

SESSION 2011

**AGRÉGATION
CONCOURS EXTERNE**

Section : GÉNIE ÉLECTRIQUE

**COMPOSITION D'AUTOMATIQUE
ET D'INFORMATIQUE INDUSTRIELLE**

Durée : 6 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.

Tournez la page S.V.P.

A

<p>Systèmes de contrôle d'attitude et d'orbite d'un satellite rigide Agrégation de Génie électrique Composition d'Automatique et d'Informatique Industrielle Durée 6 heures</p>

Avertissement

L'épreuve se compose de parties indépendantes. Les candidats sont donc invités à lire entièrement l'énoncé avant de commencer à composer.

Il est rappelé que les candidats doivent impérativement utiliser les notations indiquées dans le texte ou les figures. Les candidats sont priés de rédiger les réponses relatives aux différentes parties de l'énoncé sur des feuilles séparées.

Les candidats doivent présenter les calculs clairement, dégager et encadrer les résultats relatifs à chaque question référencée dans le sujet. Les correcteurs recommandent d'écrire lisiblement, de numéroter chaque copie en y faisant apparaître clairement la partie traitée.

Présentation

Problématique du contrôle d'attitude pour le satellite Demeter

Le mouvement d'un satellite en orbite est assimilé au mouvement d'un corps rigide dans un référentiel inertiel. Ce mouvement peut être décrit par le mouvement de translation de son centre de masse et par le mouvement de rotation du corps rigide autour de son centre de masse. Le pilotage de ce mouvement nécessite donc la définition d'un système de contrôle d'orbite (contrôle du mouvement de translation) et celle d'un système de contrôle d'attitude (asservissement de la position angulaire du satellite autour de son centre de gravité). Le rôle de ce dernier qui sera étudié ici est de contrôler à travers l'orientation du satellite celle des instruments de mesure embarqués et celle des panneaux solaires afin que la plateforme puisse remplir sa mission qu'elle soit de nature scientifique, commerciale ou militaire.

La plateforme satellite concernée dans cette étude est une plateforme microsatellite appelée Demeter et développée au CNES. Ce satellite est le premier de la filière de microsatellites Myriade dont le développement a été décidé en 1998 par le CNES afin d'élaborer des moyens réduits en coût et en développement d'accès à l'espace. Il a été lancé de Baïkonour le 29 juin 2004 et injecté sur une orbite basse d'altitude 700 km (demi-grand axe $a = 7090$ km), quasi circulaire (excentricité $e < 0.001$), d'inclinaison $i = 98$ degrés et d'ascension droite du noeud ascendant $\Omega = 250$ degrés. Il s'agit d'une mission scientifique dont l'objectif principal est l'étude des origines sismique et anthropique des perturbations de la ionosphère. La plateforme a donc embarqué des instruments scientifiques de mesure pour collectionner des données sur les différentes composantes du champ électromagnétique terrestre. Les performances du système de contrôle d'attitude sont ainsi particulièrement importantes pour la réussite de la mission.

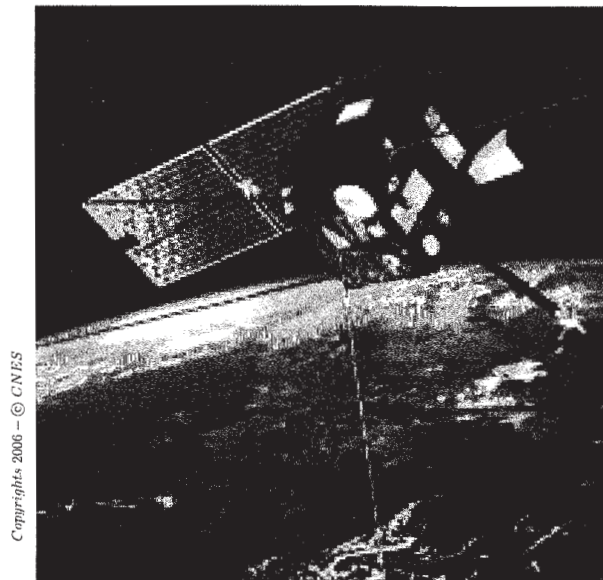


FIG. 1 – Vue d'artiste du satellite Demeter au dessus de la Grèce

De par la nature de la mission scientifique et le large spectre de pointages (géocentrique, inertiel, solaire ou orienté selon la vitesse) que cela induit, l'architecture du système de contrôle d'attitude est définie dans le cadre d'une stabilisation suivant trois axes. Le système de contrôle d'orbite et d'attitude de Demeter fonctionne suivant 4 modes résumés dans la

figure 2

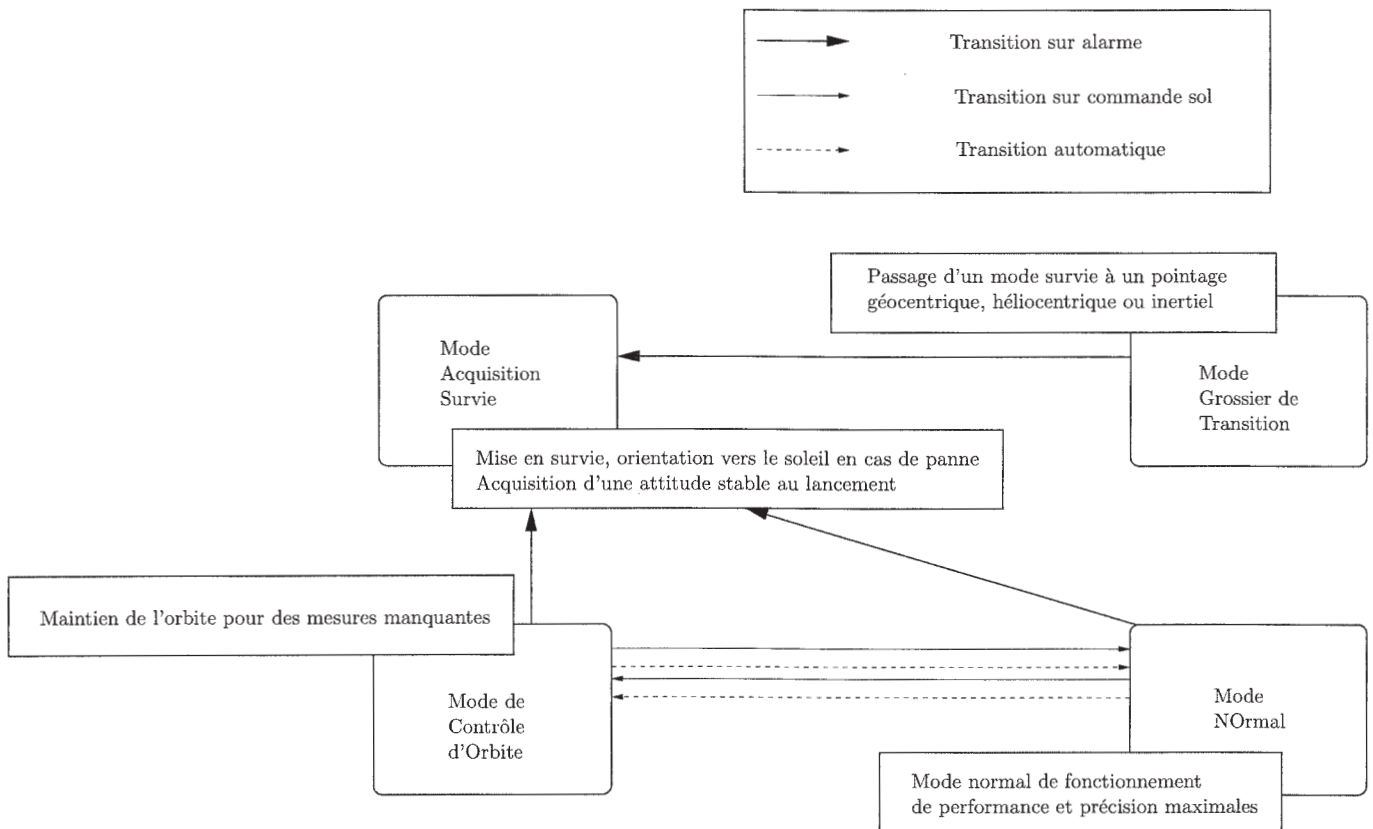


FIG. 2 – Différents modes de contrôle du satellite Demeter

Pour chaque mode, les objectifs en termes de stabilisation de pointage assignés au système de contrôle d'attitude peuvent être sensiblement différents. Seuls les modes MAS et MCO seront étudiés dans ce document. Globalement, afin de réaliser les différents contrôle de pointage, le satellite dispose des actionneurs et capteurs suivants :

- Actionneurs :
 - 4 roues à réaction (RWS) ;
 - 3 magnéto-coupleurs (MTB) ;
 - 4 tuyères (THR) (poussée maximale de 1 Newton).
- Capteurs :
 - 3 gyromètres (GYR) ;
 - 3 magnétomètres (MAG) ;
 - 3 senseurs solaires (SAS) ;
 - 3 senseurs stellaires (SST).

Les solutions de contrôle d'attitude proposées dans cette étude s'appuient sur la plateforme Demeter mais ne sont pas pour autant celles qui ont été mises en œuvre et testées en vol réel.

Notations

Repères et bases

- \mathcal{I} : $(O_I, \vec{i}_I, \vec{j}_I, \vec{k}_I)$: repère lié au référentiel pseudo-inertiel géocentrique ;
- \mathcal{B} : $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$: repère de consigne lié au satellite ;
- \mathcal{R} : $(O, \vec{x}_R, \vec{y}_R, \vec{z}_R)$: repère de référence lié au satellite ;

Notations mathématiques

- $\frac{d\vec{v}}{dt}|_{\mathcal{R}}$: dérivée du vecteur \vec{v} par rapport à un référentiel associé à repère \mathcal{R} ;
- $s \in \mathbb{C}$: variable de Laplace ;
- $\vec{u} \wedge \vec{v}$: produit vectoriel entre les vecteurs \vec{u} et \vec{v} ;
- i : nombre complexe $i^2 = -1$;
- $\mathcal{D}(R, \alpha_1, \chi)$: région de placement de pôles ;
- A' : matrice transposée de la matrice A ;
- \mathcal{S}_n : sous-ensemble de $\mathbb{R}^{n \times n}$ des matrices symétriques réelles ;
- $\text{Trace}(A)$: trace de la matrice A i.e. somme des éléments diagonaux de la matrice A ;
- $n!$: factoriel $n = n \times (n - 1) \cdots 2 \times 1$;

Variables physiques

- $\vec{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}}$: vitesse de rotation de \mathcal{B} par rapport à \mathcal{I} , $\vec{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} = \omega_x \vec{x} + \omega_y \vec{y} + \omega_z \vec{z}$;
- $\vec{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{R}}$: vitesse de rotation de \mathcal{B} par rapport à \mathcal{I} , $\vec{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{R}} = p\vec{x} + q\vec{y} + r\vec{z}$;
- \vec{H} : moment cinétique du satellite calculé en son centre de masse O , $\vec{H} = H_x \vec{x} + H_y \vec{y} + H_z \vec{z}$;
- \vec{T} : moment résultant des forces perturbatrices s'exerçant sur le satellite, $\vec{T} = T_x \vec{x} + T_y \vec{y} + T_z \vec{z}$;
- \vec{u} : moment des force de commande s'exerçant sur le satellite, $\vec{u} = u_x \vec{x} + u_y \vec{y} + u_z \vec{z}$;
- $\vec{M} = \vec{u} + \vec{T}$: moment résultant des forces s'appliquant sur le satellite, $\vec{M} = M_x \vec{x} + M_y \vec{y} + M_z \vec{z}$;
- I : matrice d'inertie du satellite dont les éléments sont les moments d'inertie du satellite autour de ses axes principaux et les produits d'inertie ;

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int (y_i^2 + z_i^2) dm & - \int y_i x_i dm & - \int z_i x_i dm \\ - \int y_i x_i dm & \int (x_i^2 + z_i^2) dm & - \int z_i y_i dm \\ - \int x_i z_i dm & - \int y_i z_i dm & \int (y_i^2 + x_i^2) dm \end{bmatrix}$$

- I_{xx} , I_{yy} et I_{zz} sont notés respectivement I_x , I_y et I_z dans les parties 2, 3 et 4 ;
- I_w : moment d'inertie d'une roue à réaction ;
- ψ : angle de précession (angle de lacet) autour de l'axe \vec{z}_R ;
- ϕ : angle de rotation propre (roulis) autour de \vec{x}_R ;
- θ : angle de nutation (angle de tangage) autour de l'axe \vec{y}_R ;
- γ : angle entre le vecteur $\vec{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}}$ et le vecteur \vec{H} ;

- ξ_w : coefficient d'amortissement d'une roue à réaction ;
- $\xi = \cos \Psi$: coefficient d'amortissement associé à une paire de pôles complexes conjugués dominante ;
- $b = 1/I_y$: coefficient inverse du moment d'inertie suivant l'axe $O\vec{y}$;
- \underline{b} : borne inférieure sur le paramètre b ;
- \overline{b} : borne supérieure sur le paramètre b ;
- v_m : tension d'alimentation aux bornes de l'induit du moteur à courant continu ;

Constantes

- M_\oplus : masse de la terre ;
- G : constante de gravitation universelle ;
- m_{sat} : masse du satellite ;
- $\mu = GM_\oplus = 3.9860047 \cdot 10^{14} \text{ m}^3\text{s}^{-2}$: constante gravitationnelle pour l'attraction primaire calculée d'après le modèle de potentiel américain GEM-T1 ;

Questionnement

Nous rappelons que les parties A, B, C sont indépendantes.

A Éléments de modélisation pour le problème de contrôle d'attitude

Comprendre le mouvement naturel d'un satellite autour de son centre de masse est nécessaire avant de pouvoir s'attaquer au problème de la synthèse d'un système de contrôle d'attitude. Dans cette partie, l'étude va donc porter sur la modélisation du mouvement de rotation du satellite autour de son centre de masse situé en O (cf. figure 3).

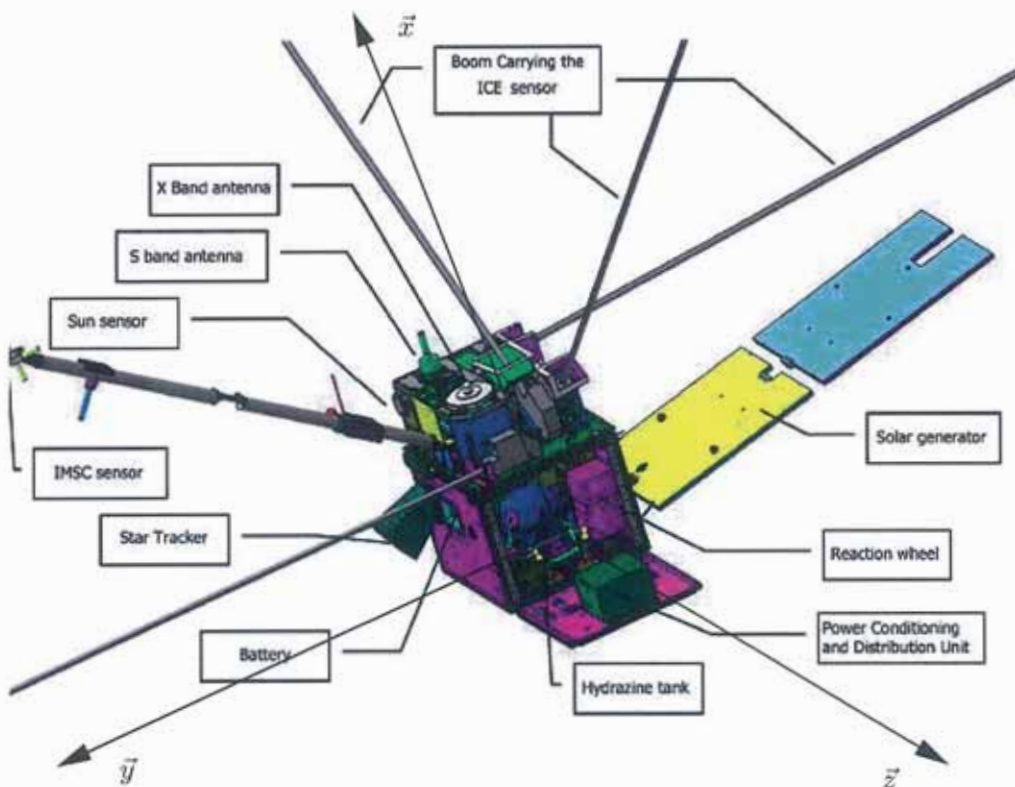


FIG. 3 – Satellite Demeter et le repère $\mathcal{B} : (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ attaché au corps du satellite

Le satellite est modélisé comme un corps rigide rectangulaire de dimensions $60 \times 85 \times 110$ cm et de masse 129 kg. On définit un repère attaché au satellite $\mathcal{B} : (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ dont l'origine O est au centre de masse du satellite et un repère inertiel $\mathcal{I} : (O_I, \vec{i}_I, \vec{j}_I, \vec{k}_I)$ lié au référentiel pseudo-inertiel géocentrique.

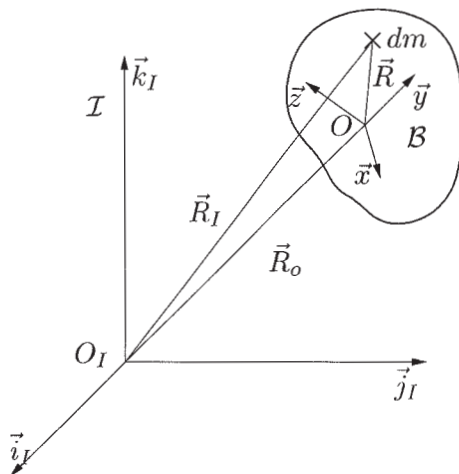


FIG. 4 – Référentiels inertiel et en mouvement

Il est également nécessaire de décrire l'orientation géométrique du satellite dans un repère orbital de référence $\mathcal{R} : (\vec{x}_R, \vec{y}_R, \vec{z}_R)$ lié au satellite. Ces repères sont précisément définis en annexe D.1.

A.1 Equations de la dynamique en attitude

A.1.1 Calculer la vitesse inertielle (dans le référentiel inertiel) \vec{V}_I de l'élément de masse dm défini à la figure 4 en fonction de la vitesse inertielle \vec{V}_O de O et de la vitesse de rotation $\vec{\omega}_{B/I}$ de B par rapport à \mathcal{I} .

A.1.2 Calculer le moment cinétique \vec{H} en O du satellite dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ en fonction de sa matrice d'inertie I et de $\vec{\omega}_{B/I}$. Nota : on rappelle que O est le centre de masse du satellite.

$$\int \tilde{\mathbf{R}} dm = 0$$

Nous rappelons que le moment cinétique est donné par :

$$\vec{H} = \int \tilde{\mathbf{R}} \wedge \vec{V}_I dm$$

A.1.3 En supposant que le satellite est soumis à un moment résultant \vec{M} , écrire les équations de la dynamique (équations d'Euler) dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

A.1.4 En supposant que les axes $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ sont les axes principaux d'inertie ($I_{xz} = I_{xy} = I_{yz} = 0$), réécrire les équations dynamiques du satellite dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

A.2 Equations de la cinématique

Les équations d'Euler décrivent la dynamique du satellite dans le référentiel lié au satellite. L'orientation du satellite dans le repère orbital local \mathcal{R} nécessite l'emploi de paramètres permettant d'écrire les transformations de coordonnées d'un repère à l'autre. Nous utilisons ici les angles d'Euler qui sont rappelés en annexe D.2 et qui vont permettre de définir les rotations d'un repère à l'autre.

De plus, on suppose que le satellite évolue sur une orbite circulaire avec une vitesse orbitale angulaire constante $\omega_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0^3}}$ où r_0 est le rayon circulaire de l'orbite et μ la constante de gravitation.

- A.2.1 Ecrire les coordonnées du vecteur vitesse de rotation $\vec{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{R}}$ dans la base \mathcal{B} en fonction des angles d'Euler et de leur dérivée.
- A.2.2 Inverser la relation précédente afin d'exprimer $(\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$ en fonction de $\phi, \theta, \psi, p, q, r$.
- A.2.3 Ces équations sont-elles valides pour toutes les configurations ?
- A.2.4 Ecrire les coordonnées du vecteur vitesse de rotation $\vec{\omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{I}}$ dans la base \mathcal{B} en fonction des angles d'Euler et de ω_0 .
- A.2.5 Ecrire les coordonnées du vecteur vitesse de rotation $\vec{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}}$ dans la base \mathcal{B} .

A.3 Equations linéarisées du mouvement

- A.3.1 En faisant l'approximation aux petits angles, écrire les équations linéarisées au premier ordre donnant les coordonnées du vecteur $\vec{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}}$ dans la base \mathcal{B} . Nota : tous les termes produits des variables entre elles et leur dérivée seront négligés.
- A.3.2 En faisant l'approximation aux petits angles : $\sin \text{angle} \sim \text{angle}$ et $\cos \text{angle} \sim 1$ et en supposant que l'on peut identifier $\vec{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}}$ à $\vec{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{R}}$, écrire les équations dynamiques d'Euler linéarisées donnant les coordonnées du vecteur $\vec{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}}$ dans la base \mathcal{B} .

B Stabilisation de pointage par gyration

La première tâche du système de contrôle d'attitude est donc de stabiliser l'attitude d'un satellite vis-à-vis des couples perturbateurs externes. Ceux-ci peuvent être dûs aux effets des frottements atmosphériques, des radiations et/ou des vents solaires. Les couples parasites créés par les propulseurs doivent également être pris en compte. Une distinction classique est opérée parmi les différents types de systèmes de contrôle d'attitude. On distingue ainsi les systèmes de contrôle d'attitude passifs et les systèmes de contrôle d'attitude actifs. Le contrôle d'attitude passif utilise les propriétés naturelles physiques du satellite et de son environnement pour maintenir l'orientation du satellite. Un exemple classique de contrôle d'attitude passif est la stabilisation par gyration (ou stabilisation par spin) utilisant le phénomène de rigidité gyroscopique. Cette méthode de stabilisation passive et ses limites sont étudiées dans la prochaine partie dans le cas du satellite Demeter. Le satellite Demeter utilise ce type de contrôle d'attitude dans le mode MAS. Ce mode est utilisé après séparation du lanceur et en cas de détection d'anomalie. L'axe $O\vec{x}$ est orienté vers le soleil avec une rotation lente autour de cet axe pour accumulation de puissance.

Nota : dans cette partie, on ne considère que le mouvement de rotation du satellite autour de son centre de gravité. On confondra ainsi les vecteurs de rotation $\vec{\omega}_{B/I}$ et $\vec{\omega}_{B/R}$.

B.1 Solution et stabilité des solutions des équations d'Euler pour un satellite spinné sans couples perturbateurs

B.1.1 On suppose qu'aucun moment externe ne s'applique sur le satellite $\vec{M} = 0$ et que le satellite subit un mouvement de spin de vitesse constante $\omega_x = n$ autour de l'axe $O\vec{x}$. De plus, on suppose que $\omega_y \ll n$ et $\omega_z \ll n$. Montrer que les équations de la dynamique (1) sont alors découplées. Nota : les équations dynamiques du satellite sont alors données par :

$$\begin{aligned} I_x \dot{\omega}_x &= 0 \\ I_y \dot{\omega}_y + n\omega_z(I_x - I_z) &= 0 \\ I_z \dot{\omega}_z + n\omega_y(I_y - I_x) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

B.1.2 Donner la condition sur les inerties pour que les vitesses ω_y et ω_z restent bornées. Conclusions.

B.1.3 On suppose de plus que le satellite possède une symétrie axiale telle que $I_y = I_z$. Montrer que la norme du vecteur vitesse $\vec{\omega}_{B/I} = \omega_x \vec{x} + \omega_y \vec{y} + \omega_z \vec{z}$ reste constante.

B.1.4 Sous ces hypothèses, donner les solutions des équations du mouvement pour $\omega_x, \omega_y, \omega_z$.

Un satellite spinné peut subir un mouvement périodique rotationnel appelé nutation s'il est perturbé de sa position d'équilibre. Les causes peuvent en être la séparation du lanceur ou des mouvements de sous-systèmes tels que les extensions de bras ou de panneaux. Ce phénomène se caractérise par un vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}_{B/I}$ non aligné avec l'axe principal \vec{x} et une rotation de $\vec{\omega}_{B/I}$ autour du vecteur du moment cinétique \vec{H} qui est fixe dans le repère inertiel \mathcal{I} sans moment perturbateur externe (cf. figure 5). Nous allons écrire les conditions sous lesquelles ce mouvement de nutation peut se destabiliser. $\vec{y}\vec{z}$ est un vecteur de base dans le plan défini par les vecteurs $\vec{\omega}_{B/I}$ et \vec{H} .

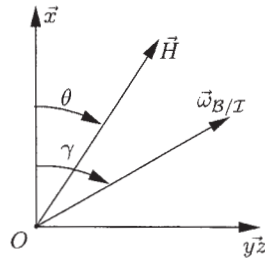


FIG. 5 – Angle de nutation θ dans le plan (\vec{x}, yz)

B.1.5 Donner l'énergie cinétique T de rotation en fonction des composantes de $\vec{\omega}_{B/I}$ sous les hypothèses de la question B.1.3.

B.1.6 Donner le carré de la norme du moment cinétique $\|\vec{H}\|^2$ en fonction des composantes de $\vec{\omega}_{B/I}$ sous les hypothèses de la question B.1.3.

B.2 En déduire T en fonction de $\|\vec{H}\|^2$ et de l'angle de nutation θ .

B.2.1 Calculer la dérivée temporelle de l'énergie cinétique T en fonction de $\|\vec{H}\|^2$, θ , $\dot{\theta}$, I_x , I_z .

B.2.2 En déduire la condition de stabilité du mouvement de nutation en présence de dissipation d'énergie $\dot{T} < 0$.

B.3 Stabilisation passive en mode spinné

Un moyen passif afin de stabiliser le mouvement de nutation pour un satellite spinné est de permettre un mouvement relatif d'un sous-système du satellite quand le mouvement de nutation se produit et de l'interdire quand il n'y a pas de nutation. Le mouvement de nutation sera amorti si ce mouvement relatif produit de la dissipation d'énergie. On considère pour ce dispositif une roue plongée dans un champ magnétique amortissant sa rotation relative autour d'un axe perpendiculaire à l'axe de spin (cf. figure 6).

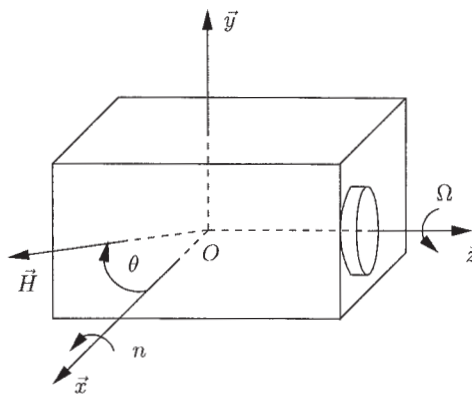


FIG. 6 – Schéma pour l'amortissement du mouvement de nutation

Ω est la vitesse de rotation relative de la roue par rapport au satellite et I_w le moment d'inertie de la roue amortie autour de son axe libre. Les équations dynamiques pour le

mouvement du satellite et de la roue sont données par :

$$\begin{aligned}
 I_x \dot{n} + I_w \omega_y \Omega &= M_x \\
 I_z \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_z n - I_w n \Omega &= M_y \\
 I_z \dot{\omega}_z + I_w \dot{\Omega} - (I_x - I_z) \omega_y n &= M_z \\
 I_w (\dot{\omega}_z + \dot{\Omega}) + \xi_w \Omega &= 0
 \end{aligned} \tag{2}$$

où ξ_w est le coefficient d'amortissement de la roue.

B.3.1 Sous l'hypothèse que $\frac{I_w}{I_x} \omega_y \Omega$ peut être négligé et que $M_x = 0$, donner l'équation d'état $\dot{x}_n = A_{np} x_n + B_{np} M$ de l'ensemble satellite + roue en fonction de I_z , $\epsilon = \frac{I_w}{I_z}$, $\sigma = \frac{\xi_w}{I_w}$ et $\alpha_n = \frac{I_z - I_x}{I_z} n$. Nota : le vecteur d'état est donné par :

$$x_n = \begin{bmatrix} \omega_y \\ \omega_z \\ \Omega \end{bmatrix}$$

B.3.2 Calculer le polynôme caractéristique $P(s)$ de A_{np} en fonction de ϵ , σ et α_n .

B.3.3 En utilisant le critère de Routh-Hurwitz sur le polynôme caractéristique de A_{np} , donner les conditions sur I_w , I_z et I_x pour que le système de roue stabilise effectivement le mouvement de nutation.

B.3.4 Conclusions sur la méthode de stabilisation passive.

B.4 Stabilisation active en mode spinné

Le contrôle d'attitude passif par gyration nécessite en général l'utilisation d'un système de contrôle d'attitude actif pour ajuster périodiquement l'attitude du satellite et la vitesse de spin afin de réagir à l'encontre des couples perturbateurs et d'amortir le mouvement de nutation provoqué par un mauvais équilibrage du satellite ou par l'élasticité de sa structure. On suppose maintenant que la roue d'amortissement est montée sur le rotor d'un moteur à courant continu. R est la résistance de l'induit du moteur et i est le courant traversant l'induit. Le couple exercé sur la roue (et son opposé sur le satellite) est proportionnel (K_m) au courant i . On suppose négligeables les frottements visqueux et l'inductance de l'induit. L'induit est le siège d'une force contre-électromotrice proportionnelle (K_v) à la vitesse de rotation de la roue (Ω). I_w est le moment d'inertie total du rotor et de la roue. v_m est la tension d'alimentation aux bornes de l'induit. On négligera les effets inductifs.

B.4.1 Ecrire l'équation électromécanique liant la vitesse et la tension.

En supposant que $K_v = K_m = N$, on obtient les équations dynamiques complètes du satellite et de la roue commandée en l'absence de couples perturbateurs :

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_z + \dot{\Omega} + \frac{N^2\Omega}{RI_w} &= \frac{N}{RI_w}v_m \\ \dot{\omega}_y + \frac{(I_x - I_z)}{I_z}\omega_z n - \frac{I_w}{I_z}n\Omega &= 0 \\ \dot{\omega}_z + \frac{I_w}{I_z}\dot{\Omega} - \frac{(I_x - I_z)}{I_z}\omega_y n &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

où $n = \omega_x$ est la vitesse de spin constante autour de l'axe \vec{x} . On pose les notations $\gamma = \frac{N^2}{RI_w}$ et $\kappa = \frac{N}{RI_w}$.

B.4.2 En utilisant les mêmes notations, hypothèses et le même vecteur d'état que la question **B.3.1**, donner l'équation d'état $\dot{x}_n = A_{na}x_n + B_{na}e_m$ de l'ensemble satellite + roue + moteur avec $\vec{M} = \vec{0}$.

B.4.3 On suppose que la vitesse de rotation autour de l'axe \vec{y} peut être mesurée. Compléter le modèle d'état précédent par son équation de sortie.

B.4.4 La représentation d'état ainsi construite est-elle observable ?

B.4.5 En appliquant la transformée de Laplace aux équations (3), compléter le schéma fonctionnel du document réponse DR1.

B.4.6 Calculer la fonction de transfert en boucle ouverte $L(s) = \frac{\omega_y(s)}{v_m(s)}$.

B.4.7 On suppose que $I_w \ll I_z$, soit $\epsilon \ll 1$, montrer que $L(s) \approx L_s(s) = \frac{NnI_x}{RI_z^2} \frac{s}{(s^2 + \alpha_n^2)(s + \gamma)}$.

B.4.8 On souhaite mettre en œuvre une correction de sortie proportionnelle $v_m = K\omega_y$, montrer en utilisant le lieu des racines (ou lieu d'Evans) de $L_s(s)$ que le mouvement de nutation peut être stabilisé pour tout $0 < K < \infty$ quelque soit le signe de $I_z - I_x$.

B.4.9 Dédire du lieu des racines précédent un majorant (qui n'est pas nécessairement égal à la borne supérieure) sur l'amortissement de la paire de pôles complexes dominant en boucle fermée.

C Stabilisation de pointage trois axes par propulseurs

Nous nous intéressons au système de contrôle d'attitude de Demeter en mode MCO (Mode de Contrôle d'Orbite). Nous supposons ici que les propulseurs de nature continue (ou propulseurs proportionnels) sont utilisés pour la stabilisation de l'attitude du satellite par rapport à un référentiel inertiel, que l'amplitude des couples générés est grande par rapport à l'amplitude des couples perturbateurs et que la bande passante du contrôle d'attitude est grande par rapport à la vitesse de rotation orbitale. Sous ces hypothèses, le mouvement en attitude autour des trois axes est considéré comme découplé et chaque problème de stabilisation d'attitude autour d'un axe principal d'inertie peut être traité de manière indépendante. Ainsi, l'équation dynamique linéarisée associée au problème de contrôle d'attitude autour de l'axe $O\vec{y}$ est donnée par :

$$I_y \ddot{\theta}(t) = u_y(t) \quad (4)$$

C.1 Stabilisation robuste par retour d'état

On suppose dans cette section que l'on dispose de la mesure en attitude θ et en vitesse angulaire $\dot{\theta}$ grâce à l'utilisation du senseur stellaire (SST), des senseurs solaires (SAS) et des trois gyromètres (GYR).

C.1.1 Donner le modèle d'état complet sous la forme compagne de commande et associé à l'équation dynamique (4). On notera $1/I_y = b$. La matrice dynamique en boucle fermée sera notée $A(K, b)$.

Le moment d'inertie I_y n'est pas parfaitement connu et peut prendre une valeur quelconque dans un intervalle de $\pm 40\%$ autour de sa valeur nominale $I_y^n = 27.36 \text{ kg.m}^2$. On souhaite trouver une loi de commande par retour d'état

$$u(t) = K_{pp}x(t) = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} x(t) = K_1\theta(t) + K_2\dot{\theta}(t) \quad (5)$$

qui soit robuste vis-à-vis des variations de ce paramètre $b \in [\underline{b}, \bar{b}]$ et qui permette de placer les pôles en boucle fermée dans la sous-région du plan complexe représentée à la figure 7. Cette région est définie comme l'intersection de trois sous-régions : le demi-plan gauche défini par l'abscisse α_1 , l'intérieur du disque de rayon R et dont le centre est à l'origine O du plan complexe et le secteur défini par l'angle Ψ tel que $\cos \Psi = \xi$ ou l'amortissement associé ξ . La région de placement de pôles est notée $\mathcal{D}(R, \alpha_1, \xi)$ avec $\alpha_1 < 0$.

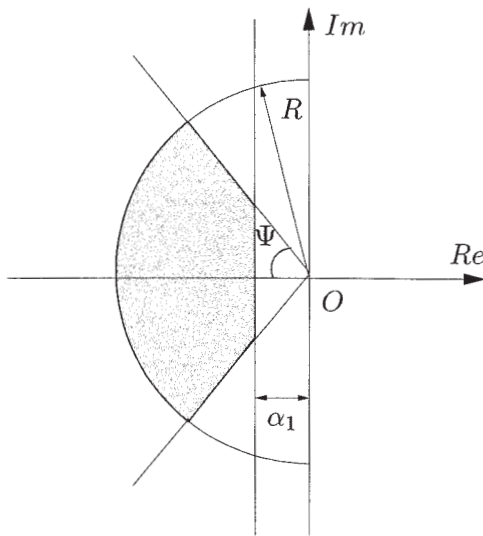


FIG. 7 – Région de placement des pôles en boucle fermée

- C.1.2 Calculer le polynôme caractéristique en boucle fermée en fonction de K_1 , K_2 et b quand on applique la loi de commande (5) au modèle d'état de la question C.1.1.
- C.1.3 En déduire les conditions de stabilité asymptotique en boucle fermée en fonction de K_1 , K_2 .
- C.1.4 Ecrire une condition liant K_1 , K_2 et \underline{b} pour que les pôles en boucle fermée soient exclusivement réels.
- C.1.5 Sous cette condition, en déduire l'expression des pôles réels en boucle fermée en fonction de K_1 , K_2 et b .
- C.1.6 Ecrire une condition liant K_1 , K_2 et \bar{b} pour que les pôles en boucle fermée soient exclusivement complexes.
- C.1.7 Sous cette condition, en déduire l'expression des pôles complexes en boucle fermée en fonction de K_1 , K_2 et b .

On souhaite imposer la localisation des pôles en boucle fermée dans la région $\mathcal{D}(R, \alpha_1, \xi)$. Il est donc nécessaire d'écrire les conditions sur les gains de retour d'état K_1 et K_2 conduisant à cette localisation.

- C.1.8** Ecrire la condition sur K_1 , K_2 et \underline{b} pour que la paire de pôles complexes en boucle fermée ait un amortissement minimum ξ , $\forall b \in [\underline{b}, \bar{b}]$.
- C.1.9** Ecrire la condition de stabilité relative robuste (pôles en boucle fermée dans le demi-plan gauche défini par l'abscisse $\alpha_1 < 0$, $\forall b \in [\underline{b}, \bar{b}]$) pour les pôles complexes en fonction de K_2 , α_1 et \underline{b} .
- C.1.10** Ecrire les 3 conditions de stabilité relative robuste pour les pôles réels en fonction de K_1 , K_2 , α_1 , \bar{b} et \underline{b} .
- C.1.11** Ecrire la condition d'appartenance robuste ($\forall b \in [\underline{b}, \bar{b}]$) au disque de centre l'origine et de rayon R pour les pôles complexes en boucle fermée, en fonction de K_1 , R et \bar{b} .
- C.1.12** Ecrire les 3 conditions d'appartenance robuste ($\forall b \in [\underline{b}, \bar{b}]$) au disque de centre l'origine et de rayon R pour les pôles réels en boucle fermée, en fonction de K_1 , K_2 , R et \bar{b} .

La région de placement de pôles ne devant pas être vide, la combinaison des conditions sur la stabilité relative (demi-plan défini par α_1) et de la condition d'appartenance au disque conduit à une condition sur les paramètres de ces deux régions.

- C.1.13** Ecrire cette condition liant \bar{b} , \underline{b} , R et α_1 valable à la fois pour les pôles réels et les pôles complexes. On effectuera l'application numérique avec les valeurs numériques définies pour I_y^n et ses variations admissibles.

Il est fréquent de choisir un amortissement minimal égal à $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \pi/4$. Cette valeur sera conservée pour la suite de cette partie. En appliquant les conditions précédentes au sous-domaine $\mathcal{D}(4, -1, \frac{\sqrt{2}}{2})$ définissant le placement de pôles, nous obtenons la région réalisable représentée par l'intérieur du polytope \mathcal{P} de sommets (P_1, P_2, P_3, P_4) de la figure 8.

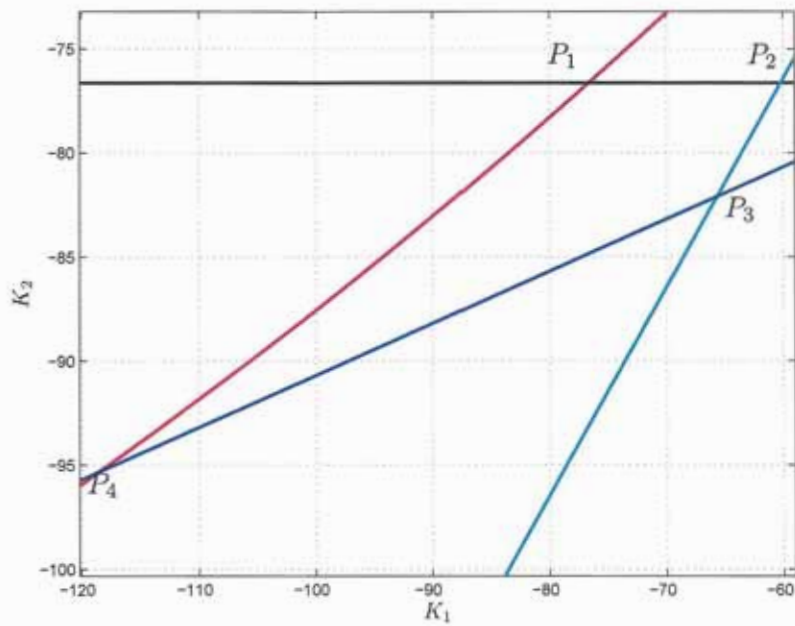


FIG. 8 – Région de réalisabilité des conditions de placement dans le plan (K_1, K_2)

C.1.14 Donner une valeur du gain de retour d'état robuste réalisant l'objectif de placement de pôles robuste.

Nous abordons dans cette section la synthèse de loi de commande par retour d'état minimisant l'influence au sens de la norme H_2 , d'une perturbation $w(t)$ sur le vecteur des sorties contrôlées $z(t)$, dans le pire des cas, pour $b \in [\underline{b}, \bar{b}]$. La norme H_2 mesure l'énergie de la réponse impulsionnelle et peut être utilisée pour mesurer la réponse transitoire du système en réponse à des conditions initiales. Pour cela, il est nécessaire de définir un vecteur des entrées de perturbation $w(t)$ et un vecteur des sorties contrôlées $z(t)$.

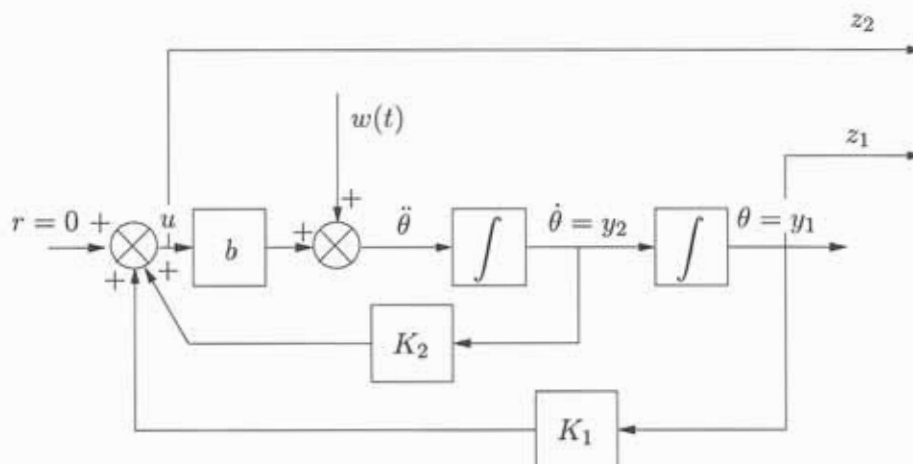


FIG. 9 – Schéma fonctionnel décrivant l'entrée de perturbation et les sorties contrôlées

C.1.15 Donner les équations d'état complètes en boucle ouverte définies par le schéma fonctionnel 9.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + B_w w(t) \\ z(t) &= C_z x(t) + D_{zu} u(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (6)$$

On souhaite déterminer le retour d'état $u(t) = [K_1 \ K_2] x(t) = K_{H_2}^* x(t)$ qui stabilise le modèle d'état (6) et qui minimise la pire norme $H_2 \forall b \in [\underline{b}, \bar{b}]$ sur la fonction de transfert $T_{zw}(s)$ entre les signaux z et w . En utilisant la définition de la norme H_2 et le calcul classique par les grammiens de commandabilité ou d'observabilité, ce problème se reformule comme le problème d'optimisation min max (7).

$$\begin{aligned} &\min_{\substack{K_1 < 0, K_2 < 0 \\ P \in \mathcal{S}_n}} \max_{b \in [\underline{b}, \bar{b}]} \text{Trace}[C_z(K, b) P C_z'(K, b)] \\ \text{sous} \end{aligned} \quad (7)$$

$$A(K, b)P + PA'(K, b) + B_w B_w' = \mathbf{0}$$

où $A(K, b)$ et $C_z(K, b)$ sont respectivement les matrices dynamiques et de sortie du modèle d'état en boucle fermée, $P \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ est une matrice symétrique définie positive (toutes ses valeurs propres sont positives) solution de l'équation de Lyapunov :

$$A(K, b)P + PA'(K, b) + B_w B_w' = \mathbf{0} \quad (8)$$

La norme H_2 optimale est alors donnée par la racine carrée du critère optimal du problème (7).

C.1.16 Calculer la matrice P en fonction de b , K_1 et K_2 .

C.1.17 Montrer alors que le problème d'optimisation (7) peut s'écrire comme (9).

$$\min_{K_1 < 0, K_2 < 0} \max_{b \in [\underline{b}, \bar{b}]} f_{K_1, K_2}(b) = \frac{1 + K_1^2 - K_2^2 K_1 b}{2b^2 K_1 K_2} \quad (9)$$

C.1.18 Montrer que la fonction $f_{K_1, K_2}(b)$ est une fonction décroissante pour $K_1 < 0$, $K_2 < 0$ et $\forall b \in [\underline{b}, \bar{b}]$.

C.1.19 En déduire que le problème d'optimisation (9) devient (10).

$$\min_{K_1 < 0, K_2 < 0} g(K_1, K_2) = \frac{1 + K_1^2 - K_2^2 K_1 \underline{b}}{2\underline{b}^2 K_1 K_2} \quad (10)$$

- C.1.20 Ecrire les conditions nécessaires d'optimalité pour le problème d'optimisation (10).
- C.1.21 En déduire la solution optimale $K_{H_2}^*$ du problème d'optimisation (10) et la valeur optimale du critère $g^*(K_1^*, K_2^*)$. Faire l'application numérique.
- C.1.22 Vérifier que les pôles en boucle fermée sont asymptotiquement stables quand on applique le retour d'état $K_{H_2}^*$, $\forall b \in [\underline{b}, \bar{b}]$.
- C.2 Pour quelle valeur de b , obtient-on des pôles en boucle fermée complexes ?
- C.2.1 Calculer l'amortissement et la pulsation propre non amortie de la paire de pôles en boucle fermée en fonction de b et \underline{b} .
- C.2.2 Calculer numériquement l'amortissement et la pulsation propre non amortie de la paire de pôles en boucle fermée pour $b = \underline{b}$ et $b = \bar{b}$. Conclusions

Au vu des propriétés respectives des retours d'état K_{pp} et $K_{H_2}^*$, on souhaite calculer un retour d'état $u(t) = K_{mix}x(t)$ qui minimise la pire norme H_2 , $\forall b \in [\underline{b}, \bar{b}]$ du transfert T_{zw} tout en garantissant de manière robuste le placement de pôles dans la région $\mathcal{D}(4, -1, \frac{\sqrt{2}}{2})$. La figure 10 représente le domaine admissible de la figure 8 représenté par le polygone \mathcal{P} de sommets les points P_1, P_2, P_3, P_4 et les courbes de niveau de la fonction critère $g(K_1, K_2)$ du problème d'optimisation (10).

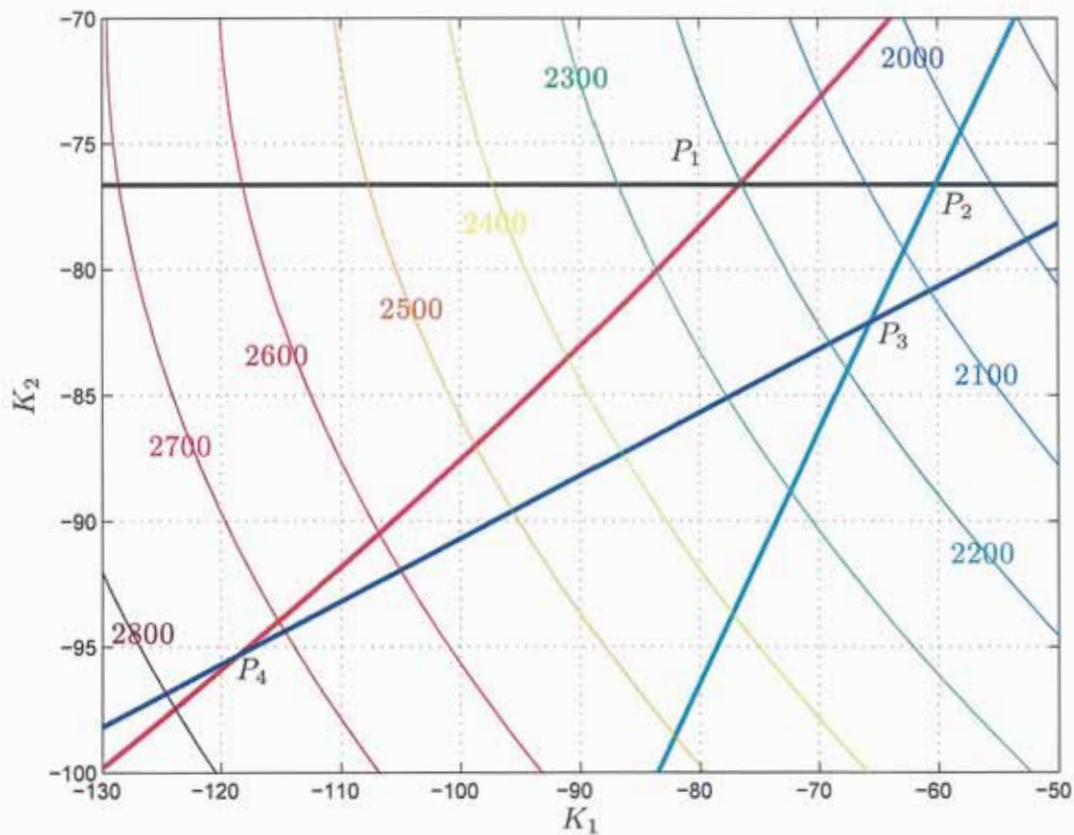


FIG. 10 – Région de réalisabilité des conditions de placement dans le plan (K_1, K_2) et courbes de niveau de la fonction g

C.2.3 Donner dans le plan (K_1, K_2) , le point minimisant la pire norme H_2 , $\forall b \in [\underline{b}, \bar{b}]$ tout en garantissant le placement de pôles robuste dans la sous-région $\mathcal{D}(4, -1, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

C.2.4 Déterminer approximativement numériquement K_{mix} et la valeur associée de la pire norme optimale H_2 en boucle fermée du transfert T_{zw} .

C.3 Stabilisation par retour de sortie

On suppose dans cette section que l'on dispose à bord uniquement de la mesure en attitude θ .

C.3.1 Réécrire le modèle d'état complet sous forme compagne de commande avec les mêmes notations que dans la section précédente.

C.3.2 Calculer la fonction de transfert $G(s)$ associée à cette représentation d'état.

C.3.3 Montrer qu'il est impossible de stabiliser asymptotiquement ce système avec une loi de commande par retour de sortie statique $u(t) = ky(t)$.

On souhaite mettre en place un asservissement de position angulaire tel que celui décrit à la figure 11 où $C(s)$ est un correcteur à avance de phase de la forme :

$$C(s) = k \frac{1 + aTs}{1 + Ts} \quad a > 1 \quad (11)$$

et k est un gain réglable. Les spécifications de performance sont définies par une marge de gain minimale $M_g = 6$ dB, une marge de phase minimale $M_\phi = 45$ deg. pour des besoins de robustesse, une borne supérieure sur la pulsation de coupure en boucle ouverte à 0 dB $\omega_{co} = 0.2$ rad/s afin d'éviter que le correcteur n'excite les modes souples non modélisés du satellite. La loi de commande sera réglée pour $b = b_n = 1/I_y^n$.

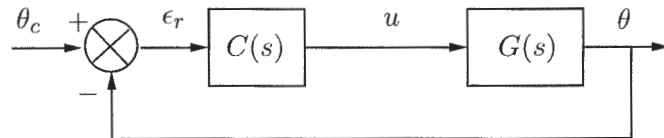


FIG. 11 – Asservissement de position en dépointage

C.3.4 Calculer la pulsation de coupure à 0 dB de $G(s)$.

C.3.5 Calculer le correcteur à avance de phase $C(s)$ pour respecter les spécifications sur les marges de stabilité et la pulsation de coupure en boucle ouverte définies dans l'énoncé.

C.3.6 Tracer la réponse fréquentielle de la boucle ouverte $C(s)G(s)$ dans le même plan de Bode (document réponse DR2) pour $b = \underline{b}$ et $b = \bar{b}$.

C.3.7 En déduire les marges de phase M_ϕ , M_ϕ^- et les marges de gain M_g , M_g^- et les pulsations de coupure en boucle ouverte à 0 dB., ω_{co} , ω_{co}^- associées respectivement à $b = \underline{b}$ et $b = \bar{b}$. **Conclusions**

Le correcteur à avance de phase $C(s)$ calculé précédemment doit être mis en œuvre sur

un ordinateur numérique. On va donc discrétiser le correcteur à l'aide d'une méthode de discrétisation bilinéaire ou méthode de Tustin. On notera T_e la fréquence d'échantillonnage.

C.3.8 Calculer la fonction de transfert discrétisée $C(z)$ par application de la méthode de Tustin où $z = e^{T_e s}$.

C.3.9 Donner l'équation récurrente permettant de calculer la commande à l'instant nT_e , $u(nT_e)$ en fonction de la commande aux instants précédents et de l'erreur.

C.3.10 Choisissez une valeur pour la période d'échantillonnage T_e afin de respecter le théorème de Shannon. Pour cela, on se servira de la simulation de la réponse indicielle de la fonction de transfert en boucle fermée $\frac{\theta(s)}{\theta_c(s)}$ donnée en figure 12.

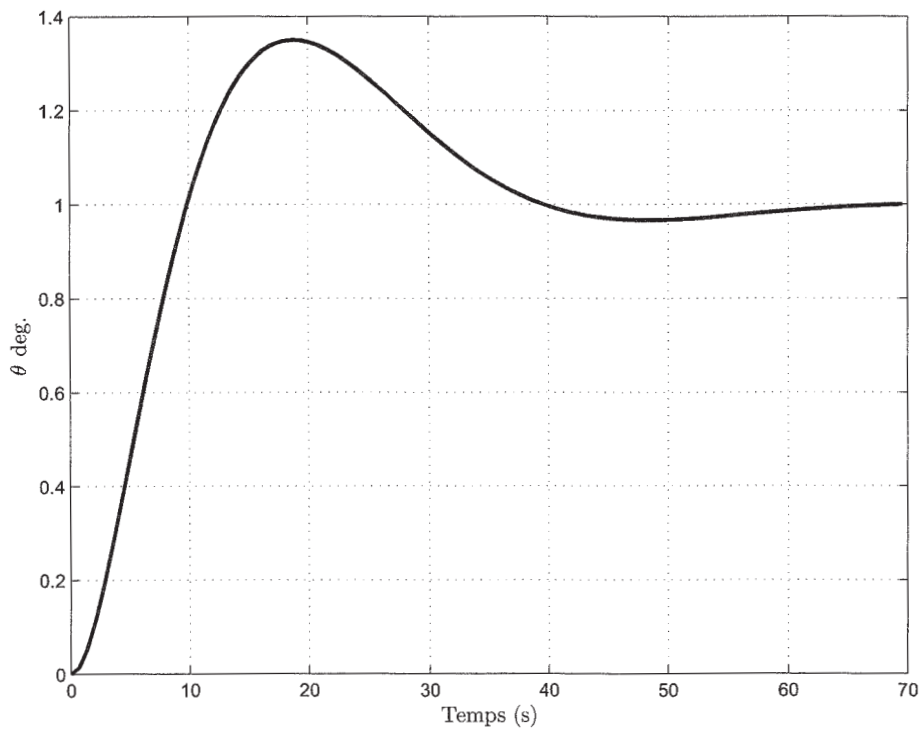


FIG. 12 – Réponse indicielle en boucle fermée

C.3.11 En déduire numériquement l'équation récurrente permettant de calculer la commande à l'instant nT_e , $u(nT_e)$ en fonction de la commande aux instants précédents et de l'erreur.

D

Documentation

D.1 Référentiels et repères

D.1.1 Référentiel inertiel géocentrique et repère céleste moyen \mathcal{I}

Le référentiel inertiel utilisé par le projet microsattellite est le référentiel $J2000$ qui est défini par le repère céleste moyen $\mathcal{I} : (O_I, \vec{i}_I, \vec{j}_I, \vec{k}_I)$ au 1^{er} janvier 2000 à midi, date définie en temps universel TU1. Le référentiel céleste moyen à la date t est alors défini comme suit :

- Origine O_I : centre de masse de la Terre ;
- Axe $O_I Z$ et vecteur de base \vec{k}_I : axe centre de masse de la Terre-pôle moyen (Pôle sans les nutations de Bradley et de Newton) ;
- Axe $O_I X$ et vecteur de base \vec{i}_I : direction vernale moyenne $\bar{\Upsilon}$ au 01/01/2000 à 12 h ;
- Axe $O_I Y$ et vecteur de base \vec{j}_I : complète le trièdre trirectangle direct $(O_I, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$;
- Origine des temps : 01/01/2000 à 12 h ;
- Echelle des temps : temps universel $TU1$.

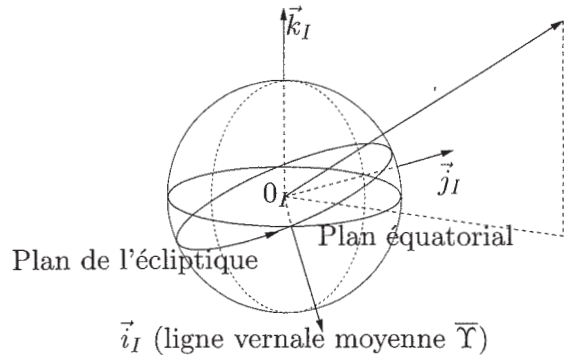


FIG. 13 – Repère céleste moyen $J2000$

D.1.2 Repère de référence orbital local \mathcal{R}

$\mathcal{R} : (O, \vec{x}_R, \vec{y}_R, \vec{z}_R)$ est le repère de référence orbital local orthonormé où O est le centre de masse du satellite et les axes sont définis par :

- l'axe portant le vecteur \vec{z}_R est radial orienté du satellite vers le centre de la terre ;
- l'axe portant le vecteur \vec{y}_R est normal au plan orbital dans la direction opposée du moment cinétique ;
- l'axe portant le vecteur $\vec{x}_R = \vec{y}_R \wedge \vec{z}_R$ est dans le sens du vecteur vitesse \vec{v} et tel que $[\vec{x}_R, \vec{y}_R, \vec{z}_R]$ forme un trièdre orthonormé direct.

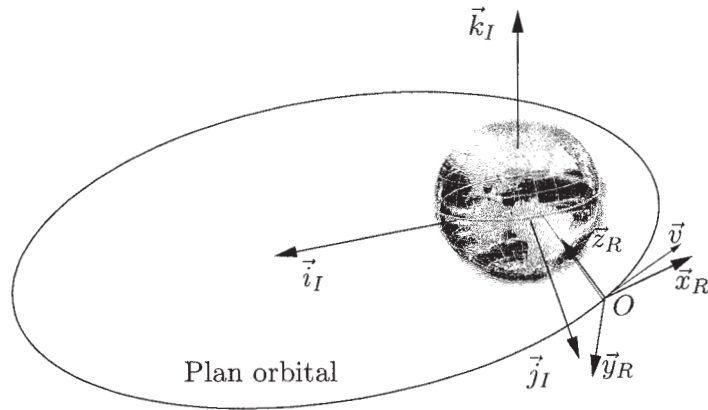


FIG. 14 – Repère orbital local \mathcal{R}

Dans le cas où l'orbite est circulaire, le vecteur vitesse \vec{v} et le vecteur \vec{x}_R ont même direction.

D.1.3 Repère local \mathcal{B} lié au satellite

$\mathcal{B} : (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est le repère orthonormé mobile lié au satellite où O est le centre de masse du satellite. Les vecteurs de base sont obtenus par des rotations successives (cf. figure 15 et l'annexe sur les angles d'Euler).

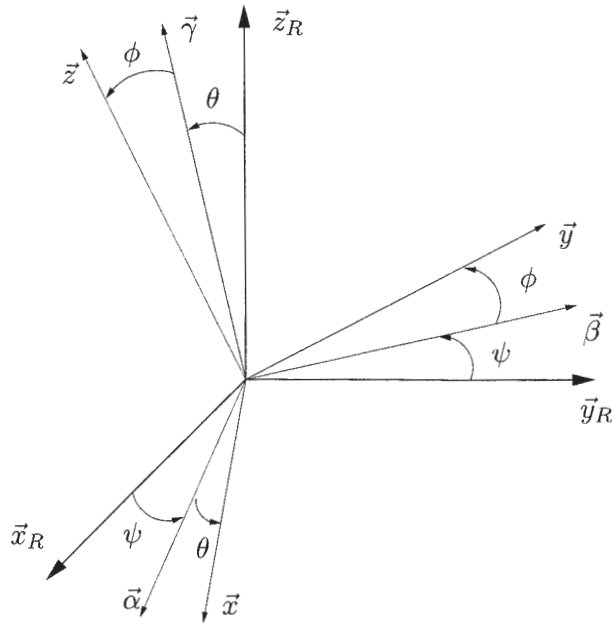


FIG. 15 – Repère local \mathcal{B} lié au satellite

Le repère satellite \mathcal{B} se définit par rapport au repère de référence local par matrices de rotation, angles d'Euler (Cardan cf. annexe D.2) ou quaternions.

D.2 Angles d'Euler

Usuellement, les angles d'Euler sont définis comme ϕ l'angle de rotation propre (roulis) autour de \vec{x}_R , θ , l'angle de nutation (angle de tangage) autour de l'axe \vec{y}_R et ψ , l'angle de précession (angle de lacet) autour de l'axe \vec{z}_R . Afin de passer de la base \mathcal{R} à la base \mathcal{B} , il est nécessaire de mettre en oeuvre une séquence de trois rotations élémentaires. La séquence choisie est $\psi \rightarrow \theta \rightarrow \phi$. ψ (angle de précession) est l'angle de rotation autour de l'axe \vec{z}_R , θ (angle de nutation) est l'angle de rotation autour de l'axe $\vec{\beta}$ et ϕ (angle de rotation propre) est l'angle de rotation autour de l'axe \vec{x} (cf. figure 15) conduisant à la séquence suivante.

$$(\vec{x}_R, \vec{y}_R, \vec{z}_R) \xrightarrow{\psi} (\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{z}_R) \xrightarrow{\theta} (\vec{x}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}) \xrightarrow{\phi} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

Les angles d'Euler de la séquence (3, 2, 1) sont plus connus sous le nom d'*angles de Cardan*.

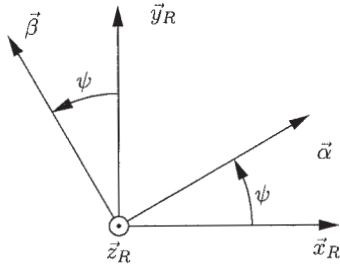


FIG. 16 - Angle ψ

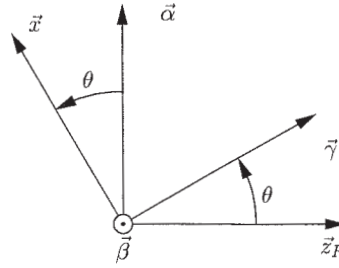


FIG. 17 - Angle θ

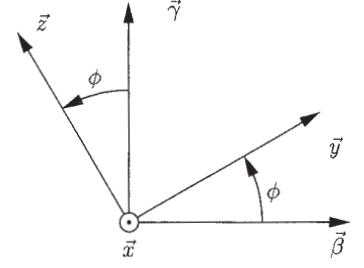


FIG. 18 - Angle ϕ

Aux trois rotations élémentaires correspondent les matrices de rotation T_ψ , T_ϕ , T_θ

$$T_\psi = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$T_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

Ainsi, la matrice de rotation T_ψ est la matrice de passage de la base $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{z}_R)$ vers la base $(\vec{x}_R, \vec{y}_R, \vec{z}_R)$. Ses colonnes sont formées des coordonnées des vecteurs $(\vec{x}_R, \vec{y}_R, \vec{z}_R)$ dans la base $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{z}_R)$ alors que ses lignes sont formées des coordonnées de $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{z}_R)$ dans la base $(\vec{x}_R, \vec{y}_R, \vec{z}_R)$. On calcule les matrices de rotation :

$$T_{\psi\theta\phi} = T_\phi T_\theta T_\psi = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ -\cos \phi \sin \psi + \sin \phi \sin \theta \cos \psi & \cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \theta \sin \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \psi + \cos \phi \sin \theta \cos \psi & -\sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \theta \sin \psi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$T_{\psi\theta} = T_\theta T_\psi = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ \sin \theta \cos \psi & \sin \theta \sin \psi & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (14)$$

D.3 Table de transformée de Laplace

Transformée de Laplace $F(s)$	Fonction du temps $f(t)$
1	$\delta(t)$
$\frac{1}{s}$	fonction échelon $u(t)$
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$t^n \quad n \in \mathbb{N}$
$\frac{1}{s + \alpha}$	$e^{-\alpha t}$
$\frac{1}{(s + \alpha)^2}$	$te^{-\alpha t}$
$\frac{n!}{(s + \alpha)^{n+1}}$	$t^n e^{-\alpha t} \quad n \in \mathbb{N}$
$\frac{1}{(s + \alpha)(s + \beta)}$	$\frac{1}{\beta - \alpha}(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}) \quad \alpha \neq \beta$
$\frac{s}{(s + \alpha)(s + \beta)}$	$\frac{1}{\beta - \alpha}(\beta e^{-\beta t} - \alpha e^{-\alpha t}) \quad \alpha \neq \beta$
$\frac{1}{s(s + \alpha)}$	$\frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$
$\frac{1}{s(s + \alpha)^2}$	$\frac{1}{\alpha^2}(1 - e^{-\alpha t} - t\alpha e^{-\alpha t})$
$\frac{1}{s^2(s + \alpha)}$	$\frac{1}{\alpha^2}(\alpha t - 1 + e^{-\alpha t})$
$\frac{1}{s^2(s + \alpha)^2}$	$\frac{1}{\alpha^2}\left(t - \frac{2}{\alpha} + \left(t + \frac{2}{\alpha}\right)e^{-\alpha t}\right)$
$\frac{s}{(s + \alpha)^2}$	$(1 - \alpha t)e^{-\alpha t}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Académie : _____ Session : _____

Concours : _____

Spécialité/option : _____ Repère de l'épreuve : _____

Intitulé de l'épreuve : _____

NOM : _____

(en majuscules, suivi s'il y a lieu, du nom d'épouse)

Prénoms : _____ N° du candidat

(le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la liste d'appel)

EAE GEE 1

Document réponse : DR1

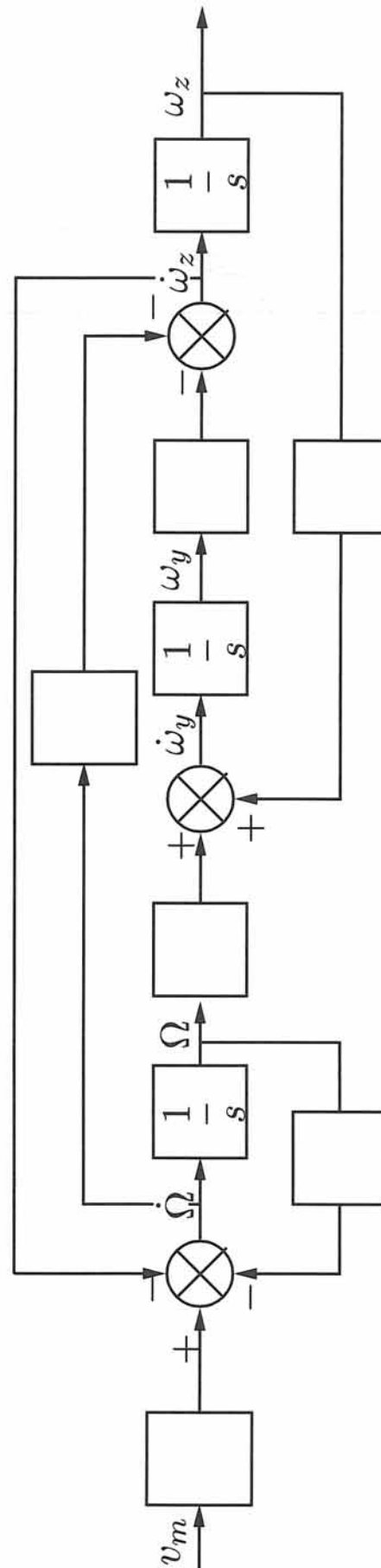


FIG. 19 – Schéma fonctionnel associé à la stabilisation active du mouvement de nutation représentant le modèle du système

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Académie : _____ Session : _____

Concours : _____

Spécialité/option : _____ Repère de l'épreuve : _____

Intitulé de l'épreuve : _____

NOM : _____

(en majuscules, suivi s'il y a lieu, du nom d'épouse)

Prénoms : _____ N° du candidat

(le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la liste d'appel)

EAE GEE 1

Document réponse : DR2

