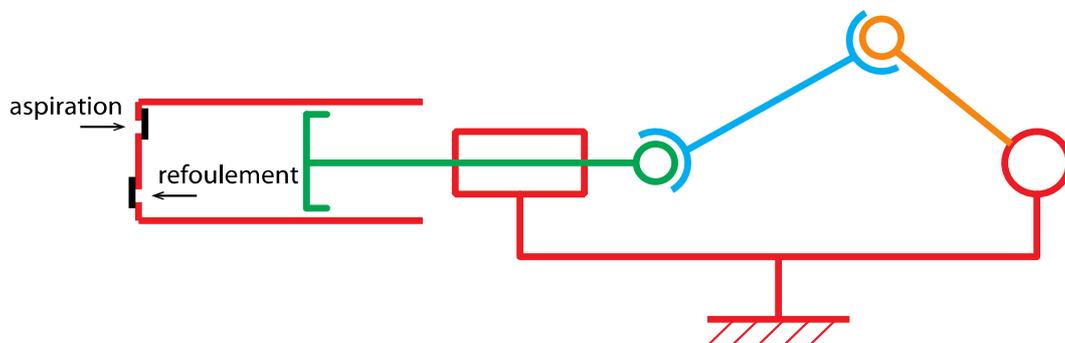
$$q = 3,7 \text{ m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$$

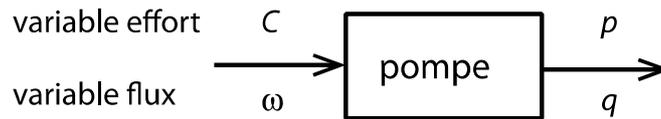
### Question 18

Une pompe centrifuge est une machine rotative ouverte qui déplace un liquide en le « forçant » au travers d'une roue à aubes ou d'une hélice appelée impulseur. C'est le type de pompe industrielle le plus commun. Par l'effet de la rotation de l'impulseur, le fluide pompé est aspiré axialement dans la pompe, puis accéléré radialement dans la volute et enfin refoulé tangentiellement. Ce déplacement des particules fluides est dû au champ de forces généré par l'accélération centrifuge du rotor.



L'autre famille de pompes est appelée pompes volumétriques. Elle est basée sur le déplacement d'un fluide dû à une variation du volume de la pompe.





### Question 19

On a :  $q = 4 \text{ m}^3 \cdot \text{h}^{-1} = \frac{4}{3600} = 1,11 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$

Calcul de la vitesse du fluide à l'aspiration :  $v_{asp} = \frac{4q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 1,11 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0,06^2} = 0,39 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Calcul de la vitesse du fluide au refoulement :  $v_{ref} = \frac{4q}{\pi d^2} = \frac{4 \times 1,11 \times 10^{-3}}{\pi \times 0,03^2} = 1,57 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Calcul des pertes de charges

Nombres de Reynolds

- à l'aspiration,  $Re_{asp} = \frac{v_{asp} d}{\nu} = \frac{0,39 \cdot 0,06}{10^{-6}} = 23400$ , régime turbulent ;
- au refoulement,  $Re_{ref} = \frac{v_{ref} d}{\nu} = \frac{1,57 \cdot 0,03}{10^{-6}} = 47100$ , régime turbulent.

Pertes de charges régulières :

- à l'aspiration,  $\frac{1}{\sqrt{\lambda_{asp}}} = -2 \log \frac{0,05 \cdot 10^{-3}}{3,71 \cdot 0,06} \Rightarrow \lambda_{asp} \approx 0,019$  ;
- au refoulement,  $\frac{1}{\sqrt{\lambda_{ref}}} = -2 \log \frac{0,05 \cdot 10^{-3}}{3,71 \cdot 0,03} \Rightarrow \lambda_{ref} \approx 0,022$ .

On en déduit :

$$\Delta H_r = 0,019 \frac{0,8}{0,06} \frac{0,39^2}{2 \cdot 9,81} + 0,022 \frac{23,5}{0,03} \frac{1,57^2}{2 \cdot 9,81} = 2,17 \text{ m}$$

Pertes de charges singulières :

$$\Delta H_s = (4 + 0,3) \frac{0,39^2}{2 \cdot 9,81} + (0,3 + 0,4 + 0,3) \frac{1,57^2}{2 \cdot 9,81} = 0,16 \text{ m}$$

### Question 20

Le théorème de Bernoulli généralisé s'écrit :  $H_A = H_B + \Delta H_r + \Delta H_s - H_{pompe}$

On a, en prenant pour origine des hauteurs, la position du point A, et pour origine des pressions la pression atmosphérique  $p_{atm}$  :  $H_A = \frac{p_A}{\rho g} = z_{libre} - z_A = L_0 = 0,8 \text{ m}$

et  $H_B = \frac{p_{atm}}{\rho g} + z_B = 0,8 + 13,5 = 14,3 \text{ m}$

et donc :  $H_{pompe} = H_B - H_A + \Delta H_r + \Delta H_s = 14,3 - 0,8 + 2,17 + 0,16 \approx 15,8 \text{ m}$

AN :

$$H_{pompe} = 14,3 - 0,8 + 2,17 + 0,16 \approx 15,8 \text{ m}$$

### Question 21

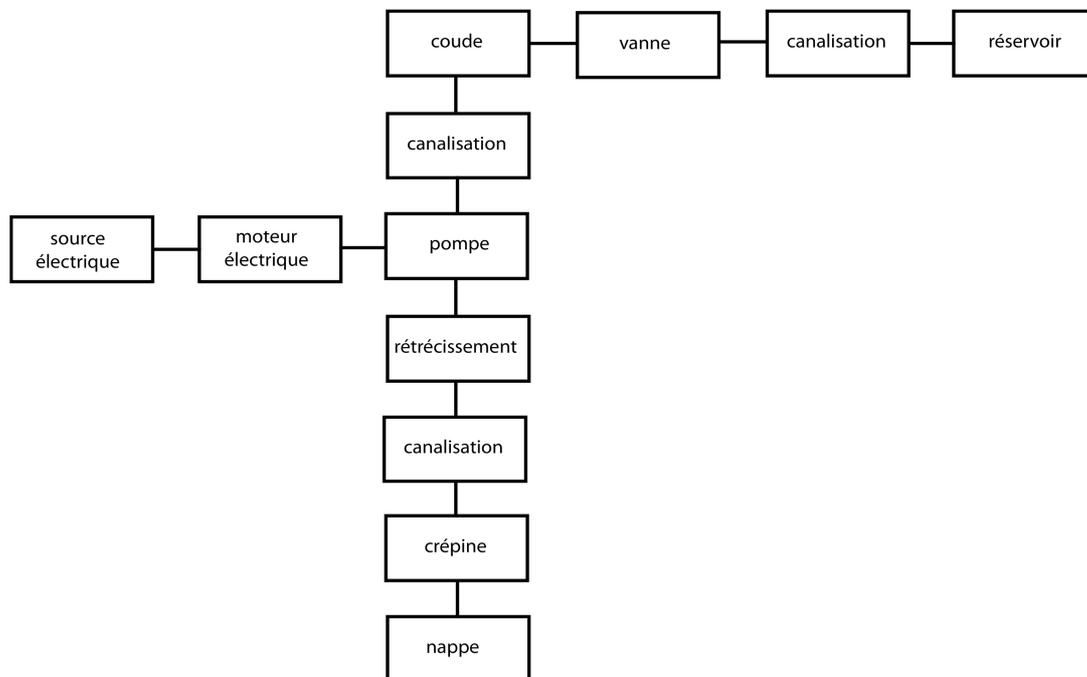
La puissance hydraulique est donnée par  $P_H = p \cdot q = \rho \cdot g \cdot H_{pompe} \cdot q$

$$P_H = 1000 \times 9,81 \times 15,8 \times 1,11 \times 10^{-3} = 172 \text{ W}$$

On en déduit la puissance électrique nécessaire pour ce débit :

$$P_{el} = \frac{P_{hy}}{\eta} = \frac{172}{0,85} = 203 \text{ W}$$

### Question 22



### Question 23

Élément	Type	Paramètres	Grandeurs en entrée	Grandeurs en sortie
moteur	source électrique	gain, constante de temps	tension, intensité	couple, vitesse angulaire
vanne	résistance hydraulique	gain	pression, débit	pression, débit
crépine	résistance hydraulique	gain	pression, débit	pression, débit
canalisation	résistance hydraulique	gain	pression, débit	pression, débit
rétrécissement	résistance hydraulique	gain	pression, débit	pression, débit

coude	résistance hydraulique	gain	pression, débit	pression, débit
pompe	source hydraulique	cylindrée, rendement	couple, vitesse angulaire	pression, débit

Analogie

Grandeur hydraulique	Grandeur thermique
Pression	Température
Débit	Flux d'entropie

### Question 24

Les grandeurs caractéristiques utilisées pour le choix des pompes dans les abaques proposés sont le débit (en  $\text{m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$ ), la hauteur totale (en m) et la puissance électrique (en kW). Les valeurs trouvées aux questions précédentes sont respectivement, par pompe, un débit  $q \approx 4 \text{ m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$ , une hauteur totale de 14,3 m et une puissance électrique  $P_{elec} \approx 0,2 \text{ kW}$ . Avec le facteur de sécurité de 2 sur la hauteur et le débit, plusieurs pompes proposées permettent d'atteindre ces valeurs. La puissance électrique minimale de ces pompes (0,37 kW) est même supérieure à ce qui est nécessaire. Bien évidemment le coût de location est également à prendre en compte et cette dernière remarque nous conduit à choisir la pompe référencée Telsar Hydro 4", FS-98D. Ce type de pompe couvre le besoin d'exhaure souhaité.

### Question 25

$$M_z(x) = -\frac{\rho}{6L}(L-x)^3$$

### Question 26 :

On utilise la relation moment-courbure :

$$E \cdot I_{Gz} \cdot y''(x) = -\frac{\rho}{6 \cdot L}(L-x)^3$$

$$E \cdot I_{Gz} \cdot y'(x) = \frac{\rho}{24 \cdot L}(L-x)^4 + A$$

$$E \cdot I_{Gz} \cdot y(x) = -\frac{\rho}{120L}(L-x)^5 + A \cdot x + B$$

Les conditions aux limites permettent de déterminer les deux constantes A et B.

Il y a un encastrement en  $x=0$ , donc :  $y(0)=0$  et  $y'(0)=0$  d'où :  $A = -\frac{\rho L^3}{24}$  et  $B = \frac{\rho L^4}{120}$ .

L'expression de la déformée est :  $y(x) = \frac{\rho}{E \cdot I_{Gz}} \left( -\frac{(L-x)^5}{120L} - \frac{\rho L^3 x}{24} + \frac{\rho L^4}{120} \right)$

La flèche est maximale pour  $x=L$  soit  $f_{\max} = -\frac{\rho L^4}{30 \cdot E \cdot I_{Gz}} = -\frac{66,6 \cdot 10^3 \cdot 10^4}{30 \cdot 30\,000 \cdot 10^6 \cdot I_{Gz}}$  avec

$$I_{Gz} = \frac{h^3 b}{12} = \frac{0,62^3 \cdot 1}{12} = 0,01986 \text{ m}^4, \text{ d'où } f_{\max} = 0,037 \text{ m}$$

### Question 27

$$M_{fz}^{\max} = M_{fz}^{\max}(0) = -\frac{\rho}{6} L^2$$

Application numérique :  $M_{fz}^{\max} = 1110 \text{ kN} \cdot \text{m}$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{fz} \cdot v}{I_{Gz}} = \frac{1110 \cdot 10^3 \cdot v}{0,01986} \text{ avec } v = \frac{0,62}{2} = 0,31 \text{ m}$$

Application numérique :  $\sigma_{\max} = 17326 \text{ kPa} = 17,3 \text{ MPa}$

### Question 28

$$x \in [0, b] \text{ et } M_{fz}(x) = -\frac{\rho}{6L} (L-x)^3 + F(b-x)$$

$$x \in [b, L] \text{ et } M_{fz}(x) = -\frac{\rho}{6L} (L-x)^3$$

### Question 29

Pour  $x \in [0, b]$  les équations de la déformée sont :

$$\begin{cases} E \cdot I_{Gz} \cdot y_1''(x) = -\frac{\rho}{6L} (L-x)^3 + F(b-x) \\ E \cdot I_{Gz} \cdot y_1'(x) = \frac{\rho}{24L} (L-x)^4 - \frac{F}{2} (b-x)^2 + A_1 \\ E \cdot I_{Gz} \cdot y_1(x) = -\frac{\rho}{120L} (L-x)^5 + \frac{F}{6} (b-x)^3 + A_1 \cdot x + B_1 \end{cases}$$

pour  $x \in [b, L]$  les équations de la déformée sont :

$$\begin{cases} E \cdot I_{Gz} \cdot y_2''(x) = -\frac{\rho}{6L} (L-x)^3 \\ E \cdot I_{Gz} \cdot y_2'(x) = \frac{\rho}{24L} (L-x)^4 + A_2 \\ E \cdot I_{Gz} \cdot y_2(x) = -\frac{\rho}{120L} (L-x)^5 + A_2 \cdot x + B_2 \end{cases}$$

Avec  $A_1, B_1, A_2, B_2$  les constantes d'intégration.

### Question 30

Aux conditions aux limites :  $y(0) = 0$  et  $y'(0) = 0$  (encastrement à l'origine) et  $y(b) = 0$  (appui en  $x = b$ )

$$\text{d'où le système suivant : } \begin{cases} 0 = -\frac{\rho}{120L} L^5 + \frac{F}{6} b^3 + B_1 \\ 0 = \frac{\rho}{24L} L^4 - \frac{F}{2} b^2 + A_1 \\ 0 = -\frac{\rho}{120L} (L-b)^5 + A_1 b + B_1 \end{cases} \quad \text{d'où } F = \frac{\rho}{8b^3} \left( -\frac{L^4}{5} + bL^3 + \frac{(L-b)^5}{5L} \right)$$

$$F = \frac{\rho}{8b^3} \left( -\frac{L^4}{5} + bL^3 + \frac{(L-b)^5}{5L} \right) = \frac{66,6 \cdot 10^3}{8 \cdot 7^3} \left( -\frac{10^4}{5} + 7 \cdot 10^3 + \frac{(3)^5}{5 \cdot 10} \right) = 24,27 \cdot (-2000 + 7000 + 4,86) = 121,5 \text{ kN}$$

### Question 31

Même réponse qu'à la question 28.

### Question 32

Le cas « simplement encastré » correspond à la série 2.

Le cas « buton parfaitement rigide » correspond à la série 1.

Contrainte maximale dans la poutre :

Le moment fléchissant est maximal en valeur absolue à l'encastrement, soit pour  $x = 0$  :

$$M_{ix}^{\max} = -259,7 \text{ kN}\cdot\text{m}.$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{ix} \cdot v}{I_{Gz}} = \frac{259,7 \cdot 10^3 \cdot v}{0,01986} \text{ avec } v = \frac{-0,62}{2} = -0,31 \text{ m}$$

$$\sigma_{\max} = 4\,054 \text{ kN/m}^2 = 4,05 \text{ MPa}$$

### Question 33

Le cas « simplement encastré » correspond à la série 2.

Le cas « buton parfaitement rigide » correspond à la série 1.

Le cas « buton souple » correspond à la série 3.

### Question 34

Les équations à utiliser sont les mêmes que celles obtenues à la question 29.

Les conditions aux limites deviennent :  $y(0) = 0$  et  $y'(0) = 0$  (encastrement à l'origine) et

$$y(b) = \frac{-F}{K} \text{ (appui élastique en } x = b\text{)}.$$

$$\text{d'où le système suivant : } \begin{cases} 0 = -\frac{p}{120L} L^5 + \frac{F}{6} b^3 + B_1 \\ 0 = \frac{p}{24L} L^4 - \frac{F}{2} b^2 + A_1 \\ E \cdot I_{Gz} \cdot \frac{F}{K} = -\frac{p}{120L} (L-b)^5 + A_1 b + B_1 \end{cases} \quad \text{d'où } F = \frac{\frac{p}{24} \left( \frac{(L-b)^5}{5L} + bL^3 - \frac{L^4}{5} \right)}{\frac{b^3}{3} + \frac{E \cdot I_{Gz}}{K}}$$

$$F = \frac{\frac{p}{24} \left( \frac{(L-b)^5}{5L} + bL^3 - \frac{L^4}{5} \right)}{\frac{b^3}{3} + \frac{E \cdot I_{Gz}}{K}} = \frac{\frac{66,6 \cdot 10^3}{24} \left( \frac{3^5}{50} + 7 \cdot 10^3 - \frac{10^4}{5} \right)}{\frac{7^3}{3} + \frac{30000 \cdot 10^6 \cdot 0,01986}{10^6}} = \frac{2775 \cdot (4,86 + 7000 - 2000)}{114,3 + 595,8}$$

$$F = 19,5 \text{ kN}$$

### Question 35

Le premier calcul, correspondant à une paroi simplement encastrée, conduit à des contraintes de traction élevées et à un déplacement non négligeable ( $>L/300$ ). La mise en place d'un buton pendant la phase de construction permet de réduire de façon considérable les contraintes maximales si l'on considère que le buton est parfaitement rigide. En fait, le buton est souple, mais un calcul des contraintes montrerait que le bénéfice pour les contraintes et les déplacements reste très intéressant.

La faiblesse des modèles proposés ici, réside dans le choix de modéliser la liaison en  $x = 0$  par un encastrement parfait, car il conduit à un moment (et donc des contraintes) très élevé dans cette zone. En effet, la liaison paroi moulée/sol est plus complexe et il faudrait la représenter de façon plus réaliste pour éviter la concentration de contraintes liée à la modélisation. On verrait alors que le système constructif proposé est cohérent ce qui explique qu'il soit très fréquemment utilisé.

### Question 36

Sous le point de vue de la dynamique avec une modélisation plane :

- nombre d'équations données par le principe de la mécanique,  $E_S = 5 \times 3 = 15$  ;
- nombre d'inconnues de liaison  $I_S = 12$  ;
- mobilités du mécanisme,  $m = 5$  ;
- rang du système d'équations données par le principe de la mécanique,  $r_S = E_S - m = 10$ .

D'où le degré d'hyperstatisme :  $h = r_S - I_S = 2$ . Le modèle n'est donc pas résoluble.

Il faudra donc faire des hypothèses supplémentaires et se donner deux équations supplémentaires :

$$Y_1 = Y_2 \text{ et } Y_3 = Y_4.$$

### Question 37

On isole le camion : SM5.

Inventaire des actions mécaniques agissant sur SM5.

Action à distance

$$\text{En G : } \overline{PG} = -m.g.\sin(\alpha).\overline{x} - m.g.\cos(\alpha).\overline{y}$$

Actions de liaison

4 contacts roues/sol : en  $I_1, I_2, I_3$  et  $I_4$ ,

$$\text{Contact en } I_i : \mathcal{T}_{0 \rightarrow i} = \left\{ \overline{F}_{0 \rightarrow i}, \overline{M}_{I_i 0 \rightarrow i} \right\}_{I_i} = \begin{cases} X_i \overline{x} + Y_i \overline{y} \\ N_i \overline{z} \end{cases} \text{ avec } i = [1, 2, 3, 4]$$

Nombre d'inconnues de liaisons :  $3 \times 4 = 12$  :  $X_i, Y_i, Z_i$  avec  $i = [1, 2, 3, 4]$

Nombre de mobilités du mécanisme SM5

Pour inventorier, les mobilités du mécanisme camion, il faut donner les vecteurs suivants :

$$\overline{l_1 G} = a\overline{x} + h\overline{y}, \overline{l_3 G} = -d\overline{x} + h\overline{y}, \overline{l_1 I_2} = c\overline{x}, \overline{l_3 I_4} = c\overline{x} \text{ et } \overline{l_2 I_3} = b\overline{x} \text{ et angle de la pente est } \alpha = (\overline{x}, \overline{x_0})$$

Coordonnées des centres d'inertie de chaque solide isolé :	Vecteur rotation de chaque solide isolé :
$\overline{O_0 G} = x(t).\overline{x} + h\overline{y}$	$\overline{\Omega}_{5/0} = \overline{0}$
$\overline{O_0 O_1} = (x(t) - a).\overline{x} + R.\overline{y}$	$\overline{\Omega}_{1/5} + \overline{\Omega}_{5/0} = \overline{\Omega}_{1/0} = \dot{\theta}_1(t).\overline{z}$
$\overline{O_0 O_2} = (x(t) - a + c).\overline{x} + R.\overline{y}$	$\overline{\Omega}_{2/5} + \overline{\Omega}_{5/0} = \overline{\Omega}_{2/0} = \dot{\theta}_2(t).\overline{z}$
$\overline{O_0 O_3} = (x(t) + d).\overline{x} + R.\overline{y}$	$\overline{\Omega}_{3/5} + \overline{\Omega}_{5/0} = \overline{\Omega}_{3/0} = \dot{\theta}_3(t).\overline{z}$
$\overline{O_0 O_4} = (x(t) + d + c).\overline{x} + R.\overline{y}$	$\overline{\Omega}_{4/5} + \overline{\Omega}_{5/0} = \overline{\Omega}_{4/0} = \dot{\theta}_4(t).\overline{z}$

Le mécanisme étudié a donc 5 mobilités :  $x(t), \theta_1(t), \theta_2(t), \theta_3(t)$  et  $\theta_4(t)$ .

Nombre d'équations qu'il est possible d'obtenir par le principe de la mécanique et le modèle du contact sol/roues fournis sur le document technique DT2

Lois de Coulomb : Contact en $I_1$ et $I_2$ avec $i = [1, 2]$	Lois de Coulomb : Contact en $I_3$ et $I_4$ avec $i = [3, 4]$
$\overline{V}_{I_i \in i/0} = \overline{0} \quad (1)$	$\overline{V}_{I_i \in i/0} = \overline{0} \quad (1)$
$\overline{F}_{0 \rightarrow i} \cdot \overline{V}_{I_i \in i/0} \leq 0 \quad (2)$	$\overline{F}_{0 \rightarrow i} \cdot \overline{V}_{I_i \in i/0} \leq 0 \quad (2)$

$\tan \varphi = \left  \frac{X_i}{Y_i} \right  \leq \tan \varphi_a = f_a \quad (3)$ <p>Les relations (2) et (3) donnent dans le cas des points <math>I_1, I_2</math> :</p> $\frac{X_i}{Y_i} \leq \tan \varphi_a = f_a \quad (2.3)$ <p>À la limite de l'adhérence (ou du glissement), la relation (3) devient : <math>\tan \varphi = \left  \frac{X_i}{Y_i} \right  = \tan \varphi_a = f_a</math></p> <p style="text-align: center;">(3)</p>	$\tan \varphi = \left  \frac{X_i}{Y_i} \right  \leq \tan \varphi_a = f_a \quad (3)$ <p>Les relations (2) et (3) donnent dans le cas des points <math>I_1, I_2</math> :</p> $-\frac{X_i}{Y_i} \leq \tan \varphi_a = f_a \quad (2.3)$
Frottement de roulement : contact en $I_1$ et $I_2$ $N_{0i} = \delta Y_{0i}$	Frottement de roulement : contact en $I_3$ et $I_4$ $N_{0i} = \delta Y_{0i}$

Nombre d'équations qu'il est possible d'obtenir à la suite de l'isolement de SM5.

Théorèmes généraux : 3 équations.

Lois de Coulomb aux contacts sol/roues : 2 équations et une inéquation par contact sol/roues d'où 8 équations et 4 inéquations.

Si, les roues arrière sont toujours en adhérence avec le sol et que le contact est considéré à la limite de l'adhérence, on obtient donc 13 équations et 2 inéquations.

#### Conclusion

Il manque donc des équations par rapport aux relations entre les inconnues mises en évidence lors de l'isolement de SM5.

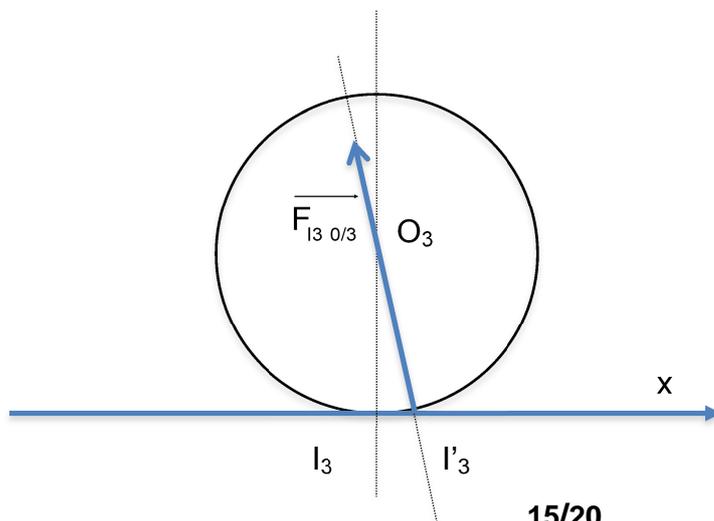
**Il nous faut donc isoler d'autres systèmes matériels. Il faut donc isoler les quatre roues indépendamment.**

#### Question 38

On écrira suite à l'application du PFD à la roue SM2 que  $\sum \bar{M}_{O_2}^{AM_{ext} \rightarrow 2} \cdot \vec{z} = 0$  et en négligeant le moment dynamique en  $O_2$  de la roue. On obtient :  $N_2 - Cm_2 + RX_2 = 0$ .

L'application du PFD à la roue SM1 donne par analogie à SM2 :  $N_1 - Cm_1 + RX_1 = 0$

En appliquant le PFD à la roue SM3 et en négligeant le moment dynamique en  $O_3$  de la roue 3, on montre que les deux glisseurs sont directement opposés et par une résolution semi-graphique semi-analytique :



$\vec{l}'_3 /'_3 = \delta \vec{x}$  avec  $\delta$  coefficient de frottement de roulement entre le sol et la roue.

D'où :  $\vec{F}_{/3 0/3} \wedge \vec{l}'_3 /'_3 = \vec{0}$

Et donc :

$\frac{X_3}{Y_3} = -\frac{\delta}{R}$  en dynamique

La roue 4 se comporte comme la roue 3, il en est donc de même  $\frac{X_4}{Y_4} = -\frac{\delta}{R}$ .

### Question 39

La loi de mouvement exprime la relation entre les mobilités du mécanisme et les actions mécaniques. On dénombre ici : 19 équations et 20 inconnues et 2 inéquations (contact sol/roues en  $I_3$  et  $I_4$  à vérifier.

Pour résoudre et trouver la pente, il est nécessaire de se donner soit le couple moteur  $C_m = C_{m1} + C_{m2}$  soit l'accélération du camion MAN.

Ainsi, il sera possible de déterminer la pente maximale de la rampe.

### Question 40

La pente maximale que le camion peut gravir avec un coefficient d'adhérence roues/sol de  $f_a = 0,6$  est  $\arctan(0,6) \cong 31^\circ$ . Au-delà de cet angle, le glissement du camion sera réalisé, suite à la loi de Coulomb.

En plus, la décroissance du couple  $C_m = C_{m1} + C_{m2}$  à la limite du glissement en fonction de  $\alpha$  s'explique par le fait que plus  $\alpha$  augmente plus  $Y_1$  et  $Y_2$  donc  $X_1$  et  $X_2$  diminuent. En conséquence le couple  $C_m$  diminue.

En supposant que le couple du moteur soit capable de fournir ce couple, plus la pente augmente, moins il faut mettre du couple sur les roues, sinon les roues patineront.

### Question 41

Le rapport de réduction du moteur aux roues en  $1^{re}$  L est de  $16,41 \cdot 3,08 = 50,54$ .

$$C_{mMaxi} = 1900 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \text{et} \quad \eta = 0,85 \quad \text{avec} \quad \omega_m = \frac{1400 \cdot \pi}{30} = 146,5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$P_{rMaxi} = P_{mMaxi} \cdot \eta = \omega_m \cdot \eta \cdot C_{mMaxi} = \frac{1400 \cdot \pi}{30} \cdot 1900 \cdot 0,85 = 236,6 \text{ kW}$$

$$\omega_{r(1^{re} L)} = \frac{\omega_m}{r_{1^{re} L} \cdot r_{pont}} = \frac{146,5}{50,54} = 2,9 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$P_{rMaxi} = \omega_{r(1^{re} L)} \cdot C_{rMaxi} = \omega_m \cdot \eta \cdot C_{mMaxi} = 236,6 \text{ kW}$$

$$C_{rMaxi} = \frac{\omega_m \cdot \eta \cdot C_{mMaxi}}{\omega_{r(1^{re} L)}} = r_{1^{re} L} \cdot r_{pont} \cdot \eta \cdot C_{mMaxi} = 50,54 \cdot 0,85 \cdot 1900 = 81\,622 \text{ N} \cdot \text{m}$$

### Question 42

Sur la courbe, on peut lire qu'à partir de  $12^\circ$ , l'accélération, sous un couple aux essieux, devient négative. Si le camion n'a pas une vitesse initiale, il ne pourra pas monter la rampe.

À  $14^\circ$ , l'accélération sous un couple maximum de  $81662 \text{ N} \cdot \text{m}$  sur les roues motrices est de  $-0,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  (voir courbe), d'où :

$$\begin{cases} \ddot{x} = -0,5 \\ \dot{x} = -0,5t + v_0 \\ x = \frac{-0,5 \cdot t^2}{2} + v_0 t + x_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{x} = -0,5 \\ \dot{x} = -0,5t + v_0 \\ 20 = \frac{-0,5 \cdot t^2}{2} + v_0 t \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{x} = -0,5 \\ \dot{x} = -0,5t + v_0 \\ 20 = t(-0,25t + v_0) \end{cases}$$

Conditions limites :  $\begin{cases} x(t_1) = x_0 = 0 \text{ et } x(t_2) = d = 20\text{m} \\ \dot{x}(t_1) = v_0 \text{ et } \dot{x}(t_2) = 0 \end{cases}$  d'où

$$v_0 = \sqrt{20 \cdot 2 \cdot 0,5} = 4,47 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{et } t_2 = \frac{4,47}{0,5} = 8,94 \text{ s}$$

À 0°, l'accélération sous un couple maximal de 81 662 N·m sur les roues motrices est de 1,76 m·s<sup>-2</sup> (voir courbes).

$$\begin{cases} \ddot{x} = 1,76 \\ \dot{x} = 1,76t + v_0 \\ x = \frac{1,76t^2}{2} + v_0t + x_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{x} = 1,76 \\ \dot{x} = 1,76t \\ d_1 = \frac{1,76t^2}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{x} = 1,76 \\ 4,47 = 1,76t \\ d_1 = 0,88t^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x(t_1) &= x_0 = 0 \text{ et } x(t_2) = d_1 \\ \dot{x}(t_1) &= 0 \text{ et } \dot{x}(t_2) = 4,47 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

La distance pour se lancer pour une rampe de 14° vaut :  $d_1 = 0,88 \cdot \left(\frac{4,47}{1,76}\right)^2 = 5,67 \text{ m}$ .

### Question 43

Modélisation proposée

$$\begin{aligned} \{T_G\}_G &= \begin{Bmatrix} \vec{P} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G \quad \text{avec } \vec{P} = -Mg \sin(\alpha) \vec{x} - Mg \cos(\alpha) \vec{y} \\ \{T_A\}_A &= \begin{Bmatrix} \vec{F}_A \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A \quad \text{avec } \vec{F}_A = X_A \vec{x} + Y_A \vec{y} \text{ et } \{T_B\}_B = \begin{Bmatrix} \vec{F}_B \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B \quad \text{avec } \vec{F}_B = X_B \vec{x} + Y_B \vec{y} \end{aligned}$$

La somme des torseurs au point G doit être nulle si le système est immobile.

$$\{T_A\}_G + \{T_B\}_G + \{T_G\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \text{avec } \{T_A\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{F}_A \\ \vec{F}_A \wedge \vec{AG} \end{Bmatrix}_G, \quad \{T_B\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{F}_B \\ \vec{F}_B \wedge \vec{BG} \end{Bmatrix}_G \quad \text{et } \{T_G\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{P} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$$

$$\text{avec } \vec{BG} = -\left(d + \frac{c}{2}\right) \vec{x} + h \vec{y} \quad \text{et } \vec{AG} = \left(a - \frac{c}{2}\right) \vec{x} + h \vec{y} \quad \text{d'où}$$

$$-Mg \sin(\alpha) + X_A = 0 \quad \text{et} \quad -Mg \cos(\alpha) + Y_A + Y_B = 0 \quad \text{et} \quad \vec{F}_B \wedge \vec{BG} + \vec{F}_A \wedge \vec{AG} = \vec{0} \quad \text{soit}$$

$$Y_B \left(d + \frac{c}{2}\right) - Y_A \left(a - \frac{c}{2}\right) + h X_A = 0$$

Le basculement est obtenu lorsque la composante  $Y_B = 0$ .

Soit pour le basculement :  $-Mg \left(a - \frac{c}{2}\right) \cos(\alpha_{\max}) + Mgh \sin(\alpha_{\max}) = 0$  d'où :

$$\alpha_{\max} = \arctan \left( \frac{a - \frac{c}{2}}{h} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{1,5}{1,9} \right) = \tan^{-1}(0,789) = 38,3^\circ$$

Le dérapage est obtenu pour  $X_A \geq f Y_A$ .

$$Y_A = \frac{Mgh \sin(\alpha) + Mg \left( d + \frac{c}{2} \right) \cos(\alpha)}{a + d} \text{ et } X_A = Mg \sin(\alpha) \text{ soit } f \leq \frac{X_A}{Y_A}$$

d'où le dérapage est obtenu pour

$$f \leq \frac{a + d}{h + \left( d + \frac{c}{2} \right) \tan^{-1}(\alpha)} = \frac{6,605}{1,9 + (5,105) \tan^{-1}(38,3^\circ)} = \frac{6,605}{1,9 + (5,105) \cdot 1,266} = \frac{6,605}{8,36} = 0,79$$

Donc il y a bien glissement pour cet angle  $\alpha_{\max}$ .

#### Question 44

L'accélération est portée par l'axe  $(O, \vec{x})$ , d'où les équations du PFD :

$$\begin{cases} -Mg \sin(\alpha) + X_A = M\gamma_{\max} \\ -Mg \cos(\alpha) + Y_A + Y_B = 0 \\ Y_B \left( d + \frac{c}{2} \right) - Y_A \left( a - \frac{c}{2} \right) + X_A h = 0 \end{cases}$$

La limite du basculement est atteinte pour  $Y_B = 0$  soit :  $(\gamma_{\max} + g \sin(\alpha)) h - g \left( a - \frac{c}{2} \right) \cos(\alpha) = 0$

$$\text{Soit } \gamma_{\max} \leq g \left( \left( a - \frac{c}{2} \right) \frac{\cos(\alpha)}{h} - \sin(\alpha) \right) = g \cdot \left( 1,5 \frac{\cos(8^\circ)}{1,9} - \sin(8^\circ) \right) = g \cdot (0,782 - 0,139)$$

$$\gamma_{\max} \leq 6,43 \text{ g}$$

#### Question 45

$$M\gamma - Mg \sin(\alpha) + Ma \int U(t) dt = 0 \text{ d'où } v = -gt \sin(\alpha) + a \frac{t^2}{2} U(t) = 0$$

La vitesse est nulle à  $t = 0$  et négative pour  $t \leq \frac{2g \sin(\alpha)}{a}$

Pour  $t \geq \frac{2g \sin(\alpha)}{a}$  le véhicule accélère et monte la pente après avoir reculé.

#### Question 46

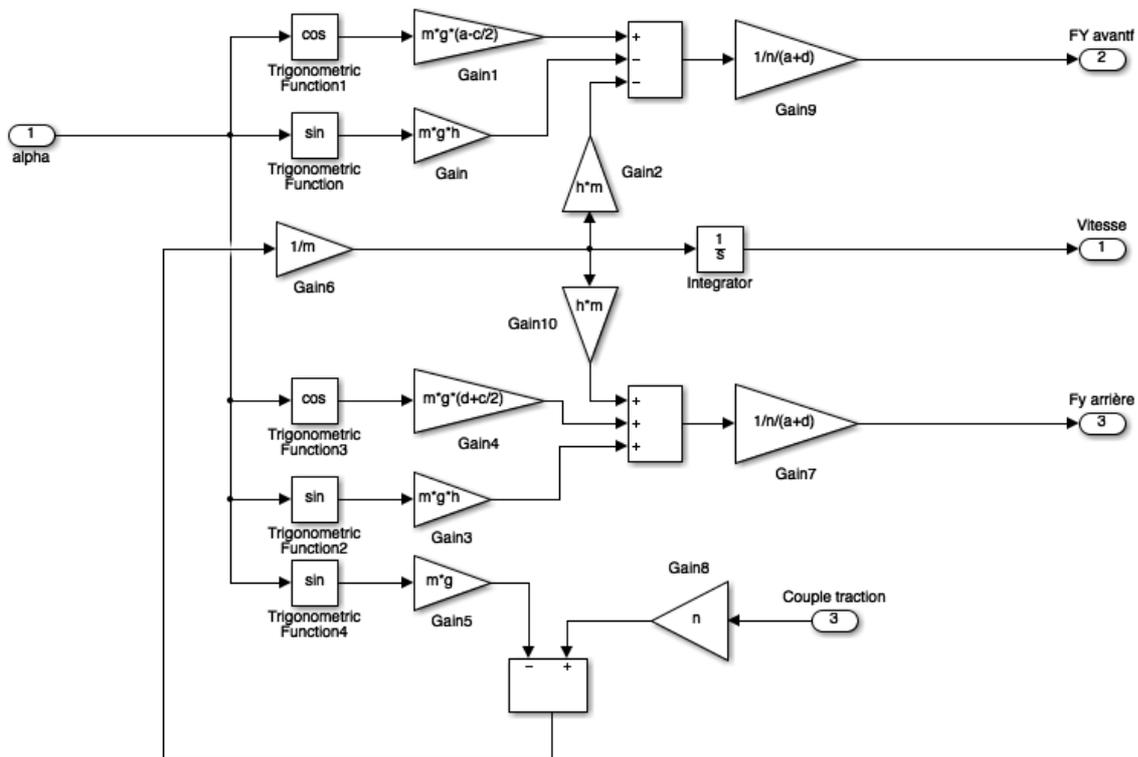
Les efforts normaux sont déduits des équations du PFD avec :  $X_A - Mg \sin(\alpha) - M \frac{dV_x}{dt} = 0$

et  $F_{y_{\text{arrière}}} = \frac{Y_A}{2}$  et  $F_{y_{\text{avant}}} = \frac{Y_B}{2}$  (deux essieux)

$$F_{y_{\text{avant}}} = \frac{-h m g \sin \alpha - h m \frac{dV_x}{dt} + \left( a - \frac{c}{2} \right) m g \cos \alpha}{2(a+d)}$$

$$F_{y_{\text{arrière}}} = \frac{h m g \sin \alpha + h m \frac{dV_x}{dt} + \left( d + \frac{c}{2} \right) m g \cos \alpha}{2(a+d)}$$

### Question 47



### Question 48

La figure 37 montre que pour  $t \geq 12$  s le couple de traction exercé entraîne un glissement des roues arrière sur le sol.

### Question 49

La figure 38 présente les efforts normaux qui s'exercent sur les roues avant et arrière ; pour  $t \leq 0$  s les efforts calculés sont les efforts statiques (véhicule à l'arrêt). Pour  $t \leq 12$  s on constate que les efforts normaux sur la roue avant s'annulent et deviennent négatifs (soulèvement des roues avant). Pour  $t \geq 12$  s , on constate que les efforts tangentiels ne sont plus transmis (dérapage des roues), dans ces conditions, il n'y a plus d'accélération.

### Question 50

$$J \frac{d\Omega}{dt} + f\Omega = C_{mot} - C_{res} \quad \text{avec } V = R\Omega$$

$$M \frac{dV}{dt} + f_v V = C_{res}$$

$$\text{soit : } \left( \frac{J}{R} + M \right) \frac{dV}{dt} + \left( \frac{f}{R} + f_v \right) V = C_{mot}$$

la fonction de transfert est :  $H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$  avec  $K = \frac{1}{\frac{f}{R^2} + f_v}$  et  $\tau = \frac{\frac{J}{R^2} + M}{\frac{f}{R^2} + f_v}$

Application numérique :

$$K = \frac{1}{\frac{f}{R^2} + f_v} = \frac{1}{\frac{0,001}{0,5^2} + 10} = 0,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{N} \cdot \text{m}^{-1} \quad \tau = \frac{\frac{J}{R^2} + M}{\frac{f}{R^2} + f_v} = \frac{\frac{20}{0,5^2} + 32000}{\frac{10}{0,5^2} + 10} = 3,2 \cdot 10^3 \text{ s}$$

### Question 51

Le couple moteur est contrôlé en boucle fermée, par un correcteur proportionnel de gain  $K_p$ , la

fonction de transfert en boucle fermée s'écrit :  $\frac{V}{C_{ref}} = \left( \frac{K_p K}{1 + K_p K} \right) \frac{1}{1 + \left( \frac{\tau}{1 + K_p K} \right) p}$

Pour obtenir un temps de montée 100 fois plus élevé, il faut un gain  $K_p = \frac{100-1}{K}$  soit  $K_p = 990$ .

### Question 52

Pour  $t \leq 1 \text{ s}$ , le couple moteur n'est pas transmis, les efforts normaux calculés sont les efforts statiques du véhicule.

Pour  $t \leq 200 \text{ s}$ , le couple moteur est constant d'où une accélération constante avec un glissement contrôlé. La vitesse référence n'est pas atteinte, le bloc de saturation (de la boucle de couple) produit un couple moteur constant.

Pour  $t \geq 200 \text{ s}$ , la vitesse de référence est atteinte et la régulation de vitesse fonctionne en mode linéaire, la vitesse est constante (accélération nulle). L'effort tangentiel sur les roues arrière compense uniquement l'effet de la gravitation dû à la pente d'angle  $\alpha$ .

### Question 53

Tant que le poids de l'immeuble en construction n'impose pas une force supérieure à la poussée d'Archimède, il est nécessaire de rabattre la nappe en dessous de la dalle de fond.