

Épreuves d'admissibilité

Épreuve de sciences industrielles de l'ingénieur (1^{ère} épreuve)

Éléments de correction

Première partie – Étude de la chaîne cinématique

Question 1 - A partir du modèle cinématique défini sur la figure 1, déterminer l'expression de

k avec $k = \left| \frac{\omega_{2/1}}{\omega_{5/1}} \right| = \left| \frac{\omega_{\text{mot1}}}{\omega_{\text{rouem}}} \right|$ en fonction des nombres de dents Z_i des différentes roues

i. En déduire le nombre de dents Z_5 sachant que $k = 53$.

$$k = \left| \frac{\omega_{2/1}}{\omega_{5/1}} \right| = \left| \frac{\omega_{\text{mot1}}}{\omega_{\text{rouem}}} \right| = \frac{Z_5 Z_{4-3} Z_{3-2}}{Z_{4-5} Z_{3-4} Z_2}$$

A.N. :

$$\text{Sachant que } k = 53 \text{ alors } Z_5 = \frac{k Z_{4-5} Z_{3-4} Z_2}{Z_{4-3} Z_{3-2}} = \frac{53 \times 32 \times 21 \times 20}{71 \times 79} \approx 126,99$$

Or Z_5 est un entier donc $Z_5 = 127$.

Question 2 - On suppose un roulement sans glissement des roues de l'avion par rapport à la piste. L'avion se déplace en ligne droite, sa vitesse par rapport à la piste est notée $V(t)$, déterminer en fonction de $V(t)$ l'expression de la vitesse de rotation des rotors des moteurs $M1$ et $M2$ par rapport au train principal. Ces vitesses seront notées respectivement ω_{mot1} et ω_{mot2} .

Roulement sans glissement entre la roue motorisée $\underline{5}$ et la piste en A_1 donc :

$$\vec{V}(A_1, \text{roue motorisée/ piste}) = \vec{V}(A_1, 5/\text{piste}) = \vec{0}$$

$$\text{De plus } \vec{V}(A_1, 5/\text{piste}) = \vec{V}(A_1, 5/1) + \vec{V}(A_1, 1/\text{piste})$$

$$\text{Alors } \vec{\Omega}_{5/1} \wedge \overrightarrow{C_1 A_1} + V(t) \vec{y}_a = \vec{0}$$

$$\omega_{5/1} \vec{x}_a \wedge -R \vec{z}_a + V(t) \vec{y}_a = \vec{0} \quad \text{et} \quad \omega_{5/1} = \omega_{\text{rouem}}$$

$$\text{Donc } V(t) = -R \omega_{\text{rouem}}(t)$$

$$\text{De plus } \frac{\omega_{\text{mot1}}}{\omega_{\text{rouem}}} = - \frac{Z_5 Z_{4-3} Z_{3-2}}{Z_{4-5} Z_{3-4} Z_2} = -k$$

Donc comme l'avion se déplace en ligne droite on trouve :

$$\omega_{\text{mot1}} = \omega_{\text{mot2}} = k \frac{V(t)}{R}$$

Question 3 - Lors du taxiage, le CdCF donne une vitesse maxi de l'avion par rapport à la piste de 20 kts = 20 nœuds (1 nœud = 1,852 km.h⁻¹), calculer la vitesse de rotation maxi des moteurs en tr.min⁻¹.

$$(\omega_{\text{mot1}})_{\text{maxi}} = (\omega_{\text{mot2}})_{\text{maxi}} = k \frac{V_{\text{maxi}}}{R}$$

A.N. :

Sachant que k = 53 ; R = 0,55 m et V_{maxi} = 20 kts.

$$(\omega_{\text{mot1}})_{\text{maxi}} = (\omega_{\text{mot2}})_{\text{maxi}} = 53 \times \frac{20 \times 1,852}{0,55 \times 3,6} \times \frac{30}{\pi} \approx 9467,9 \text{ tr.min}^{-1}$$

Question 4 - En supposant qu'il y a roulement sans glissement en A₁ et A₂ entre les roues motorisées et la piste, déterminer l'expression des vitesses de rotation (ω_{mot1} et ω_{mot2}) à imposer aux moteurs M1 et M2 en fonction de R, k, V(t), L₂, L₃ et θ(t).

Le mouvement de l'avion par rapport à la piste est un mouvement plan, on définit le point I (appelé Centre Instantané de Rotation de l'avion/piste) tel que : $\vec{V}(I, \text{avion/piste}) = \vec{0}$ donc : $\vec{V}(E, \text{avion/piste}) = \omega_{\text{avion/piste}} \vec{z}_a \wedge \vec{IE}$

De plus $\vec{V}(E, \text{avion/piste}) = V(t) \vec{y}_a$ et $\vec{IE} = Rvm \vec{x}_a$

Alors $\omega_{\text{avion/piste}} = \frac{V(t)}{Rvm}$

Et $\vec{V}(C_1, \text{avion/piste}) = \frac{V(t)}{Rvm} (Rvm + L_3) \vec{y}_a$

$$\vec{V}(C_2, \text{avion/piste}) = \frac{V(t)}{Rvm} (Rvm - L_3) \vec{y}_a$$

Roulement sans glissement entre la roue motorisée et la piste en A₁ donc :

$$\vec{V}(A_1, \text{roue motorisée/piste}) = \vec{0}$$

$$\vec{V}(A_1, \text{roue motorisée/avion}) + \vec{V}(A_1, \text{avion/piste}) = \vec{0}$$

Alors $R \omega_{\text{rouem1}} \vec{y}_a + \vec{V}(C_1, \text{avion/piste}) = \vec{0}$

De plus $\tan\theta = \frac{L_2}{Rvm}$

Et $\frac{\omega_{\text{mot1}}}{\omega_{\text{rouem1}}} = -k$

Donc on trouve :

$$\omega_{\text{mot1}} = \frac{k V(t)}{R} \left(1 + \frac{L_3}{L_2} \tan\theta \right)$$

Avec la même démarche on trouve :

$$\omega_{\text{mot2}} = \frac{k V(t)}{R} \left(1 - \frac{L_3}{L_2} \tan\theta \right)$$

Question 5 - Le CdCF impose $(Rvm)_{\text{mini}} = L_3$ c'est-à-dire que l'avion doit pouvoir tourner autour du point A_2 ou du point A_1 , en déduire les expressions de ω_{mot1} et ω_{mot2} .

Rotation autour du point A_2 donc :

$$\omega_{\text{mot1}} = \frac{2 k V(t)}{R}$$

et

$$\omega_{\text{mot2}} = 0$$

Deuxième partie – Étude de la motorisation

Question 6 - En appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique en A à l'avion, déterminer l'ensemble des équations scalaires.

On isole l'avion.

Inventaire des actions mécaniques extérieures exercées sur l'avion :

- L'action de la piste sur les deux roues motorisées :

$$\{T(\text{piste} \rightarrow \text{roues motorisées})\} = 2 \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{p \rightarrow RM} = T_1 \vec{y}_a + N_1 \vec{z}_a \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

- L'action de la piste sur les deux roues non motorisées :

$$\{T(\text{piste} \rightarrow \text{roue non motorisée})\} = 2 \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{p \rightarrow RNM} = N_1 \vec{z}_a \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

- L'action de la piste sur le train avant :

$$\{T(\text{piste} \rightarrow \text{train avant})\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{p \rightarrow TA} = N_2 \vec{z}_a \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B$$

- La résistance au roulement des pneumatiques due à leur déformation :

$$\{T(\text{résistance au roulement} \rightarrow \text{avion})\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{RR} = -C_{RR} M \vec{y}_a \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B$$

- L'action de la pesanteur sur l'avion :

$$\{T(\text{pesanteur} \rightarrow \text{avion})\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{\text{pesanteur} \rightarrow \text{avion}} = -M g \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$$

Application du Principe Fondamental de la Dynamique à l'avion en A :

$$\{\mathbf{T}(\overline{\text{avion}} \rightarrow \text{avion})\} = \{\mathbf{D}(\overline{\text{avion}} / \mathbf{Rg})\} \quad \text{avec } \mathbf{Rg} = \mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_p$$

Le mouvement de l'avion par rapport à la piste est une translation rectiligne et l'inertie de

tous les solides en rotation est négligée, alors $\{\mathbf{D}(\overline{\text{avion}} / \mathbf{Rg})\} = \left\{ \begin{matrix} \mathbf{M} \boldsymbol{\gamma} \bar{\mathbf{y}}_a \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_G$.

Théorème de la résultante dynamique :

$$2T_1 \bar{\mathbf{y}}_a + 4N_1 \bar{\mathbf{z}}_a + N_2 \bar{\mathbf{z}}_a - C_{RR} M \bar{\mathbf{y}}_a - M g \bar{\mathbf{z}}_0 = M \boldsymbol{\gamma} \bar{\mathbf{y}}_a$$

Donc on obtient les équations scalaires suivantes :

$$\begin{cases} 2T_1 - C_{RR} M - M g \sin \alpha = M \gamma \\ 4N_1 + N_2 - M g \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

Théorème du moment dynamique en A en projection sur $\bar{\mathbf{x}}_a$:

$$(\overline{\mathbf{AB}} \wedge N_2 \bar{\mathbf{z}}_a) \cdot \bar{\mathbf{x}}_a + (\overline{\mathbf{AG}} \wedge (-M g \bar{\mathbf{z}}_0)) \cdot \bar{\mathbf{x}}_a = (\overline{\mathbf{AG}} \wedge M \boldsymbol{\gamma} \bar{\mathbf{y}}_a) \cdot \bar{\mathbf{x}}_a$$

$$(L_2 \bar{\mathbf{y}}_a \wedge N_2 \bar{\mathbf{z}}_a) \cdot \bar{\mathbf{x}}_a + ((L_1 \bar{\mathbf{y}}_a + h \bar{\mathbf{z}}_a) \wedge (-M g \bar{\mathbf{z}}_0)) \cdot \bar{\mathbf{x}}_a = ((L_1 \bar{\mathbf{y}}_a + h \bar{\mathbf{z}}_a) \wedge M \boldsymbol{\gamma} \bar{\mathbf{y}}_a) \cdot \bar{\mathbf{x}}_a$$

$$L_2 N_2 - M g L_1 \cos \alpha + M g h \sin \alpha = -M \gamma h$$

Question 7 - En déduire l'expression littérale :

a) De l'effort tangentiel T_1 en fonction de M , g , α , C_{RR} et γ .

$$T_1 = \frac{M}{2} (\gamma + g \sin \alpha + C_{RR})$$

b) De l'effort normal N_2 en fonction de M , g , α , L_1 , L_2 , h et γ .

$$N_2 = \frac{M}{L_2} (g L_1 \cos \alpha - \gamma h - g h \sin \alpha)$$

c) De l'effort normal N_1 en fonction de M , g , α , L_1 , L_2 , h et γ .

$$4N_1 = -\frac{M}{L_2} (g L_1 \cos \alpha - \gamma h - g h \sin \alpha) + M g \cos \alpha$$

$$N_1 = \frac{M}{4} \left(\left(1 - \frac{L_1}{L_2} \right) g \cos \alpha + \frac{h}{L_2} (\gamma + g \sin \alpha) \right)$$

Question 8 - Déterminer la relation entre N_1 et T_1 garantissant l'adhérence entre les roues motorisée et le sol. En déduire la relation entre f_0 , g , α , C_{RR} , L_1 , L_2 , h et γ .

Loi de Coulomb, il y aura adhérence si on vérifie : $\left| \frac{T_1}{N_1} \right| < f_0$

Soit $\left| \frac{2 L_2 (\gamma + g \sin \alpha + C_{RR})}{(L_2 - L_1) g \cos \alpha + h (\gamma + g \sin \alpha)} \right| < f_0$

Sachant que la pente de la piste est au maximum de 1,5%, l'adhérence est-elle garantie pour les différents cas définis ci-dessous ?

A.N. : $M = 79000 \text{ kg}$; $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$; $C_{RR} = 0,07 \text{ N.kg}^{-1}$; $L_1 = 1,5 \text{ m}$; $L_2 = 12,7 \text{ m}$ et $h = 4 \text{ m}$.

Pente maximum de 1,5% donc $\alpha = \arctan(0,015) \approx 0,86^\circ$

Accélération : $\gamma = \frac{5,14}{20} = 0,257 \text{ m.s}^{-2}$

Donc

$$\left| \frac{2 L_2 (\gamma + g \sin \alpha + C_{RR})}{(L_2 - L_1) g \cos \alpha + h (\gamma + g \sin \alpha)} \right| = \left| \frac{2 \times 12,7 \times (0,257 + 9,81 \times \sin(0,86^\circ) + 0,07)}{(12,7 - 1,5) \times 9,81 \times \cos(0,86^\circ) + 4 \times (0,257 + 9,81 \times \sin(0,86^\circ))} \right|$$

$$\left| \frac{2 L_2 (\gamma + g \sin \alpha + C_{RR})}{(L_2 - L_1) g \cos \alpha + h (\gamma + g \sin \alpha)} \right| \approx 0,108$$

Pour le cas 1 ($f_0 = 0,5$) et le cas 2 ($f_0 = 0,3$) on vérifie bien $\left| \frac{T_1}{N_1} \right| < f_0$ donc l'adhérence est garantie.

Pour le cas 3 ($f_0 = 0,1$) l'adhérence n'est pas garantie car $\left| \frac{T_1}{N_1} \right| > f_0$.

Question 9 - Le rapport des vitesses de rotation du rotor du moteur électrique et de la roue motorisée est défini par : $k = \left| \frac{\omega_{\text{mot}}}{\omega_{\text{rouem}}} \right| = 53$. En précisant votre démarche, montrer que la relation littérale définissant le couple « C_{mot} » de chaque moteur est : $C_{\text{mot}} = \frac{RM}{2k} (\gamma + g \sin \alpha + C_{RR})$.

On isole une roue motorisée

Inventaire des actions mécaniques extérieures exercées sur la roue motorisée :

- L'action de la piste sur la roue motorisée :

$$\{T(\text{piste} \rightarrow \text{roue motorisée})\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{p \rightarrow RM} = T_1 \vec{y}_a + N_1 \vec{z}_a \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

- L'action de $\underline{4}$ sur la roue motorisée : $\{T(4 \rightarrow \text{roue motorisée})\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{4 \rightarrow RM} \\ C_{\text{rouem}} \vec{x}_a \end{array} \right\}_C$

- L'action de $\underline{1}$ sur la roue motorisée :

$$\{T(1 \rightarrow \text{roue motorisée})\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{1 \rightarrow RM} \\ \vec{M}(C, 1 \rightarrow RM) \end{array} \right\}_C \text{ avec } \vec{M}(C, 1 \rightarrow RM) \bullet \vec{x}_a = 0$$

Les inerties et les masses des solides en rotation sont négligées.

Théorème du moment dynamique en A en projection sur \vec{x}_a :

$$\left(\overrightarrow{CA} \wedge (T_1 \vec{y}_a + N_1 \vec{z}_a) \right) \bullet \vec{x}_a + C_{\text{rouem}} = \vec{\delta}(C, \text{roue motorisée}/R_0) \bullet \vec{x}_a$$

$$\left(-R \vec{z}_a \wedge (T_1 \vec{y}_a + N_1 \vec{z}_a) \right) \bullet \vec{x}_a + C_{\text{rouem}} = 0$$

$$C_{\text{rouem}} = -R T_1 \quad \text{or} \quad T_1 = \frac{M}{2} (\gamma + g \sin \alpha + C_{RR})$$

$$\text{Donc } C_{\text{rouem}} = -\frac{R M}{2} (\gamma + g \sin \alpha + C_{RR})$$

Les inerties et les masses des solides en rotation sont négligées, les solides en rotation sont équilibrés et les liaisons sont supposées parfaites donc : $C_{\text{mot}} \omega_{\text{mot}} = C_{\text{rouem}} \omega_{\text{rouem}}$.

$$\text{On a aussi : } \frac{\omega_{\text{mot}}}{\omega_{\text{rouem}}} = -k.$$

$$\boxed{C_{\text{mot}} = \frac{R M}{2k} (\gamma + g \sin \alpha + C_{RR})}$$

Remarque :

Pour retrouver cette relation, on peut aussi appliquer le théorème de l'énergie cinétique (énergie-puissance) à l'ensemble *avion* dans son mouvement par rapport à la piste.

$$\frac{d E_C(\text{avion}/R_p)}{dt} = P(\overline{\text{avion}} \rightarrow \text{avion}/R_p) + \text{Pint}$$

$$\text{Avec } \frac{d E_C(\text{avion}/R_p)}{dt} = M V(t) \gamma \text{ car les inerties des solides en rotation sont négligées.}$$

Les liaisons sont supposées parfaites,

$$\text{donc : } P(\overline{\text{avion}} \rightarrow \text{avion}/R_p) + \text{Pint} = -M g \sin \alpha V(t) - C_{RR} V(t) + 2 C_{\text{mot}} \omega_{\text{mot}}(t)$$

Or $\omega_{\text{mot}} = k \frac{V(t)}{R}$ donc le TEC donne : $M V(t) \gamma = -M g \sin \alpha V(t) - C_{RR} V(t) + 2 C_{\text{mot}} k \frac{V(t)}{R}$

On obtient :
$$C_{\text{mot}} = \frac{R M}{2 k} (\gamma + g \sin \alpha + C_{RR})$$

Question 10 - On rappelle que la pente de la piste est au maximum de **1,5 %**, calculer le couple moteur maximum $(C_{\text{mot}})_{\text{Maxi}}$ pour chaque moteur. En déduire la puissance P_{max} du moteur.

A.N. : $M = 79000 \text{ kg}$; $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$; $C_{RR} = 0,07 \text{ N.kg}^{-1}$; $\alpha \approx 0,86^\circ$; $\gamma = 0,257 \text{ m.s}^{-2}$

et $R = 0,55 \text{ m}$

$$(C_{\text{mot}})_{\text{Maxi}} = \frac{0,55 \times 79 \times 10^3 \times (0,257 + 9,81 \times \sin(0,86^\circ) + 0,07)}{2 \times 53}$$

$$(C_{\text{mot}})_{\text{Maxi}} \approx 194,35 \text{ N.m}$$

Pour le profil de vitesse donné on a : $(\omega_{\text{mot}})_{\text{Maxi}} = 53 \frac{5,14}{0,55} = 496,27 \text{ rad.s}^{-1}$

Donc la puissance maxi du moteur est : $P_{\text{Max}} = (C_{\text{mot}})_{\text{Maxi}} (\omega_{\text{mot}})_{\text{Maxi}} \approx 96,45 \text{ kW}$

Question 11 - Déterminer la durée $t_f - t_2$, qui correspond à la phase de décélération, afin de limiter le couple moteur C_{mot} à **+10 Nm**.

Avec la restriction $\alpha = 0$, le couple moteur a pour expression :

$$C_{\text{mot}} = \frac{R M}{2 k} (\gamma + C_{RR}) \Rightarrow \gamma = \frac{2 k}{R M} C_{\text{mot}} - C_{RR}$$

Pour $t \in [t_2, t_f]$, on substitue à l'accélération le rapport des accroissements finis de la vitesse et du temps :

$$\gamma = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2 k}{R M} C_{\text{mot}} - C_{RR}$$

Soit :
$$\Delta t = \frac{\Delta v}{\frac{2 k}{R M} C_{\text{mot}} - C_{RR}}$$

A.N. : $R = 0,55 \text{ m}$, $M = 79000 \text{ kg}$, $C_{RR} = 0,07 \text{ N.kg}^{-1}$, $k = 53$

$$\Delta t = - \frac{5,14}{\frac{2 \times 53}{0,55 \times 79000} \times 10 - 0,07} = 112,7 \text{ s} \approx 1,88 \text{ mn}$$

Question 12 - Pour le profil de vitesse proposé sur la figure 5, tracer l'évolution du point de fonctionnement $c_{\text{mot}} = f(\omega_{\text{mot}})$ d'un moteur.

Compléter le document **DR1** en précisant bien les valeurs puissance, couple et vitesse aux points caractéristiques et commentez.

Temps (s)	$C_{mot}(Nm)$	$\omega_{mot} = \frac{k}{R}V (rad/s)$	$t_f = 10 \text{ min}$
$[0, \dots, t_1[$	134	-	
$[t_1, \dots, t_2[$	28,7	495	
$[t_2, \dots, t_f]$	10	-	

Cf. **DR1** pour l'évolution du point de fonctionnement et ses valeurs remarquables.

Question 13 - Calculer le couple thermique c_{th} , l'équilibre thermique de la machine est-il assuré ?

Le couple équivalent thermique est défini par l'expression : $c_{th} = \sqrt{\frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} c_{mot}^2(t) dt}$.

Il est assuré lorsque les deux conditions suivantes sont satisfaites (Cf. **DR1**) :

- Le couple (c_{th}, ω_{moy}) se situe dans la zone du plan couple-vitesse délimitée par la frontière **1**.
- L'évolution du point de fonctionnement (c_{mot}, ω_{mot}) reste confiner à l'intérieur de la zone délimitée 2.

Remarque : il n'est pas demandé de calculer explicitement la vitesse moyenne ω_{moy} . On cherche simplement à localiser le couple (c_{th}, ω_{moy}) .

$$c_{th}^2 = \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} c_{mot}^2(t) dt = \frac{1}{t_f} \left[\int_0^{t_1} c_{mot}^2(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} c_{mot}^2(t) dt + \int_{t_2}^{t_f} c_{mot}^2(t) dt \right]$$

$$\Rightarrow c_{th}^2 = \frac{1}{t_f} \left[c_{mot[0, \dots, t_1]}^2 t_1 + c_{mot[t_1, \dots, t_2]}^2 (t_2 - t_1) + c_{mot[t_2, \dots, t_f]}^2 (t_f - t_2) \right]$$

$$AN: \quad c_{th}^2 = \frac{1}{600} [134^2 \times 20 + 29^2 \times (600 - 20 - 112,7) + 10^2 \times 112,7]$$

$$c_{th} = 35,66 Nm$$

Les deux conditions sont réunies. En conséquence, l'équilibre thermique de la machine est assuré.

Question 14 - Au regard des résultats obtenus et des contraintes imposées par le cahier des charges, une motorisation « standard » peut-elle convenir ou faut-il développer un produit spécifique ?

Les contraintes sont extraites du diagramme partiel des exigences :

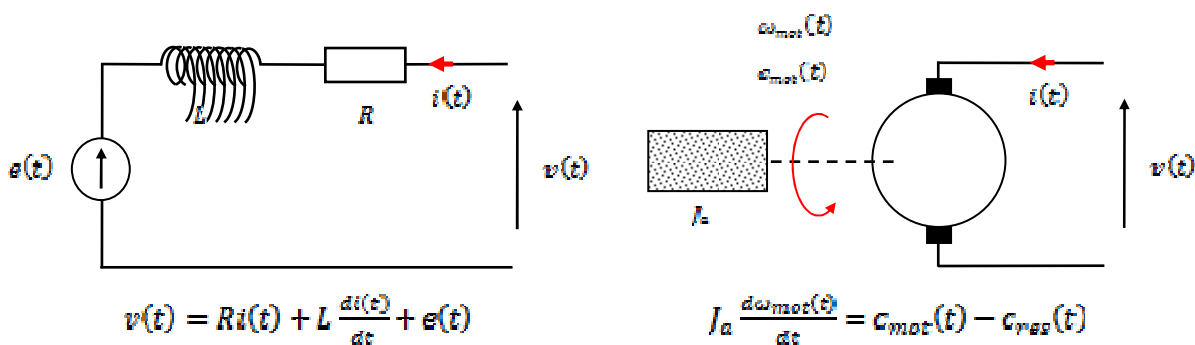
- 1- La masse d'un moteur ne doit pas dépasser **120 kg**.
- 2- L'EGTS doit s'intégrer aux trains principaux en minimisant l'encombrement .
- 3- Le couple retenu est de **134 Nm**. Le couple de décollage ainsi que les aspects dynamiques ne sont pas considérés.

TIPO MOTORE MOTOR TYPE	simbolo symbol	u. mis. u. m.	B26S			B26M			B26L			B26G		
Tensione di alimentazione azionamento Drive operating voltage			400V	400V	400V	400V	400V	400V	400V	400V	400V	400V	400V	400V
Coppia a rotore bloccato 100K Δt Continuous stall torque 100K Δt	To	Nm	122	120	121	232	236	231	338	338	337	442	442	445
Coppia a rotore bloccato 65K Δt Continuous stall torque 65K Δt	To	Nm	99	97	97	187	190	186	273	273	272	356	356	359
Velocità nominale Rated Speed	n	RPM	1000	2000	3000	1000	2000	3000	1000	2000	3000	1000	2000	3000
Potenza alla velocità nominale 100K Δt Power at rated speed 100K Δt	Pn	W	12810	24453	35168	23835	46189	62800	34230	64372	86350	44205	82137	108330
Coppia alla velocità nominale 100K Δt Torque at rated speed 100K Δt	Tn	Nm	122	117	112	227	221	200	326	308	275	411	393	345
Coppia di picco con S.I.R. 10% Peak torque with S.I.R. 10%	Tpk	Nm	333	333	333	638	638	638	931	931	931	1241	1214	1214
Inerzia rotorica Rotor Inertia	Jm	mKgm ²	22,0	22,0	22,0	36,0	36,0	36,0	49,0	49,0	49,0	63,0	63,0	63,0
Inerzia rotorica (motore con freno) Rotor Inertia (motor with brake)	Jmb	mKgm ²	30,1	30,1	30,1	44,1	44,1	44,1	62,0	62,0	62,0	76,0	76,0	76,0
Accelerazione rif. alla coppia di picco Acceleration at peak torque	apk	rad/s ²	15149	15149	15149	17733	17733	17733	19007	19007	19007	19271	19271	19271
Accelerazione rif. alla coppia di picco (motore con freno) Acceleration at peak torque (motor with brake)	apkb	rad/s ²	11000	11000	11000	14400	14400	14400	15000	15000	15000	16000	16000	16000
Massa Weight	M	Kg	55	55	55	85	85	85	116	116	116	146	146	146
Massa con freno Weight with brake	Mb	Kg	85	85	85	115	115	115	151	151	151	181	181	181

Les valeurs encadrées rendent éligible la motorisation pour le paramètre considéré. Une motorisation « sur étagère » existe, le problème porte sur les aspects dimensionnels qui sont incompatibles avec les contraintes imposées par l'expression du besoin. Ainsi, les machines qui ont pour référence B26M et B26L ont une longueur respective de 577 et 684 *mm*. La motorisation est un des éléments de la chaîne de transmission à laquelle il faut ajouter un étage de réduction, un embrayage et un élément qui assure la liaison mécanique avec la roue de l'avion. L'ensemble est placé entre les deux roues du train d'atterrissage principal qui ont un rayon de 0,55 *m*. Le volume disponible ne permet pas d'intégrer un produit standard. En conséquence, un développement spécifique s'impose.

Troisième partie – Étude de l'asservissement

Question 15 - Ecrire l'équation de la maille du modèle électrique ainsi que l'équation mécanique appliquée au modèle linéaire de la machine représenté sur la **figure 7**.



Equations de liaisons : $\varepsilon(t) = K\omega_{mot}(t)$ et $c_{mot}(t) = Ki(t)$

Question 16 - A partir des relations établies précédemment, exprimer $I(p)$ tel que :

$$I(p) = H_1(p)V(p) + H_2(p)C_{res}(p)$$

- Montrer que les fonctions de transfert $H_1(p)$ et $H_2(p)$ ont les expressions canoniques suivantes :

$$H_1(p) = H_0 \frac{p}{\omega_n (p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2)} \quad \text{avec : } \omega_n^2 = \frac{K^2}{LJ_a}, \quad \omega_1 = \frac{K^2}{RJ_a}, \quad \xi = \frac{1}{2} \frac{R}{K} \sqrt{\frac{J_a}{L}}$$

et $H_0 = \frac{1}{R}$

et $H_2(p) = \frac{1}{K} \frac{\omega_n^2}{(p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2)}$

$$\begin{cases} v(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} V(p) = (R + Lp)I(p) + E(p) \\ J_a \frac{d\Omega_{\text{mot}}(t)}{dt} = c_{\text{mot}}(t) - c_{\text{res}}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} J_a p \Omega_{\text{mot}}(p) = C_{\text{mot}}(p) - C_{\text{res}}(p) \\ e(t) = K\omega_{\text{mot}}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} E(p) = K\Omega_{\text{mot}}(p) \\ c_{\text{mot}}(t) = Ki(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} C_{\text{mot}}(p) = KI(p) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I(p) = \frac{V(p) - E(p)}{R + Lp} \\ E(p) = K\Omega_{\text{mot}}(p) \\ \Omega_{\text{mot}}(p) = \frac{KI(p) - C_{\text{res}}(p)}{J_a p} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I(p) = \frac{V(p) - K\Omega_{\text{mot}}(p)}{R + Lp} \\ \text{et} \\ \Omega_{\text{mot}}(p) = \frac{KI(p) - C_{\text{res}}(p)}{J_a p} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I(p) = \frac{1}{R + Lp} V(p) - \frac{K}{R + Lp} \Omega_{\text{mot}}(p) = \frac{1}{R + Lp} V(p) - \frac{K^2}{J_a p (R + Lp)} I(p) + \frac{K}{J_a p (R + Lp)} C_{\text{res}}(p)$$

$$\Rightarrow \left[1 + \frac{K^2}{J_a p (R + Lp)} \right] I(p) = \frac{1}{R + Lp} V(p) + \frac{K}{J_a p (R + Lp)} C_{\text{res}}(p)$$

$$\Rightarrow I(p) = \frac{J_a p}{K^2 + RJ_a p + LJ_a p^2} V(p) + \frac{K}{K^2 + RJ_a p + LJ_a p^2} C_{\text{res}}(p)$$

$$\text{soit : } I(p) = \frac{1}{R} \frac{p}{\frac{K^2}{RJ_a} + \frac{R}{LJ_a} p + p^2} V(p) + \frac{1}{K} \frac{\frac{K^2}{LJ_a}}{\frac{K^2}{LJ_a} + \frac{R}{L} p + p^2} C_{\text{res}}(p)$$

Par identification :

$$H_1(p) = \frac{1}{R} \frac{p}{\frac{K^2}{RJ_a} + \frac{R}{LJ_a} p + p^2} \quad H_2(p) = \frac{1}{K} \frac{\frac{K^2}{LJ_a}}{\frac{K^2}{LJ_a} + \frac{R}{L} p + p^2}$$

Nous vérifions bien que : $H_0 = \frac{1}{R}$, $\omega_n^2 = \frac{K^2}{LJ_a}$, $\omega_1 = \frac{K^2}{RJ_a}$ et l'amortissement $\xi = \frac{1}{2} \frac{R}{K} \sqrt{\frac{J_a}{L}}$

AN : $H_0 \cong 143 \Omega^{-1}$, $\omega_n \cong 0,158 \text{ rd/s}$, $\omega_1 \cong 0,01 \text{ rd/s}$ et l'amortissement $\xi \cong 7,37$

- Conclure quant au comportement du système, est-il sur ou sous-amorti ?

$\xi > 1$, le système est sur amorti.

Question 17 - Exprimer la fonction de transfert en boucle fermée $H_{\text{cons}}(p) = \frac{I(p)}{I_{\text{cons}}(p)}$ pour

$$C_{\text{res}}(p) = 0.$$

- Montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme suivante :

$$H_{cons}(p) = \frac{I(p)}{I_{cons}(p)} = k_{cons} \frac{p}{\omega_1 (p^2 + 2\xi' \omega_n p + \omega_n^2)}$$

Avec la restriction $C_{ress}(p) = 0$ et les hypothèses, nous avons :
$$\begin{cases} I(p) = H_1(p)V(p) \\ V(p) = k_c(I_{cons}(p) - k_i I(p)) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow I(p) = k_c H_1(p)(I_{cons}(p) - k_i I(p))$$

$$\Rightarrow I(p) (1 + k_i k_c H_1(p)) = k_c H_1(p) I_{cons}(p) \Leftrightarrow \frac{I(p)}{I_{cons}(p)} = \frac{k_c H_1(p)}{1 + k_i k_c H_1(p)}$$

Soit :
$$\frac{I(p)}{I_{cons}(p)} = \frac{H_0 k_c \frac{p}{\omega_1 \omega_n^2 + 2\xi' \omega_n p + p^2}}{1 + H_0 k_c k_i \frac{p}{\omega_1 \omega_n^2 + 2\xi' \omega_n p + p^2}} = \frac{H_0 k_c}{k_{cons}} \frac{p}{\omega_1 p^2 + 2(\xi + \frac{1}{2} H_0 k_c k_i \frac{\omega_n}{\omega_1}) \omega_n p + \omega_n^2}$$

$$H_{cons}(p) = \frac{I(p)}{I_{cons}(p)} = \frac{H_0 k_c}{k_{cons}} \frac{p}{\omega_1 p^2 + 2(\xi + \frac{1}{2} H_0 k_c k_i \frac{\omega_n}{\omega_1}) \omega_n p + \omega_n^2}$$

- Vous préciserez la valeur du gain k_{cons} ainsi que l'amortissement en boucle fermée ξ' .

Par identification, nous avons :

$$\begin{cases} \xi' = \xi + \frac{1}{2} H_0 k_c k_i \frac{\omega_n}{\omega_1} \\ k_{cons} = H_0 k_c \end{cases}$$

Question 18 - Représenter la fonction de transfert $H_{cons}(p)$ en module et en phase dans le plan de Bode. Compléter le document réponse **DR2**.

AN :
$$\begin{cases} H_0 = 143 \Omega^{-1} \\ k_i = 10^{-4} \\ k_c = 10^3 V/A \\ \omega_n = 0,158 \text{ rd/s} \\ \omega_1 = 0,01 \text{ rd/s} \\ \xi = 7,37 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi' = \xi + \frac{1}{2} H_0 k_c k_i \frac{\omega_n}{\omega_1} \cong 120 \\ k_{cons} = H_0 k_c \cong 103 \text{ dB} \\ \omega_n = 0,158 \text{ rd/s} \end{cases}$$

Le système est fortement sur amorti, en conséquence nous avons deux racines réelles stables p_1, p_2 et un mode dominant.

$$p_1 = -\xi' \omega_n - \omega_n \sqrt{\xi'^2 - 1} \cong -2\xi' \omega_n$$

$$p_2 = -\xi' \omega_n + \xi' \omega_n \sqrt{1 - \frac{1}{\xi'^2}} \cong -\xi' \omega_n + \xi' \omega_n \left(1 - \frac{1}{2\xi'^2}\right) + \mathcal{O}(\xi'^{-2}) \cong -\frac{\omega_n}{2\xi'}$$

AN : $p_1 \cong -2\xi' \omega_n = -38$ et $p_2 \cong -\frac{\omega_n}{2\xi'} = -6,6 \times 10^{-4}$

$$H_{cons}(p) = k_{cons} \frac{p}{\omega_1 (p + 2\xi' \omega_n) \left(p + \frac{\omega_n}{2\xi'}\right)} = k_{cons} \frac{p}{\omega_1 (1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$$

$$\begin{cases} \tau_1 = \frac{2\xi'}{\omega_n} \cong 1519 \text{ s} \\ \tau_2 = \frac{1}{2\xi' \omega_n} \cong 26 \text{ ms} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_{c1} = \frac{\omega_n}{2\xi'} \cong 6,6 \times 10^{-4} \text{ rd/s} \\ \omega_{c2} = 2\xi' \omega_n \cong 38 \text{ rd/s} \end{cases}$$

Cf. DR2 pour la représentation du lieu de transfert dans le plan de Bode.

Question 19 - Montrer que dans ces conditions la fonction de transfert $H_{cons}(p)$ admet la représentation asymptotique suivante :

$$H_{cons}(p) = \frac{I(p)}{I_{cons}(p)} \cong \frac{1}{k_i} \times \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega_c}} \quad \text{avec} \quad \omega_c = H_0 k_c k_i \frac{\omega_n^2}{\omega_1} = k_{cons} k_i \frac{\omega_n^2}{\omega_1}$$

La restriction du support spectral de la consigne est telle que $\omega > \frac{\omega_n}{2\xi'} = \omega_{c1} = \frac{1}{\tau_1}$

En conséquence $\omega\tau_1 > 1$ soit : $H_{cons}(p) \cong k_{cons} \frac{\omega_{c1} - 1}{\omega_1 1 + \tau_3 p}$

avec $\xi' \cong \frac{1}{2} k_{cons} k_i \frac{\omega_n}{\omega_1} \Rightarrow \frac{1}{k_{cons} k_i} = \frac{\omega_n}{2\xi' \omega_1} = \frac{\omega_{c1}}{\omega_1}$ et $\omega_{c2} = 2\xi' \omega_n = k_{cons} k_i \frac{\omega_n^2}{\omega_1} = \omega_c$

Nous retrouvons bien l'expression recherchée de la fonction de transfert pour $\omega > \omega_{c1}$:

$$H_{cons}(p) \cong \frac{1}{k_i} \times \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega_c}}$$

Question 20 - Calculer $I_{est}(p)$ en fonction des entrées $I_{ref}(p)$ et $\Omega_{mot}(p)$ ainsi que des constantes k_Ω, k_1 et τ_3 .

$$I_{est}(p) = k_1 \left\{ \frac{I_{ref}(p)}{\tau_3 p} - k_\Omega \Omega_{mot}(p) \right\}$$

Question 21 - A partir du précédent résultat et d'une équation supplémentaire sur les courants $I_{ref}(p), I_{est}(p)$ et $I_{cons}(p)$, en déduire la relation entre $I_{cons}(p), I_{est}(p)$ et $\Omega_{mot}(p)$ et les constantes du système.

$$\begin{aligned} I_{cons}(p) &= I_{ref}(p) + I_{est}(p) \Leftrightarrow I_{ref}(p) = I_{cons}(p) - I_{est}(p) \\ \Rightarrow I_{est}(p) &= k_1 \left\{ \frac{I_{cons}(p) - I_{est}(p)}{\tau_3 p} - k_\Omega \Omega_{mot}(p) \right\} \\ \Leftrightarrow I_{est}(p) \left\{ 1 + \frac{k_1}{\tau_3 p} \right\} &= \frac{k_1}{\tau_3 p} I_{cons}(p) - k_1 k_\Omega \Omega_{mot}(p) \end{aligned}$$

Question 22 - Déduire des précédents résultats, la relation recherchée entre le courant $I_{est}(p)$, la vitesse $\Omega_{mot}(p)$ et le couple $C_{res}(p)$.

Equation du modèle de la boucle de courant :

$$\Omega_{mot}(p) = \left\{ I_{cons}(p) \frac{K}{k_i} - C_{res}(p) \right\} \frac{1}{J_a p} \Leftrightarrow I_{cons}(p) = \left\{ J_a p \Omega_{mot}(p) + C_{res}(p) \right\} \frac{k_i}{K}$$

Avec l'équation précédente, nous avons la relation recherchée :

$$I_{est}(p) \left\{ 1 + \frac{k_1}{\tau_3 p} \right\} = \left\{ J_a \frac{k_1 k_i}{K \tau_3} - k_1 k_\Omega \right\} \Omega_{mot}(p) + \frac{k_1 k_i}{K \tau_3 p} C_{res}(p)$$

Question 23 - Montrer que pour $\tau_3 = \frac{k_i J_a}{K k_\Omega}$, $i_{est}(t)$ est une estimation linéaire du couple $c_{res}(t)$.

On rappelle que $H_{cons}(p) \cong \frac{1}{k_i}$.

Pour $J_a \frac{k_1 k_i}{K \tau_3} - k_1 k_\Omega = 0 \Rightarrow \tau_3 = \frac{k_i J_a}{K k_\Omega}$,

$$I_{est}(p) \left\{ 1 + \frac{k_1}{\tau_3 p} \right\} = \frac{k_1 k_i}{K \tau_3 p} C_{res}(p)$$

Soit :
$$I_{est}(p) = \frac{k_i}{K} \frac{1}{1 + \frac{T_3}{K_1} p} C_{ress}(p)$$

- Donner l'expression de la fonction de transfert $\frac{I_{est}(p)}{C_{ress}(p)}$.

$$\frac{I_{est}(p)}{C_{ress}(p)} = \frac{k_i}{K} \frac{1}{1 + \frac{T_3}{K_1} p}$$

Question 24 - Discuter des performances de l'architecture de commande proposée en la comparant à une commande sans estimateur du couple $c_{ress}(t)$ soit pour $k_1 \rightarrow 0$.

On vous demande, dans cette question, de faire une synthèse qualitative des performances de la commande.

- Commande sans estimateur du couple $c_{ress}(t)$ soit pour $k_1 \rightarrow 0$

L'expression de la vitesse, dans le domaine transformé, a pour expression :

$$\Omega_{mot}(p) = \frac{1}{1 + \frac{T_3}{K_1} p} \times \left(\Omega_{ref}(p) - \frac{k_i}{K k_G k_\Omega} \times C_{ress}(p) \right)$$

⇒ erreur de vitesse en régime établi.

- Commande avec estimateur du couple $c_{ress}(t)$

$$\Omega_{mot}(p) = \frac{1}{1 + \frac{T_3}{K_1} p} \times \left(\Omega_{ref}(p) - \frac{k_i}{K k_G k_\Omega} \times \frac{\frac{T_3}{K_1} p}{1 + \frac{T_3}{K_1} p} \times C_{ress}(p) \right)$$

⇒ pas d'erreur de vitesse en régime établi.

⇒ L'action dérivée réduit les composantes BF de $c_{ress}(t)$.

Quatrième partie – Étude de l'embrayage

Question 25 - Déterminer l'inertie équivalente J_{eq} de l'ensemble {2, 3, 4} ramenée sur l'axe de rotation du solide 4 dans son mouvement par rapport à l'avion. Cette inertie équivalente sera exprimée en fonction de J_2, J_3, J_4 et Z_i .

L'inertie équivalente de l'ensemble {2, 3, 4} ramenée sur l'axe de rotation du solide 4 :

$$J_{eq} = J_4 + J_3 \left(\frac{\omega_{3/1}}{\omega_{4/1}} \right)^2 + J_2 \left(\frac{\omega_{2/1}}{\omega_{4/1}} \right)^2 = J_4 + J_3 \left(\frac{Z_{4-3}}{Z_{3-4}} \right)^2 + J_2 \left(\frac{Z_{4-3} Z_{3-2}}{Z_{3-4} Z_2} \right)^2$$

Question 26 - Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble {2, 3, 4} et en déduire l'expression de F en fonction $J_2, J_3, J_4, Z_i, R_{4-\xi}$ et $\dot{\omega}_{roue}$.

Le mouvement de l'avion par rapport à la piste est un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport à la piste. Donc le repère R_a lié à l'avion est un repère galiléen.

Théorème de l'énergie cinétique (énergie puissance) appliqué à l'ensemble $\Sigma = \{2, 3, 4\}$

dans son mouvement par rapport au repère galiléen R_a : $\frac{d E_C(\Sigma/R_a)}{dt} = P(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma/R_a) + \underbrace{P_{int}}_0$

On sait que : $E_C(\Sigma/R_a) = \frac{1}{2} J_{eq} \omega_{4/1}^2$ donc $\frac{d E_C(\Sigma/R_a)}{dt} = J_{eq} \omega_{4/1} \dot{\omega}_{4/1}$

Pour les puissances galiléennes des actions mécaniques extérieures exercées sur $\{2, 3, 4\}$.

$$P(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma/R_a) = \underbrace{P(\text{pesanteur} \rightarrow \Sigma/R_a)}_0 + P(5 \rightarrow 4/R_a) + \underbrace{P(1 \rightarrow \Sigma/R_a)}_0$$

$$P(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma/R_a) = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{5 \rightarrow 4,5} = F \vec{u} \\ \vec{D}I_{45} \wedge F \vec{u} \end{array} \right\}_D \otimes \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{4/1} = \omega_{4/1} \vec{x}_a \\ \vec{0} \end{array} \right\}_D$$

$$P(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma/R_a) = (-R_{4,5} \vec{z}_a \wedge F \vec{u}) \bullet \omega_{4/1} \vec{x}_a = \omega_{4/1} R_{4,5} F \cos(20^\circ)$$

On obtient : $J_{eq} \dot{\omega}_{4/1} = R_{4,5} F \cos(20^\circ)$ Remarque $\dot{\omega}_{4/1} > 0$

De plus $\left| \frac{\dot{\omega}_{4/1}}{\dot{\omega}_{roue}} \right| = \frac{Z_5}{Z_{4,5}}$

Alors $F = \frac{J_{eq} \frac{Z_5}{Z_{4,5}} |\dot{\omega}_{roue}|}{R_{4,5} \cos(20^\circ)} = \frac{J_{eq} Z_5 |\dot{\omega}_{roue}|}{Z_{4,5} R_{4,5} \cos(20^\circ)}$

Or $J_{eq} = J_4 + J_3 \left(\frac{Z_{4-3}}{Z_{3-4}} \right)^2 + J_2 \left(\frac{Z_{4-3} Z_{3-2}}{Z_{3-4} Z_2} \right)^2$

On obtient :
$$F = \frac{J_4 + J_3 \left(\frac{Z_{4-3}}{Z_{3-4}} \right)^2 + J_2 \left(\frac{Z_{4-3} Z_{3-2}}{Z_{3-4} Z_2} \right)^2}{Z_{4,5} R_{4,5} \cos(20^\circ)} Z_5 |\dot{\omega}_{roue}|$$

Question 27 - Sachant que le module de l'engrenage pignon 4-5 et roue dentée 5 est de 4 mm. Calculer la valeur de F et conclure.

A.N. : $J_2=0,0152 \text{ kg.m}^2$; $J_3=0,013 \text{ kg.m}^2$; $J_4=0,0561 \text{ kg.m}^2$; $Z_2=20$; $Z_{3,2}=79$; $Z_{3,4}=21$; $Z_{4,3}=71$; $Z_{4,5}=32$ et $Z_5=127$.

$$|\dot{\omega}_{roue}| = \frac{1750 \times \frac{\pi}{30}}{0,1} = 1832,6 \text{ rad.s}^{-2}$$

$$R_{4,5} = \frac{m Z_{4,5}}{2} = \frac{4 \times 32}{2} = 64 \text{ mm}$$

$$J_{eq} = 0,0561 + 0,013 \times \left(\frac{71}{21} \right)^2 + 0,0152 \times \left(\frac{71 \times 79}{21 \times 20} \right)^2 = 2,92 \text{ kg.m}^2$$

$$F = \frac{J_{eq} Z_5 |\dot{\omega}_{roue}|}{Z_{4,5} R_{4,5} \cos(20^\circ)} \approx \frac{2,92 \times 127 \times 1832,6}{32 \times 64 \times 10^{-3} \times \cos(20^\circ)} \approx 352602 \text{ N}$$

Lors du « taxiage out », le couple maxi du moteur est d'environ 200 N.m, on obtient un effort dans l'engrenage 5/4-5 d'environ $F_1 = 45000$ N.

A partir du résultat de cette question, on constate que l'effort dans l'engrenage 5/4-5 est très important, environ 8 fois F_1 .

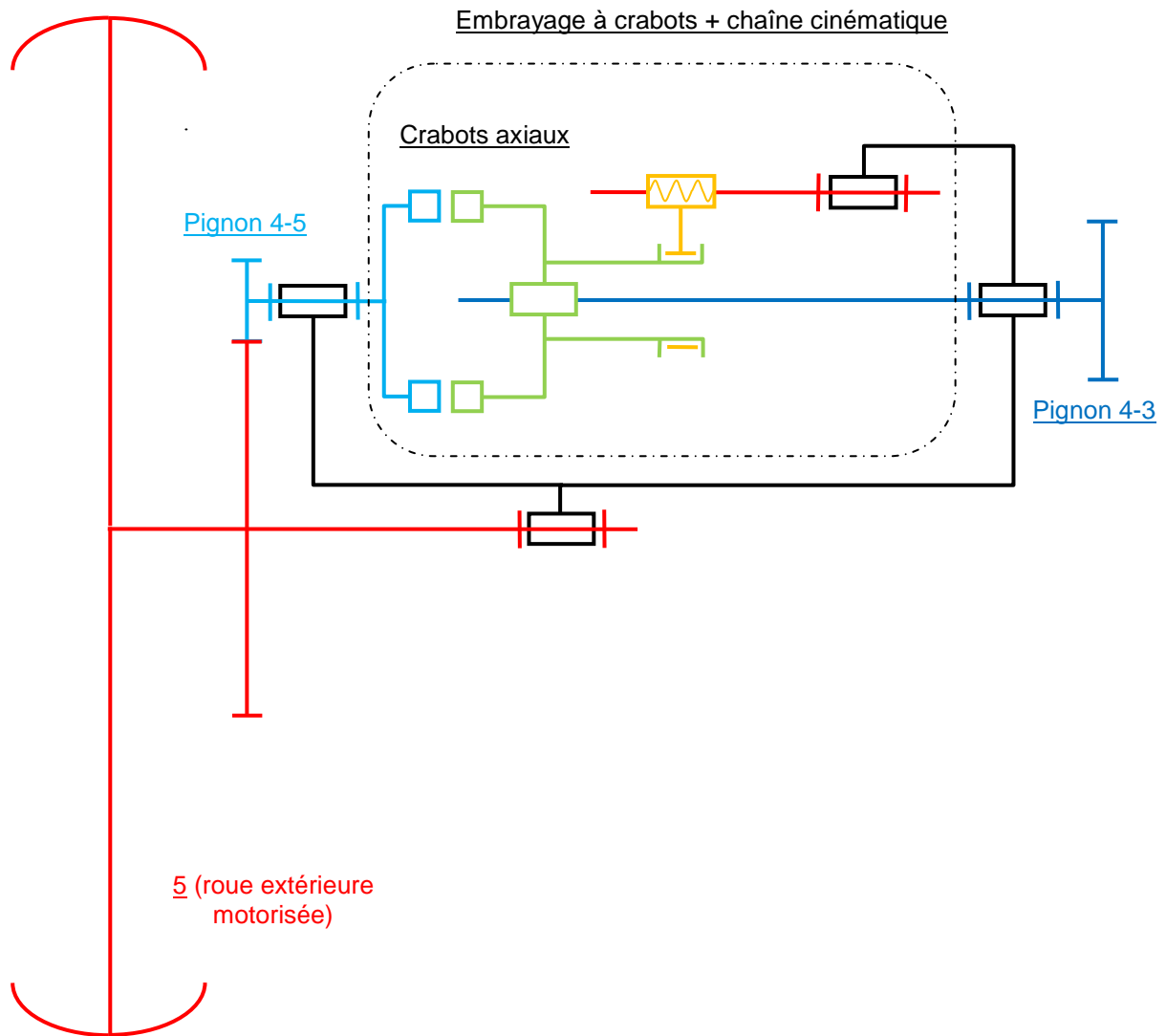
Question 28 - A partir des résultats de la question précédente et des exigences du CdCF, justifier l'utilisation de l'embrayage placé entre le pignon 4-5 et la sortie du réducteur GB12.

A partir du résultat de la question précédente, on constate que l'effort dans l'engrenage 5/4-5 est très important.

Donc pour réduire cet effort, il faut limiter le nombre de solides à mettre en rotation pour diminuer l'inertie équivalente J_{eq} .

De plus le CdCF impose de ne pas perturber la rotation de la roue lors des phases d'atterrissage et de décollage d'où l'utilisation d'un embrayage placé le plus près possible de la roue motorisée.

Question 29 - Recopier sur votre copie le schéma cinématique ci-dessous (**figure 13**) et le compléter en proposant un modèle cinématique de l'embrayage à crapot en position débrayée ainsi que la chaîne cinématique relative au déplacement du crapot-M.



Cinquième partie - Études des infrastructures aéroportuaires.

Question 30 - Sachant que la masse totale de l'avion est de **79000kg** et en utilisant les données de la **figure 14**, déterminer les efforts transmis à la piste par le train avant et les trains principaux d'un Airbus A320. Vous donnerez vos résultats en **kN**.

$$\text{Poids Airbus A320} \rightarrow 79000 \times 9,81 = 774990 \text{ N} \rightarrow 775 \text{ kN}$$

$$\text{Symétrie de l'avion} \rightarrow 775/2 = 387,5 \text{ kN}$$

$$\sum M_f / \text{train avant} = 0$$

$$387,5 \times 11,42 - F_{\text{train prin.}} \times 12,70 = 0$$

$$F_{\text{train prin.}} = 4425,3/12,70 = \underline{348,4 \text{ kN par train principal}}$$

$$\sum F / \bar{Y} = 0$$

$$348,4 - 387,5 + \frac{1}{2} \times F_{\text{att.av}} = 0$$

$$F_{\text{att.av.}} = 39,1 \times 2 = \underline{78,2 \text{ kN pour le train avant}}$$

Question 31 - Calculer la répartition des charges en pourcentage entre le train avant et les trains principaux.

$$\text{Charge sur les trains principaux} : 348,4 \times 2 = 696,8 \text{ kN}$$

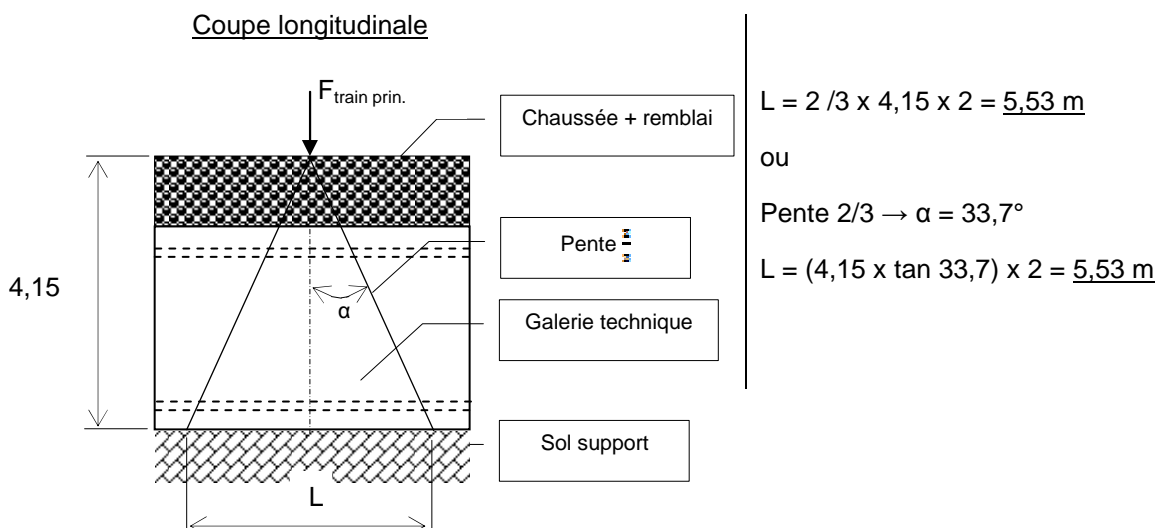
$$\text{En \%} : (696,8 / 775) \times 100 \approx \underline{90 \%}$$

$$\text{Charge sur le train avant} : 78,2 \text{ kN}$$

$$\text{En \%} : (78,2 / 775) \times 100 \approx \underline{10 \%}$$

Question 32 - Lorsque un train principal est positionné au droit de la galerie technique, et en admettant que la diffusion de la charge se fait avec une pente de 2/3 dans les couches de chaussée et dans la structure en béton de la galerie technique, calculer la longueur de galerie diffusant la charge d'un train principal sur le sol support.

Le document **DT3** comporte les données ayant trait à l'architecture de la galerie technique.



Question 33 - En considérant que l'ensemble des charges s'appliquent sur l'axe de symétrie de la galerie technique.

Calculer la pression verticale appliquée sur le sol par le radier. L'étude sera conduite pour une longueur de galerie égale à **5,00 m**. Le sol support est supposé élastique et le radier infiniment rigide.

Poids propre d'un mètre de galerie :

Surface vide pour plein :

$$2,400 \times 2,950 = 7,08 \text{ m}^2$$

$$\text{Surface vide : } 2,000 \times 2,450 = 4,90 \text{ m}^2$$

$$\text{Déduire : } 4 \text{ fois } (0,100 \times 0,100) / 2 = 0,02 \text{ m}^2$$

$$\text{Ensemble : } \quad \quad \quad \underline{\quad \quad \quad} 4,88 \text{ m}^2$$

$$\text{Reste : } \quad \quad \quad 2,20 \text{ m}^2$$

$$\text{X 1 mètre} \quad \quad \quad 2,200 \text{ m}^3$$

$$\text{X poids propre B.A.} \quad \quad \quad 55 \text{ kN}$$

$$\text{Poids propre d'un mètre de chaussée : } 0,300 \times 2,400 \times 1,000 \times 25 = 18 \text{ kN}$$

$$\text{Poids propre d'un mètre de couche de forme : } 0,400 \times 2,400 \times 1,000 \times 19 = 18,3 \text{ kN}$$

$$\text{Poids propre d'un mètre de couche de remblai : } 0,500 \times 2,400 \times 1,000 \times 18 = 21,6 \text{ kN}$$

$$\text{Poids propre d'un mètre de réseaux = } 5 \text{ kN}$$

Résultante aux E.L.U. :

$$R = 1,35 \times [(55 + 18 + 18,3 + 21,6 + 5) \times 5] + (1,5 \times 350)$$

$$R = (1,35 \times 589,5) + (1,5 \times 350)$$

$$R = 795,8 + 525 = 1320,8 \text{ kN}$$

Calcul de la pression sur le sol :

$$q_{\text{sol}} = 1320,8 \cdot 10^{-3} / (2,40 \times 5,00) = \underline{0,11 \text{ MPa}}$$

Question 34 - La contrainte ultime conduisant à la rupture du sol sous une fondation peut être évaluée à partir des résultats d'essais en laboratoire. Un essai de cisaillement à

long terme (conditions drainées) à la boîte de Casagrande a été effectué sur le sol support. Calculer la contrainte ultime du sol.

Lecture sur la droite de Coulomb :

$$C' = 0,02 \text{ MPa}$$

$$\varphi' = 0,200/0,40 = 0,50 \rightarrow \varphi' = 26,6^\circ$$

Calcul de q_u :

$$\varphi' = 26,6^\circ \rightarrow \text{lecture sur les tableaux par interpolation linéaire}$$

$$N_\gamma = 11,69 ; N_c = 23,26 ; N_q = 12,66$$

Le radier de la galerie peut être assimilé à une semelle filante ($L \approx \infty$)

$$S_\gamma = 1 ; S_c = 1 ; S_q = 1$$

$$q_o = \sum_i h_i \cdot \gamma_i$$

$$q_o = (0,300 \times 25) + (0,400 \times 19) + (3,450 \times 18)$$

$$q_o = 7,50 + 7,60 + 62,10 = 77,20 \text{ kPa} \rightarrow 0,0772 \text{ MPa}$$

$$q_u = (0,5 \times 1 \times 18 \cdot 10^{-3} \times 2,40 \times 11,65) + (1 \times 0,02 \times 23,26) + (1 \times 0,0772 \times 12,66)$$

$$q_u = 0,251 + 0,465 + 0,977$$

$$\underline{q_u = 1,69 \text{ MPa}}$$

Question 35 - En comparant votre résultat de la question 33 et celui de la question 34 et en incluant la notion de tassement, conclure sur la résistance du sol support.

$$\text{Contrainte sur le sol : } q_u = 0,11 \text{ MPa}$$

Pour prendre en compte les tassements, si il n'y a pas d'étude spécifique, on estime q_d en prenant $q_u / 2$.

$$q_d \rightarrow 1,69 / 2 = 0,84 \text{ MPa}$$

0,11 < 0,84 MPa → conclusion : les conditions de résistance et de tassement sont vérifiées.

Question 36 - Justifier par le calcul les valeurs des pressions retenues sur les piedroits.

Donnée complémentaire : Les efforts de poussée étant repris par le radier et la dalle, le déplacement de l'ouvrage n'existe pas (paroi rigide). Le calcul de la poussée se fera avec le coefficient K_0 (coefficient des terres au repos). La formule de Jaky donne une valeur de K_0 en fonction de l'angle de frottement φ' .

Coefficient des terres au repos :

$$K_0 = 1 - \sin 38$$

$$K_0 = 0,38$$

Contrainte verticale en haut des piedroits :

$$\sigma'_v = \gamma_i \times h_i$$

$$\sigma'_v = (18 \times 0,500) + (19 \times 0,400) + (25 \times 0,300)$$

$$\sigma'_v = 9 + 7,6 + 7,5$$

$$\sigma'_v = 24,1 \text{ kPa}$$

Pression en haut des piedroits :

$$\sigma'_h = 0,38 \times 24,1 = 9,15 \text{ kPa} \rightarrow \text{Valeur arrondie à 10 kPa}$$

Contrainte verticale en en bas des piedroits :

$$\sigma'_v = \gamma_i \times h_i$$

$$\sigma'_v = (18 \times 3,450) + (19 \times 0,400) + (25 \times 0,300)$$

$$\sigma'_v = 62,1 + 7,6 + 7,5$$

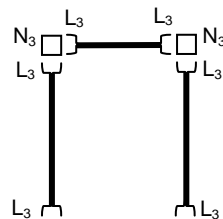
$$\sigma'_v = 77,2 \text{ kPa}$$

Pression en bas des piedroits :

$$\sigma'_h = 0,38 \times 77,2 = 29,3 \text{ kPa} \rightarrow \text{Valeur arrondie à 30 kPa}$$

Question 37 - Définir de façon rigoureuse, le degré d'hyperstaticité de la structure.

On se place dans un système plan, on décompose la structure en barres et en nœuds :



$$3 \times b + \sum N_i - \sum L_i$$

$$3 \times 3 + (2 \times 3) - (6 \times 3) = -3 \rightarrow \text{la structure est hyperstatique de degré 3.}$$

Question 38 - Calculer les inconnues de liaison verticale en A et en B.

Structure symétrique, symétriquement chargée :

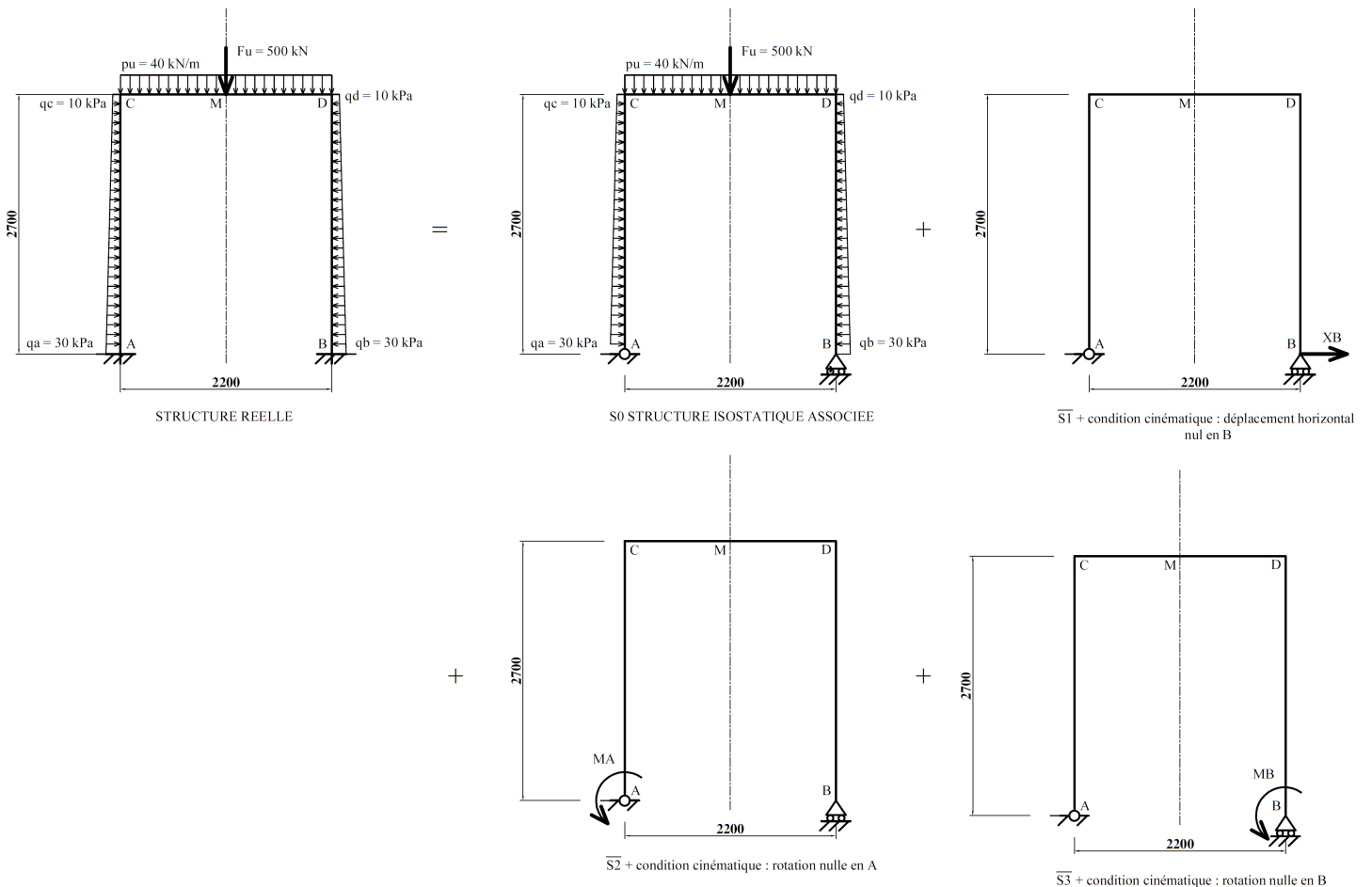
$$Y_A = Y_B = [500 + (40 \times 2,200)] / 2 = 294 \text{ kN} \uparrow$$

Question 39 - En utilisant le principe de superposition et des conditions cinématiques, proposer le principe de résolution de cette structure hyperstatique pour cela :

- Vous effectuerez les schémas des différentes structures associées.
- Vous tracerez les diagrammes du moment fléchissant sur vos différentes structures.
- Vous écrirez le système d'équations à résoudre. Par contre la résolution numérique du système n'est pas demandée.

La structure est hyperstatique d'ordre 3.

- On choisit une structure isostatique associée S_0 .
- En appliquant le principe de superposition et des conditions cinématiques, on définit 3 structures auxiliaires permettant de recréer les liaisons supprimées.
- On se fixe des conditions cinématiques : déplacements et rotations nuls aux points A et B.



- On trace les diagrammes de moment fléchissant de S_0 ; \bar{S}_1 ; \bar{S}_2 ; \bar{S}_3 .

Équations de Mf sur la demi-structure isostatique associée auxiliaire S_0 .

Entre AC :

$$\sum M_{f/G} = 0$$

$$Mf(x) + \frac{10x^2}{2} + 20 \times \frac{(2,70 - x)}{2,70} \times x \times \frac{x}{2} + [20 - (20 - 7,41x)] \times x \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times x = 0$$

$$Mf(x) = 1,23x^3 - 15x^2$$

Valeurs :

$$x = 0 \rightarrow Mf(0) = 0$$

$$x = 2,700 \text{ m} \rightarrow Mf(2,700) = -85 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Entre CM :

$$\sum M_{f/G} = 0$$

$$Mf(x) + 27 \times 1,35 + 27 \times 1,80 - 294x + \frac{40x^2}{2} = 0$$

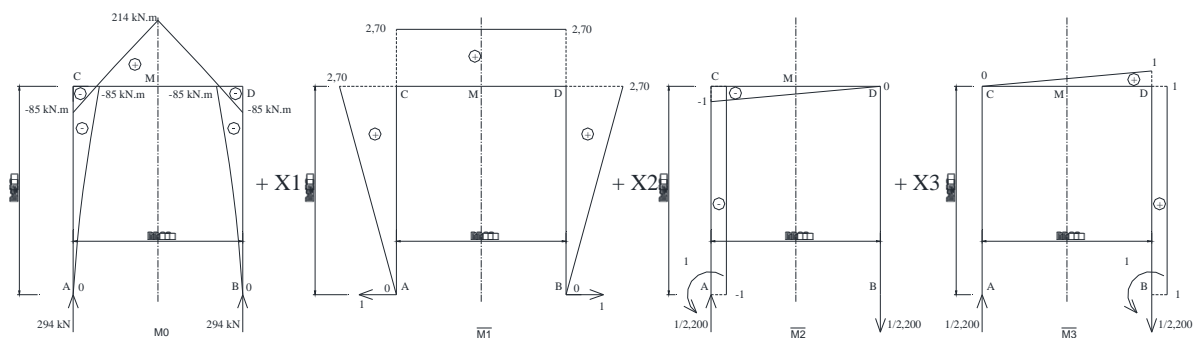
$$Mf(x) = -20x^2 + 294x - 85,05$$

Valeurs :

$$x = 0 \rightarrow Mf(0) = -85 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$x = 1,100 \rightarrow Mf(1,100) = 214 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Pour les structures \bar{S}_1 ; \bar{S}_2 ; $\bar{S}_3 \rightarrow$ tracé des diagrammes sans les équations.



- On applique le théorème de Muller-Breslau. En négligeant N et V devant Mf, on peut écrire :

$$\Delta_{10} = \int_S \frac{M_0 \times \overline{M}_1}{EI} \cdot ds + X1 \int_S \frac{\overline{M}_1 \times \overline{M}_1}{EI} \cdot ds + X2 \int_S \frac{\overline{M}_1 \times \overline{M}_2}{EI} \cdot ds + X3 \int_S \frac{\overline{M}_1 \times \overline{M}_3}{EI} \cdot ds = 0$$

$$\Delta_{20} = \int_S \frac{M_0 \times \overline{M}_2}{EI} \cdot ds + X1 \int_S \frac{\overline{M}_2 \times \overline{M}_1}{EI} \cdot ds + X2 \int_S \frac{\overline{M}_2 \times \overline{M}_2}{EI} \cdot ds + X3 \int_S \frac{\overline{M}_2 \times \overline{M}_3}{EI} \cdot ds = 0$$

$$\Delta_{30} = \int_S \frac{M_0 \times \overline{M}_3}{EI} \cdot ds + X1 \int_S \frac{\overline{M}_3 \times \overline{M}_1}{EI} \cdot ds + X2 \int_S \frac{\overline{M}_3 \times \overline{M}_2}{EI} \cdot ds + X3 \int_S \frac{\overline{M}_3 \times \overline{M}_3}{EI} \cdot ds = 0$$

- On calcule ces intégrales (primitives, tableau d'intégrales de Mohr, théorème de Véréchaguine).
- On résout le système suivant : en posant $X2 = X3$ et en simplifiant par EI.
- On trouve $X1$; $X2$; $X3$ égal à X_B ; M_A ; M_B .

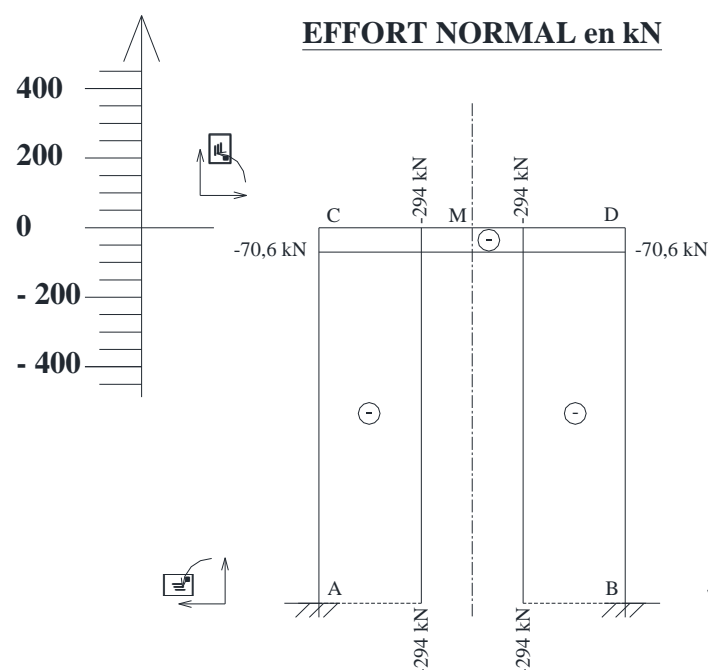
$$X1\delta_{11} + X2\delta_{12} + X3\delta_{13} = -\Delta_{10}$$

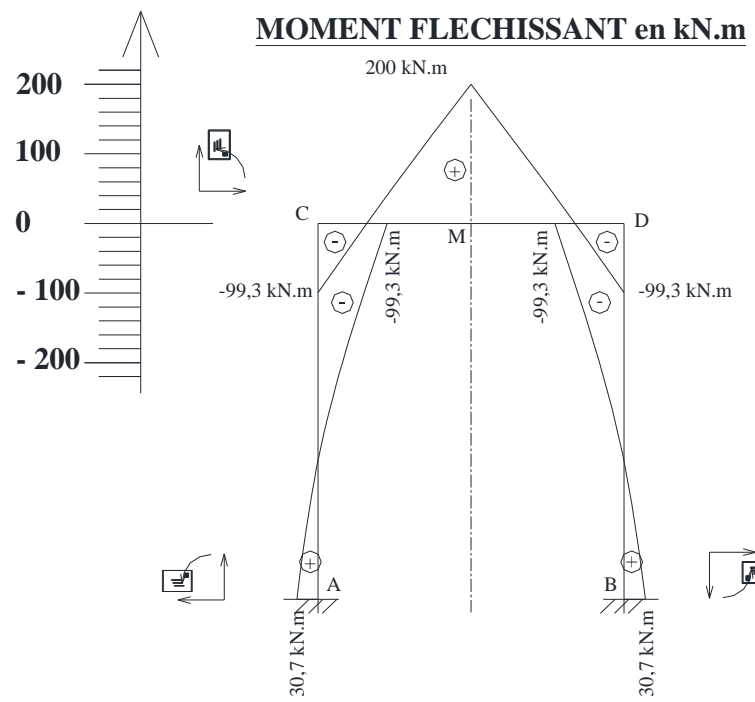
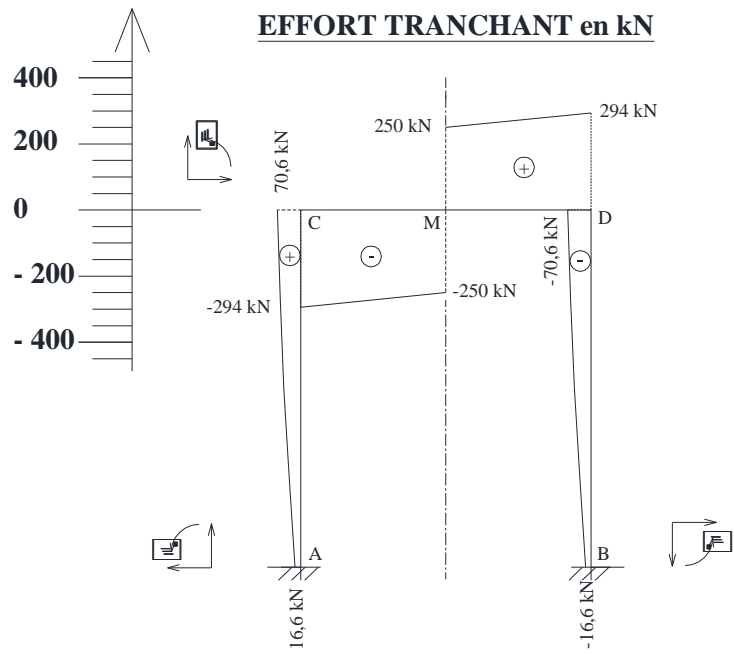
$$X1\delta_{21} + X2\delta_{22} + X3\delta_{23} = -\Delta_{20}$$

$$X1\delta_{31} + X2\delta_{32} + X3\delta_{33} = -\Delta_{30}$$

Question 40 - Tracer les diagrammes de variations des efforts internes [effort normal $N(x)$, effort tranchant $V(x)$ et moment fléchissant $Mfz(x)$] dans les piedroits et la dalle. Pour cela vous utiliserez les résultats du calcul informatique fournis dans le **DT7**.

Vous complétez les documents réponses **DR3** à **DR5** en indiquant sur vos diagrammes les valeurs particulières.





Question 41 - Déterminer la section d'armature en travée pour la dalle supérieure. Les efforts de compression dans la dalle étant faibles, on se placera dans le cas de la flexion simple. Vérifier la valeur réelle de d , la section minimale et maximale des armatures. Le document **DT6** présente un organigramme de calcul respectant l'Eurocode 2. Le document **DT8** donne les caractéristiques des aciers de construction.

Armatures en travée :

$$d \leq 0,9 \times h \rightarrow 0,9 \times 0,300 = 0,270 \text{ m}$$

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \rightarrow \frac{35}{1,5} = 23,3 \text{ MPa}$$

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \rightarrow \frac{500}{1,15} = 434,8 \text{ MPa}$$

$$\mu_u = \frac{M_u}{b_w \times d^2 \times f_{cd}} \rightarrow \frac{0,200}{1,000 \times 0,270^2 \times 23,3} = 0,1177 \leq 0,3717$$

Pivot B les armatures comprimées ne sont pas nécessaires.

$$\alpha_u = 1,25 \times (1 - \sqrt{1 - 2\mu_u}) \rightarrow 1,25 \times (1 - \sqrt{1 - 2 \times 0,1177}) = 0,157$$

$$A_{s1} = \frac{M_u}{d \times (1 - 0,4\alpha_u) \times f_{yd}} \rightarrow \frac{0,200}{0,27 \times (1 - 0,4 \times 0,157) \times 434,8} = 18,18 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$\rho_{s1} = \frac{A_{s1}}{b_w \times d} \rightarrow \frac{18,18 \cdot 10^{-4}}{1,000 \times 0,270} = 0,0067 \rightarrow 0,67 \%$$

Choix des armatures : En travée : 12 HA 14 / m \rightarrow 18,48 cm² / m

Les armatures seront réparties en deux lits.

Vérification de d :

$$d_{\text{réel}} = 0,300 - (0,030 + 0,014) = 0,256 \text{ m} \neq 0,270 \text{ m}$$

On redimensionne avec le $d_{\text{réel}}$

$$\mu_u = \frac{M_u}{b_w \times d^2 \times f_{cd}} \rightarrow \frac{0,200}{1,000 \times 0,256^2 \times 23,3} = 0,131 \leq 0,3717$$

Pivot B les armatures comprimées ne sont pas nécessaires.

$$\alpha_u = 1,25 \times (1 - \sqrt{1 - 2\mu_u}) \rightarrow 1,25 \times (1 - \sqrt{1 - 2 \times 0,131}) = 0,176$$

$$A_{s1} = \frac{M_u}{d \times (1 - 0,4\alpha_u) \times f_{yd}} \rightarrow \frac{0,200}{0,256 \times (1 - 0,4 \times 0,176) \times 434,8} = 19,33 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$\rho_{s1} = \frac{A_{s1}}{b_w \times d} \rightarrow \frac{19,33 \cdot 10^{-4}}{1,000 \times 0,256} = 0,0076 \rightarrow 0,76 \%$$

Nouveau choix en travée : 6 HA 16 + 6 HA 14 / m \rightarrow 12,10 + 9,24 = 21,34 cm² / m

Vérification armatures min

$$A_{s1} > A_{s1min} = \max \left[0,26 \times \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} \times b_w \times d ; 0,0013 \times b_w \times d \right]$$

$$A_{s1} > A_{s1min} = \max \left[0,26 \times \frac{3,2}{500} \times 1,000 \times 0,256 ; 0,0013 \times 1,000 \times 0,256 \right]$$

$$A_{s1} > A_{s1min} = \max [4,26 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 ; 3,33 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2]$$

21,34 cm² > 4,26 cm² → condition vérifiée

Vérification armatures max

$$A_{s1} < 0,04 \times A_c = 0,04 \times 1,000 \times 0,300$$

$$A_{s1} < 0,0120 \text{ m}^2$$

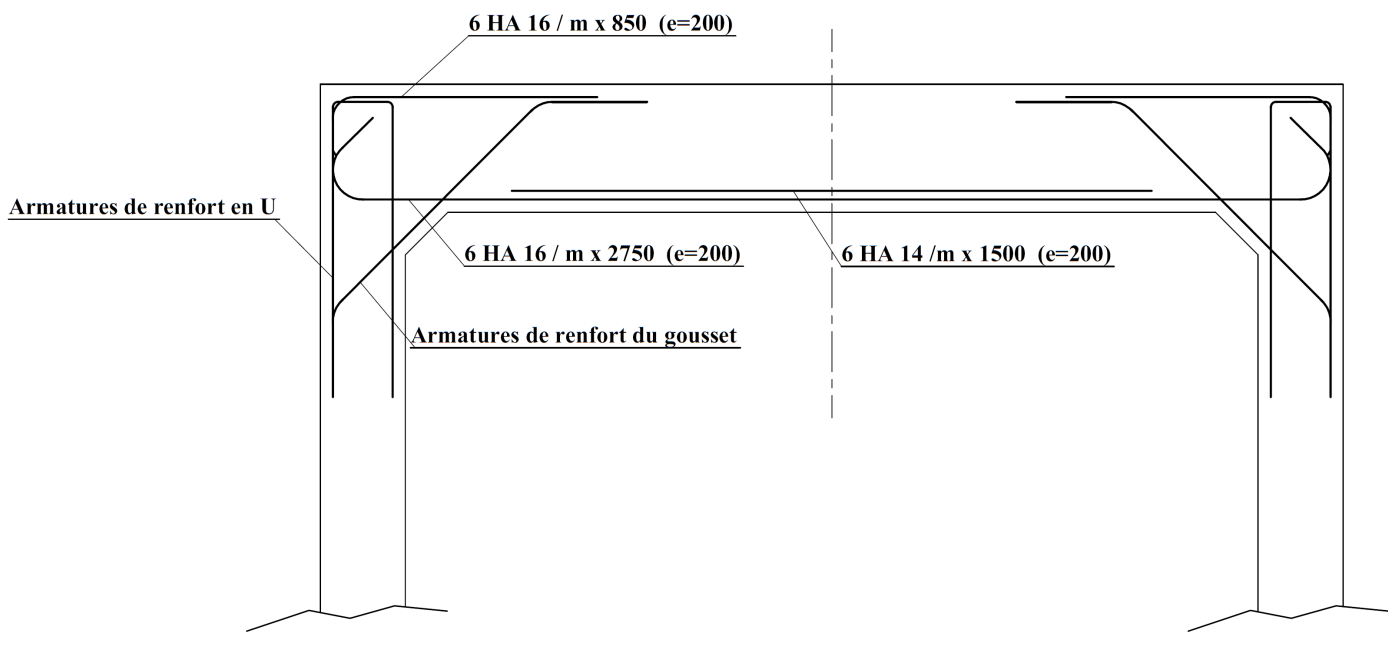
120 cm² > 21,34 cm² → condition vérifiée

Question 42 - Déduire de la question 41 la section d'armature sur les appuis. Proposer un schéma de principe des armatures pour la dalle supérieure sur le document réponse **DR5**. Vous préciserez les diamètres des armatures choisies. Le document **DT8** donne les caractéristiques des aciers de construction.

Sur appuis :

$$19,33 / 2 = 9,67 \text{ cm}^2 / \text{m} \rightarrow \underline{6 \text{ HA } 16 (12,10 \text{ cm}^2 / \text{m})}$$

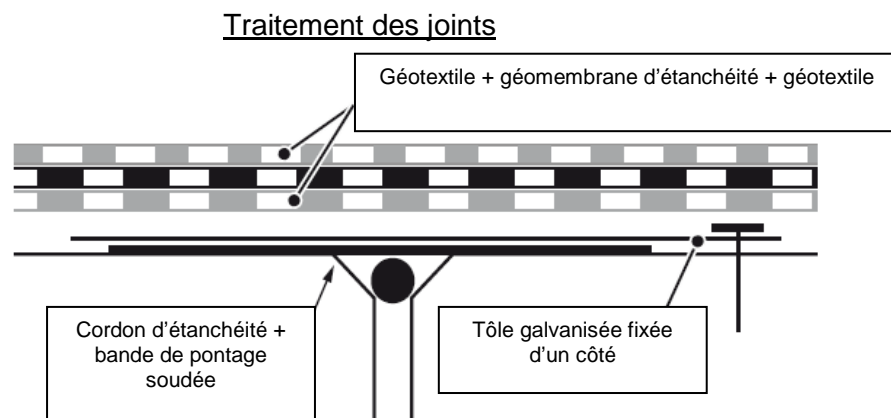
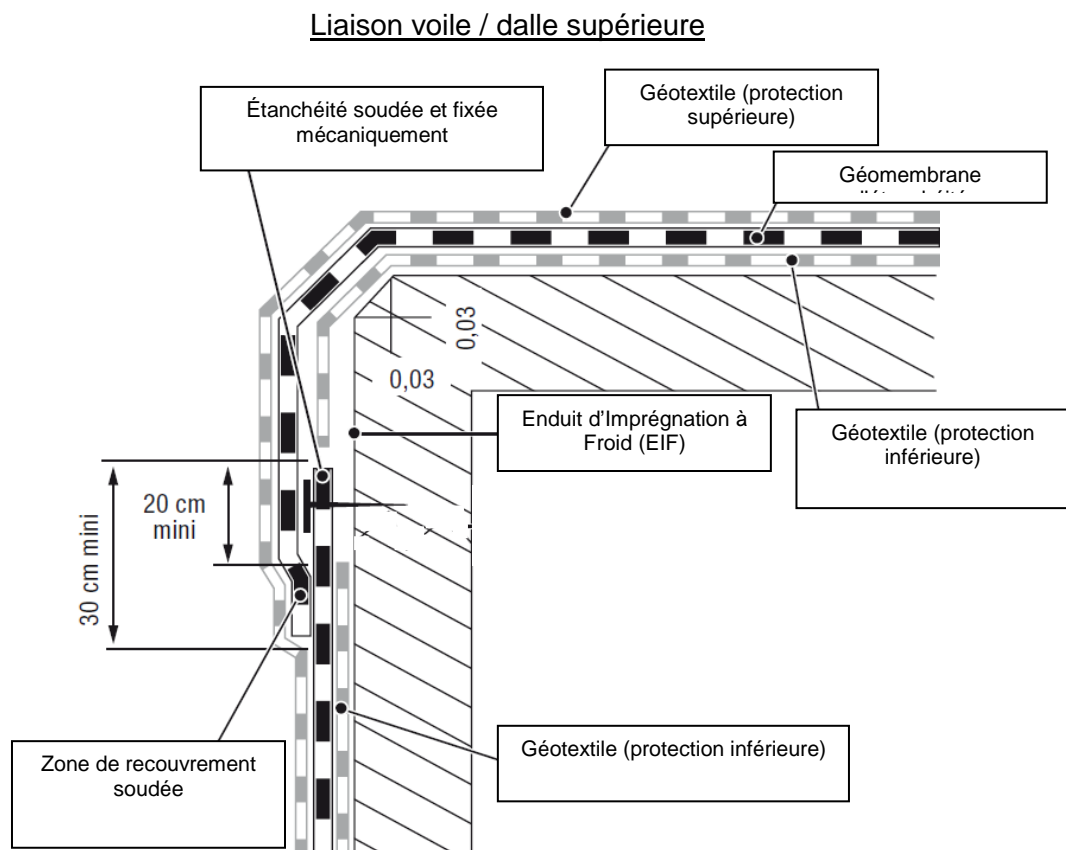
Schéma de principe des armatures pour la dalle de la galerie technique



Question 43 - Proposer une solution permettant d'assurer l'étanchéité de la galerie.

Vous proposerez deux croquis de votre solution : le premier à la liaison piedroits / dalle supérieure et le second au droit d'un joint entre deux cadres préfabriqués.

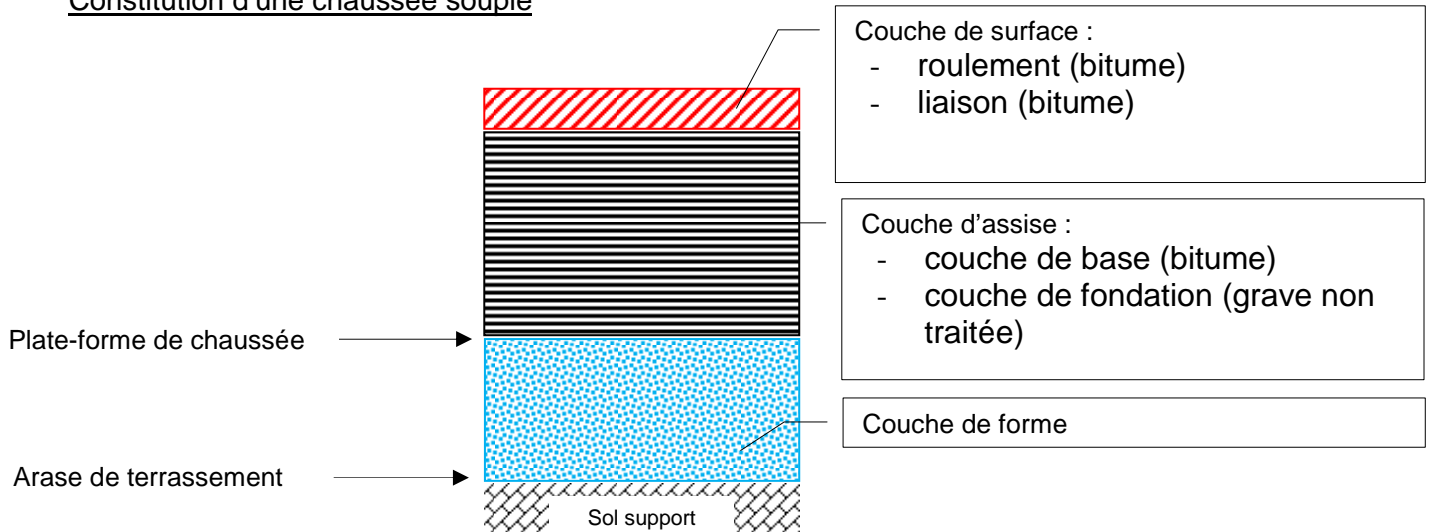
L'étanchéité peut être réalisée à l'aide d'une géomembrane en bitume élastomère armée par un voile de verre. Cette géomembrane est fixée par soudage et clouage en tête de voile. Elle est protégée par 2 géotextiles (protection inférieure et supérieure). La protection supérieure peut être renforcée par une feuille de polypropylène embossée + écran thermocollé en non tissé polypropylène.



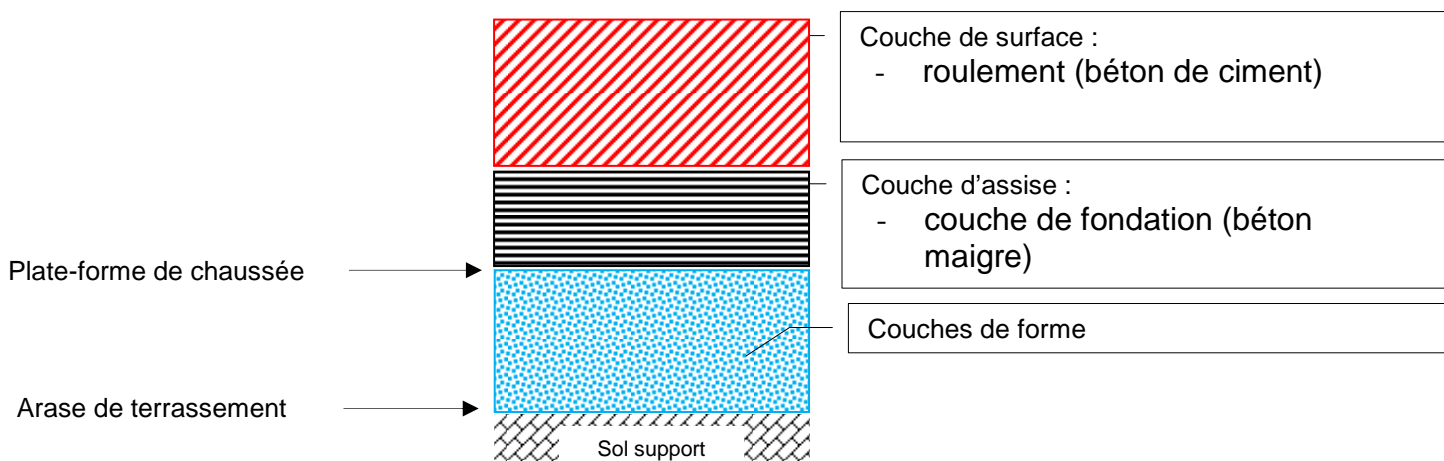
Question 44 - Le CCTP préconise la réalisation d'une chaussée souple pour la piste et une chaussée rigide en béton pour les aires de stationnement.

A l'aide de schémas légendés, préciser la constitution de ces deux chaussées, puis justifier le choix de la chaussée rigide en béton pour les aires de stationnement.

Constitution d'une chaussée souple



Constitution d'une chaussée rigide



L'emploi d'une structure souple bitumineuse est déconseillé pour les aires de stationnement pour plusieurs raisons :

1) Il y a des risques de poinçonnement importants sous l'effet des charges transmises par les trains principaux. Par nature même, le béton ne s'ornièrè pas. De plus, la forte rigidité du béton permet de mobiliser des efforts notables de traction par flexion. La répartition des efforts au niveau des couches de fondation conduit à une faible sollicitation de ces dernières et donc à l'élimination de tout risque de déformation.

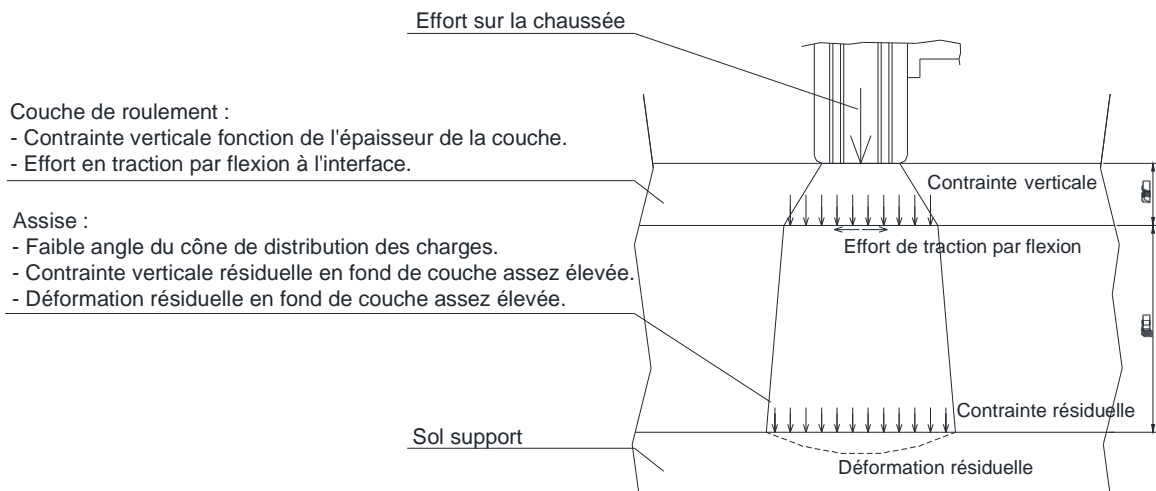
2) Les matériaux traités aux liants hydrocarbonés sont sensibles aux hydrocarbures, le matériau béton ne subit aucune dégradation suite à l'attaque des hydrocarbures.

3) Le matériau béton est insensible aux variations de températures.

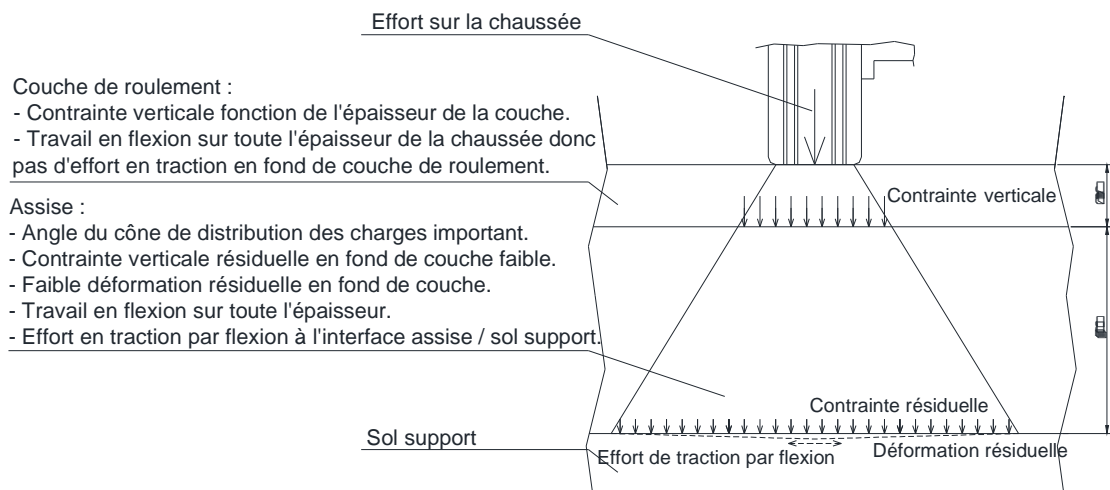
Question 45 - D'une façon générale, schématiser le principe de fonctionnement mécanique d'une chaussée souple et d'une chaussée rigide. Vous adopterez un modèle de comportement élastique linéaire.

Pour cela, sur le document réponse **DR6**, vous dessinerez le cône de distribution des charges, vous préciserez sans les calculer, la nature des efforts, des contraintes et des déformations, aux interfaces des couches.

Chaussée souple



Chaussée rigide



Question 46 - En utilisant la méthode exposée dans le **DT9**, effectuer la vérification au gel-dégel de la partie courante de la piste pour une protection totale.

Conclure sur l'intégrité de la chaussée vis à vis des conditions climatiques.

La protection thermique Q_{ng} apportée par les matériaux non gélifs de la couche de forme vaut :

$$Q_{ng} = \frac{A_n \times h_n^2}{h_n + 10} \rightarrow \frac{0,12 \times 40^2}{40 + 10} = 3,84 \text{ (}^\circ\text{C} \cdot \text{jour)}^{1/2}$$

Quantité de gel admissible au niveau de la plate-forme de la chaussée vaut :

$$Q_{PF} = Q_{ng} + Q_g \rightarrow 3,84 + 0 = 3,84 \text{ (}^\circ\text{C} \cdot \text{jour)}^{1/2}$$

$Q_g = 0$ car on souhaite une protection totale.

Quantité de gel transmise à la surface de la chaussée :

$$Q_s = \sqrt{0,7 \times (I - 10)} \rightarrow \sqrt{0,7 \times (170 - 10)} = 10,58 \text{ (}^\circ\text{C} \cdot \text{jour)}^{1/2}$$

Quantité de gel transmise au niveau de la plate-forme de la chaussée :

$$Q_t = (1 + a \times h) \times Q_s + b \times h$$

$$h = \sum h_i \rightarrow 6 + 12 + 40 = 58 \text{ cm}$$

$$a = \frac{1}{h} \sum (a_i \times h_i) \rightarrow \frac{1}{58} (0,008 \times 6 + 0,008 \times 12 + 0,008 \times 40) = 0,008 \text{ (}^\circ\text{C} \cdot \text{jour)}^{1/2} \text{ cm}^{-1}$$

$$b = \frac{1}{h} \sum (b_i \times h_i) \rightarrow \frac{1}{58} (0,06 \times 6 + 0,06 \times 12 + 0,10 \times 40) = 0,088 \text{ (}^\circ\text{C} \cdot \text{jour)}^{1/2} \text{ cm}^{-1}$$

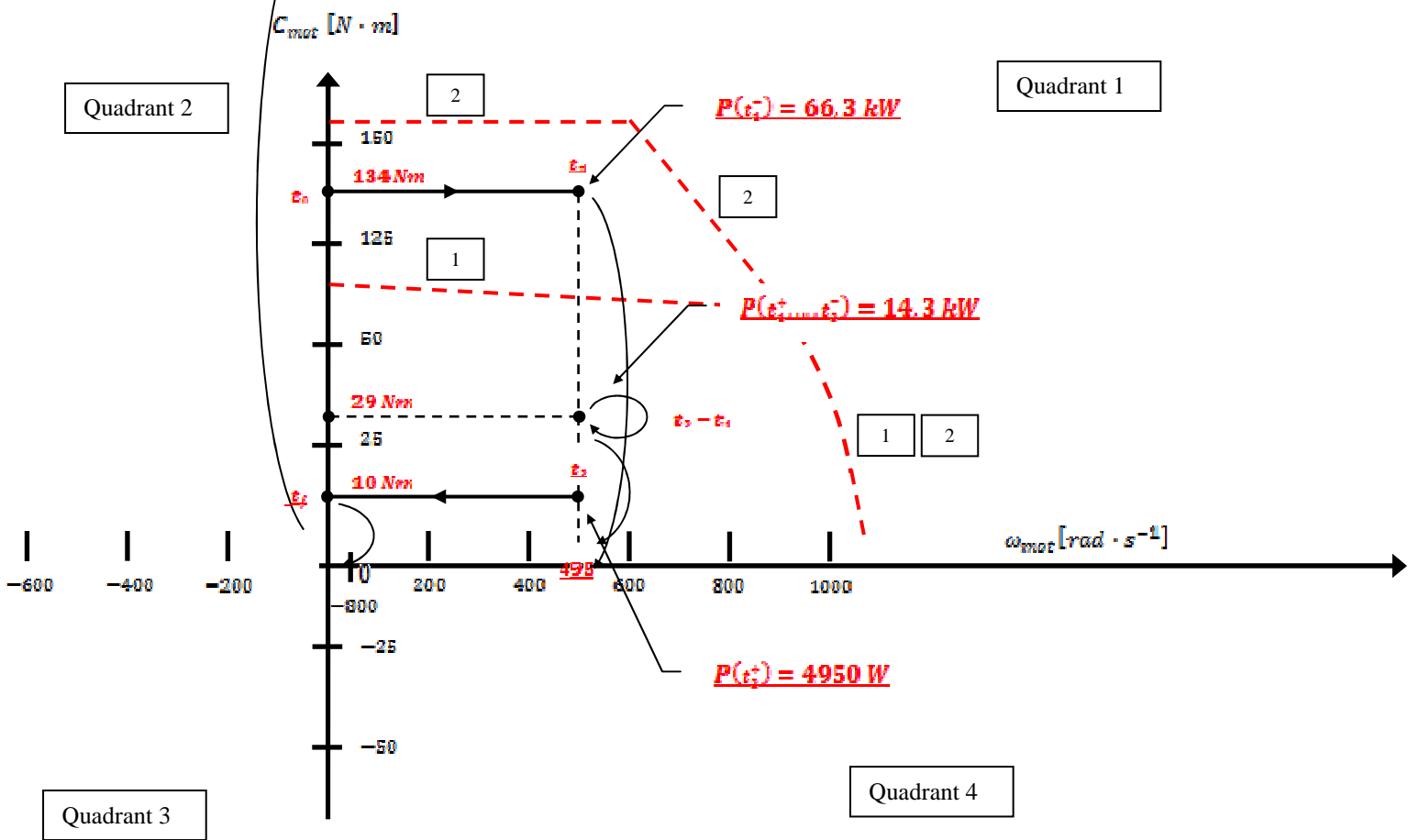
$$Q_t = \frac{Q_s - (b \times h)}{1 + (a \times h)} \rightarrow \frac{10,58 - (0,088 \times 58)}{1 + (0,008 \times 58)} = 3,74 \text{ (}^\circ\text{C} \cdot \text{jour)}^{1/2}$$

On doit vérifier que : $Q_t < Q_{PF} \rightarrow 3,74 < 3,84 \text{ (}^\circ\text{C} \cdot \text{jour)}^{1/2}$

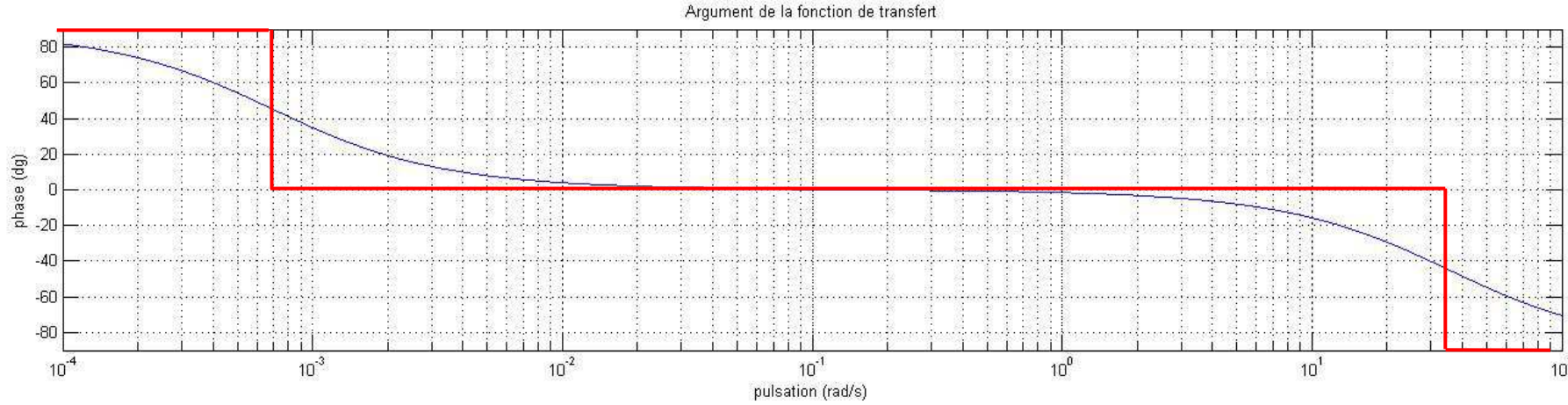
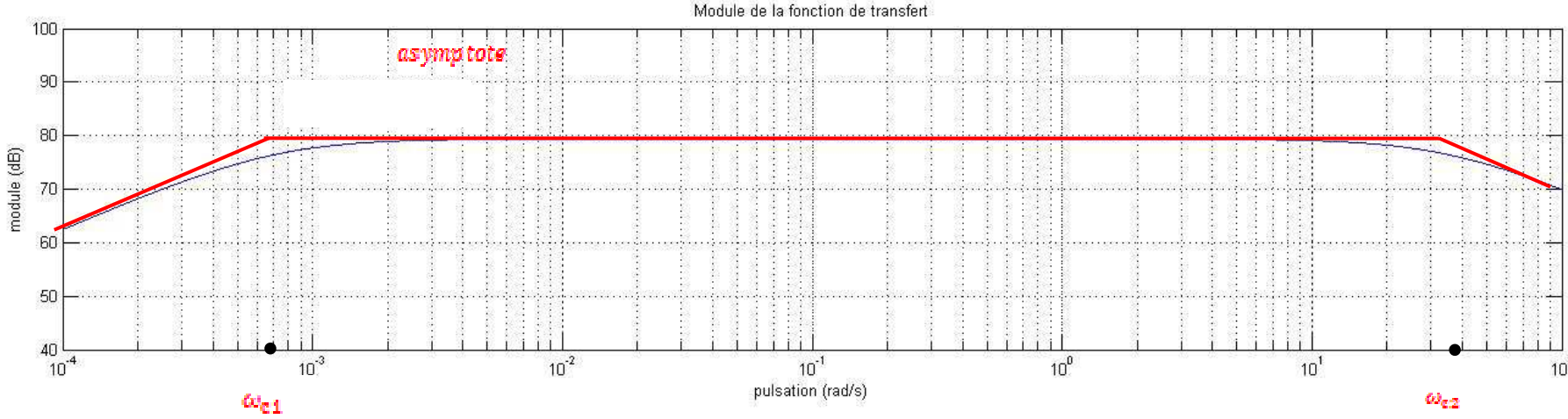
Conclusion : La structure de chaussée est donc bien vérifiée au gel-dégel pour une protection totale.

Document Réponse DR1

Evolution du point de fonctionnement dans le plan couple-vitesse



Document Réponse DR2



Représentation du module et de la phase dans le plan de Bode de la fonction de transfert $H_{cons}(j\omega)$