

**SESSION DE 2004**

**concours externe  
de recrutement de professeurs agrégés**

**section : mécanique**

épreuve de mécanique des systèmes et des milieux déformables

**Durée : 8 heures**

*Aucun document n'est autorisé.*

*Moyens de calculs autorisés : calculatrice de poche – y compris calculatrice programmable et alphanumérique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-018 du 1 février 1999 (BO n°6 du 11 février 1999).*

**Notes préliminaires**

Le sujet comprend 21 pages. Les trois parties sont indépendantes. Il est recommandé de consacrer le tiers de la durée de l'épreuve à chaque partie.

Les réponses aux **trois parties** doivent être rédigées **sur trois ensembles de copies séparés**. Ces trois ensembles de copies seront remis en fin d'épreuve dans une copie-chemise.

Tournez la page S.V.P.

---

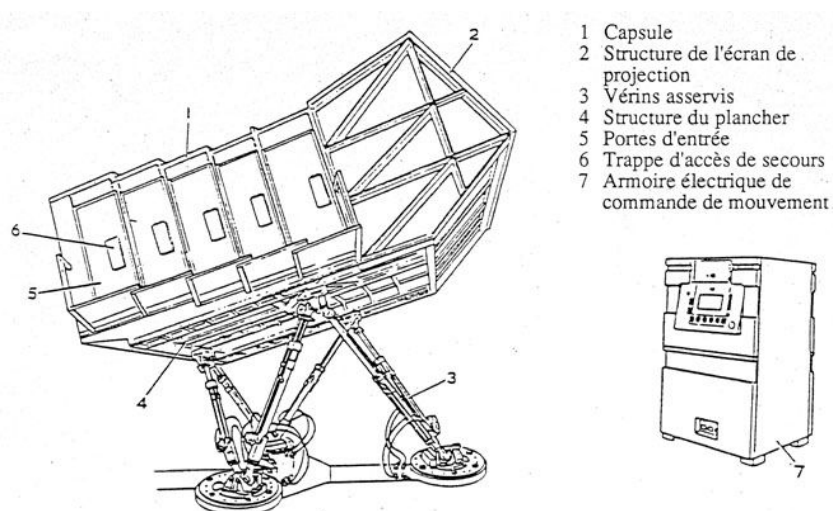
## Introduction : Plate-forme pour attraction dynamique

---

Dans les années soixante, l'expansion de l'industrie aéronautique, l'accroissement des coûts de formation des pilotes et la nécessité de tester hors vol les nouveaux appareils ont motivé une recherche sur les mécanismes à plusieurs degrés de liberté susceptibles d'animer une plate-forme lourdement instrumentée (par exemple un cockpit complet d'avion). En 1965, Stewart propose une structure qui constitue le premier pas vers les structures actuelles de robots parallèles. Ce type de structure allie précision du positionnement et rigidité importante. Elle trouve des applications dans de nombreux domaines, notamment l'usinage TGV avec une structure ayant servi de support au sujet de la session 2002.

La structure proposée ici, souvent appelée structure Stewart, est composée de 6 vérins commandés indépendamment. Elle permet d'obtenir 6 degrés de liberté pour la plate-forme mobile. Ce sont les progrès récents dans le domaine des asservissements qui ont permis à ces structures de pénétrer les domaines de haute technologie et par la suite, de loisir :

- simulateur de vol,
- simulateur de conduite d'engins spatiaux,
- machine outil VARIAX de Guiding et Lewis,
- positionneur fin de métrologie,
- manèges forains,
- cinéma dynamique.



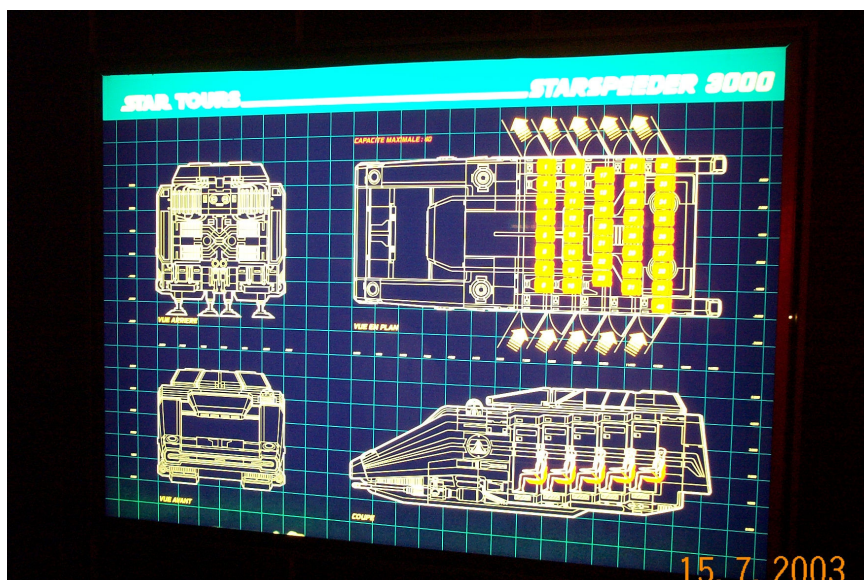
*Vue globale de l'attraction « cinéma dynamique »*

Le support du sujet de cette session est de la dernière catégorie. Il s'agit d'une attraction d'un grand parc de loisir de la région parisienne qui offre aux visiteurs l'impression de faire un voyage dans l'espace. Les passagers embarquent dans un vaisseau (photo 1) qui est une cabine montée sur la plate-forme. Le mouvement est très précisément synchronisé avec un film 70 mm qui défile sur l'écran de projection qui sert de pare-brise à l'engin spatial.



*Photo 1 : embarquement des passagers*

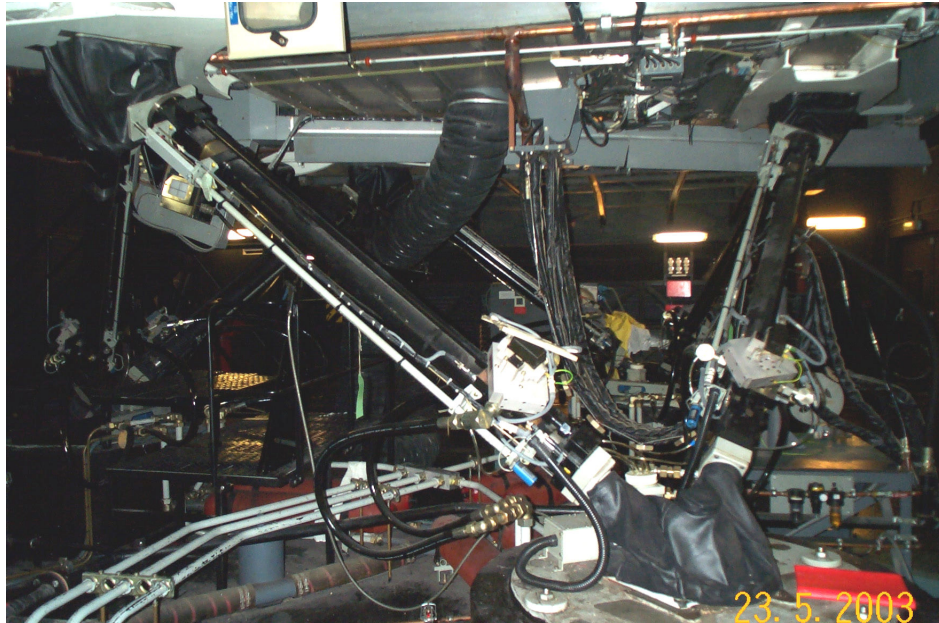
La cabine reçoit une cinquantaine de passagers répartis sur plusieurs rangées de sièges (photo 2). La perception du mouvement, qui s'ajoute à l'effet visuel, conforte le visiteur quant au réalisme de la simulation. Cependant, s'il est relativement aisé de simuler des mouvements de faible amplitude, on doit recourir à des artifices pour suggérer des phénomènes tels que la prise de vitesse ou l'inertie dans un virage. La sensation d'accélération est reproduite par simple inclinaison de la plate-forme, ce qui reporte le poids du passager contre le siège. Privé de tout repère visuel avec l'extérieur, le visiteur ne prend pas conscience de l'inclinaison et met la sensation sur le compte de l'effet recherché. Il en va de même pour les effets de freinage, qui tend à propulser le corps du passager vers l'avant.



*Photo 2 : disposition de la cabine*

Pour éviter les accidents les visiteurs sont retenus sur leur siège par des fixations de sécurité (ceinture). Les mouvements de la cabine, lors du déroulement de l'attraction peut être rapides (environ 10 Hz) mais de faibles débattements ou bien plus lents (environ 0,5 Hz) mais avec des

débattements de vérin allant jusqu'à 1,5 mètre. La commande des six vérins est hydraulique (photo 3).



*Photo 3 : vue du dessous de la cabine avec 2 des 6 vérins de commande*

Dans les 3 parties du sujet, nous étudions différents aspects du fonctionnement de cette attraction. Les trois parties sont indépendantes et équivalentes en durée de travail. Les auteurs conseillent de consacrer le tiers du temps de l'épreuve à chaque partie qui sera rédigée sur une copie séparée.

Dans la partie 1, on se focalise sur les mouvements possibles et sur les lois de mouvements imposées à la cabine.

Dans la partie 2, on examine la structure à base de poutres qui constitue la cabine et sa tenue lors des mouvements de l'attraction.

Dans la partie 3, on s'intéresse à la distribution du fluide dans les vérins de commande et aux problèmes thermiques qui en découlent.



---

## Partie 1 : Mécanique des solides rigides

---

### Section 10 : Analyse préliminaire d'une structure fermée simplifiée

Afin de mettre en place la méthode d'analyse sans être pénalisé par des calculs trop complexes, nous étudions la structure plane schématisée sur la figure 10-1. Deux vérins sont articulés sur le sol, un en A et l'autre en B. Une distance  $2a$  sépare les points A et B, O est au milieu de AB. Les deux autres extrémités sont articulées en M. La position du point M (coordonnées  $x$  et  $y$  dans le repère  $O, X, Y$ ) est définie par les longueurs  $AM = z_1$  et  $BM = z_2$  de ces deux vérins.  $z_1$  et  $z_2$  sont pilotables en fonction du temps.

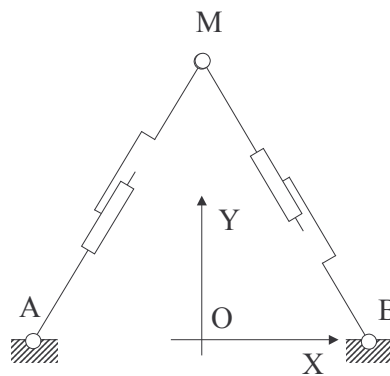


Figure 10-1 : Structure simplifiée

**Q10.1** Ecrire deux relations scalaires entre les longueurs  $z_1$  et  $z_2$  et les coordonnées  $x$  et  $y$  du point M. On mettra ces relations sous la forme ci-dessous et on précisera les expressions de  $f_1(x,y)$  et  $f_2(x,y)$  :

$$\begin{cases} z_1^2 + f_1(x,y) = 0 \\ z_2^2 + f_2(x,y) = 0 \end{cases}$$

**Q10.2** Dans la position initiale, les deux vérins ont une longueur  $z_m$  identique. Déterminer les coordonnées  $x_0$  et  $y_0$  de la position initiale du point M.

**Q10.3** Soit  $[F]$  le vecteur colonne de coordonnées  $F_1$  et  $F_2$  définies par

$$\begin{cases} F_1 = z_1^2 + f_1(x,y) \\ F_2 = z_2^2 + f_2(x,y) \end{cases}$$

Le système non linéaire où l'inconnue  $[X]$  est un vecteur colonne de coordonnées  $x$  et  $y$  à résoudre s'écrit donc :

$$[F] = [0]$$

Calculer l'opérateur grad $[F]$ . La figure 10-2 illustre la méthode itérative de résolution de Newton sur le cas de dimension 1. Montrer comment la connaissance de  $[F]$  et de grad $[F]$  pour la position  $[X_i]$  permet de déterminer  $[X_{i+1}]$ .

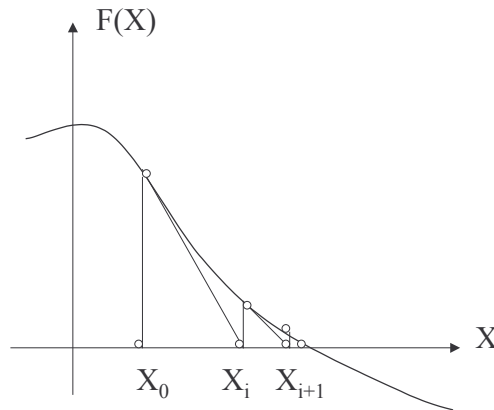


Figure 10-2 : Principe de la méthode de Newton

Les conditions initiales sont :  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ . On donne les évolutions  $z_1(t)$  et  $z_2(t)$  et on souhaite connaître les positions successives en 100 instants entre  $t = 0$  et  $t = t_f$ ,  $t_f$  est l'instant final du mouvement étudié. Décrire sous forme de organigramme, l'algorithme qui permet la détermination de ces 100 positions. A chaque pas de temps, la résolution du système  $[F] = [0]$  avec une précision  $\varepsilon$  donnée, sera effectuée par la méthode de Newton.

**Q10.4** La position  $[X]$  étant connue, montrer que l'opérateur  $\underline{\text{grad}}[F]$  permet aussi le calcul de la vitesse  $[\dot{X}]$  par simple inversion d'un système linéaire dont on précisera le membre connu  $[V]$  :

$$[V] = \underline{\text{grad}}[F].[\dot{X}]$$

**Q10.5** Même question pour le calcul de l'accélération  $[\ddot{X}]$ , la vitesse et la position étant connues. On précisera le membre connu  $[\Gamma]$  :

$$[\Gamma] = \underline{\text{grad}}[F].[\ddot{X}]$$

## Section 11 : Analyse géométrique de la position de la plate-forme 3D

Dans la suite de cette section et dans les sections suivantes, nous nous intéressons à la structure de la plate-forme 3D (voir figure 11-1). Celle-ci est rigidement fixée sur un plateau guidé par 6 vérins. Une extrémité de deux vérins est liée à chaque point d'ancrage I, J ou K. Les autres extrémités des 6 vérins sont liées (aussi par deux) au sol (supposé galiléen) aux points A, B et C.

A, B et C sont disposés équi-angulairement sur un cercle (Cs), dans un plan horizontal, de rayon  $R_s$ . Les points I, J et K sont disposés sur un cercle (Cp) de rayon  $R_p$  sur le plateau. Les liaisons entre les vérins et le plateau ou le sol (en A, B, C, I, J et K) sont modélisées par des liaisons sphériques. Compte tenu de la conception des vérins, on modélise par une liaison pivot-glissant, le guidage entre le corps et la tige du vérin.

$$R_s = 1,7 \text{ m} \quad \text{et} \quad R_p = 1,4 \text{ m}$$

La longueur d'un vérin entre les centres des liaisons sphériques est notée  $z_{PQ}$ . (P et Q sont des noms génériques pour les centres des liaisons sphériques A, B, C, I, J ou K). On commande indépendamment les 6 vérins ; soient les 6 longueurs  $z_{AJ}$ ,  $z_{AK}$ ,  $z_{BI}$ ,  $z_{BK}$ ,  $z_{CI}$ ,  $z_{CJ}$  au cours du temps. A chaque jeu de 6 longueurs, correspond deux positions possibles de la plate-forme (une seule est correspond à une altitude positive).

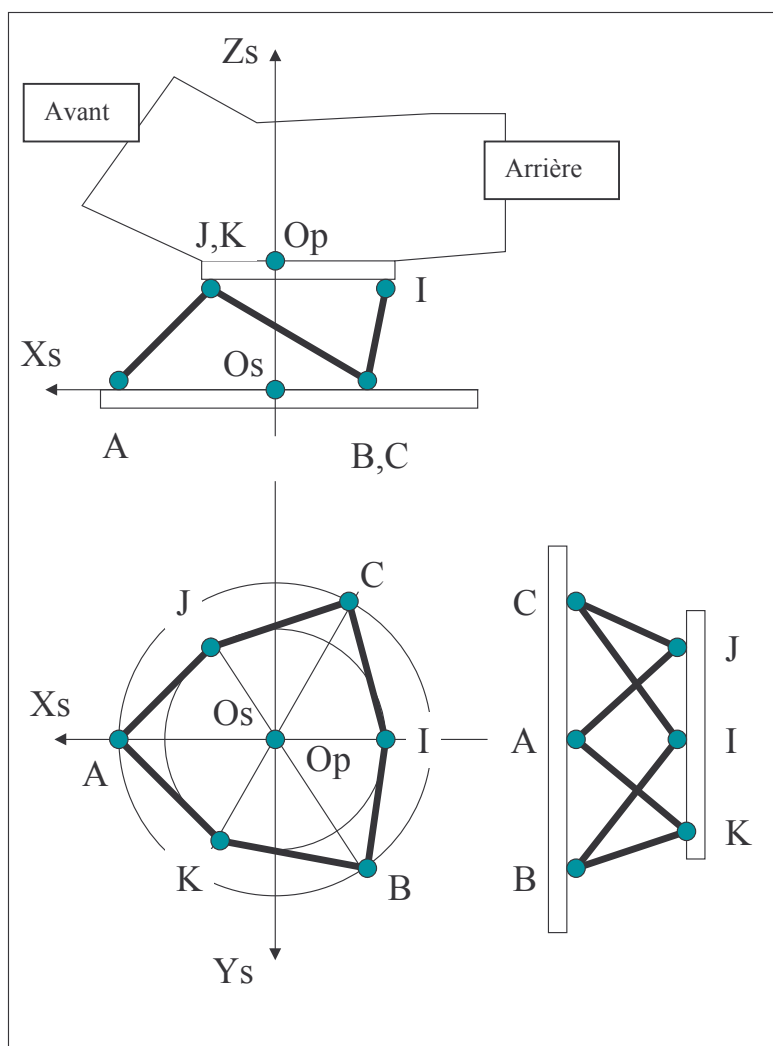


Figure 11-1 : Structure de la plate-forme dans la position repos. Dans cette position les bases  $\vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s$  et  $\vec{x}_p, \vec{y}_p, \vec{z}_p$  sont confondues.

La position de la plate-forme, dans l'espace réservé pour l'attraction est paramétrée par 6 degrés de mouvement : les trois coordonnées (x, y, z) du centre Op du cercle (Cp) dans le repère galiléen  $(\vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$  ainsi que trois angles analogues d'Euler ( $\psi, \theta, \phi$ ) permettant le passage de la base liée au sol  $(\vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$  à la base liée à la plate-forme  $(\vec{x}_p, \vec{y}_p, \vec{z}_p)$ . Les bases intermédiaires sont définies sur la figure 11-2.

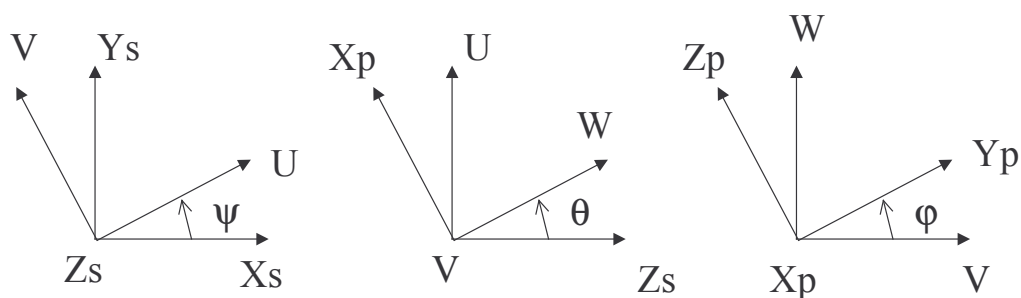


Figure 11-2 : Angles de passage entre les bases liées au sol et à la plate-forme

**Q11.1** Mettre en place le graphe des liaisons faisant intervenir : les 6 vérins (on rappelle que le modèle de la liaison entre la tige ( $T_i$ ) et le corps ( $C_i$ ) est une liaison pivot-glissant), la plate-forme (P) et le sol (S). Déterminer le nombre de boucles cinématiques indépendantes  $v$  et le nombre de mobilités internes  $m_i$ . La mobilité utile correspond aux 6 mouvements indépendants de la plate-forme. Déterminer le degré de mobilité  $m$  (c-à-d.  $m = m_u + m_i$ ) de ce mécanisme et en déduire le rang  $r_c$  du système cinématique associé

**Q11.2.** Toutes les liaisons sont supposées parfaites. Que vaut le degré d'hyperstatisme  $h$  ? Qu'en concluez vous quant à la détermination des efforts dans les différentes liaisons du mécanisme ?

**Q11.3** Donner les expressions des coordonnées  $x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B$  et  $x_C, y_C, z_C$  des points A, B et C dans le repère  $(O_s, \vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$  du sol en fonction des données du problème. Application numérique.

**Q11.4** Soient une position quelconque des 6 vérins à l'instant « t » caractérisée par les longueurs  $z_i(t)$ . Ecrire les six relations liant les longueurs des vérins aux coordonnées  $x_I, y_I, z_I, x_J, y_J, z_J$  et  $x_K, y_K, z_K$  des points I, J et K dans le repère  $(O_s, \vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$ .

**Q11.5** Les longueurs de vérins (tous identiques) varient entre les valeurs mini et maxi suivantes :

$$z_m = 2,00 \text{ m et } z_M = 3,50 \text{ m}$$

Déterminer la hauteur minimale  $h_m$  de la plate-forme lorsque tous les vérins sont rentrés et la hauteur maximale  $h_M$  lorsque tous les vérins sont sortis.

**Q11.6** On considère que les vérins AJ et AK ont même longueur, que les vérins CJ et BK ont même longueur et que CI et BI ont même longueur. Par un croquis, préciser la position extrême du plateau de la plate-forme basculé vers l'avant. Justifiez que cette position correspond à AJ et CJ rentrés et à CI sortis. Calculer l'angle  $\theta_{av}$  correspondants, compte tenu de la complexité des relations analytiques à résoudre on pourra proposer une détermination graphique de cet angle.

**Q11.7** On s'intéresse au problème géométrique direct : compte tenu des longueurs des tiges de vérin on cherche à déterminer les paramètres  $(x, y, z, \psi, \theta, \varphi)$  de la position de la plate forme. Donner les expressions des coordonnées  $\alpha_I, \beta_I, \gamma_I, \alpha_J, \beta_J, \gamma_J$  et  $\alpha_K, \beta_K, \gamma_K$  des points I, J et K dans le repère mobile  $(O_p, \vec{x}_p, \vec{y}_p, \vec{z}_p)$  de la plate-forme en fonction des données du problème. Application numérique.

**Q11.8** Ecrire la matrice de passage  $[R]$  entre la base fixe liée au sol et la base mobile liée à la plate-forme. En déduire la relation entre les coordonnées  $x_M, y_M, z_M$  d'un point M quelconque de la plate-forme dans le repère fixe du sol connaissant sa position par ces coordonnées  $\alpha_M, \beta_M, \gamma_M$  dans le repère mobile de la plate-forme.

**Q11.9** Déduire de la question précédente, les expressions des coordonnées  $x_I, y_I, z_I, x_J, y_J, z_J$  et  $x_K, y_K, z_K$  des points I, J et K dans le repère  $(O_s, \vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$  en fonction des paramètres de position de la plate-forme  $(x, y, z \text{ et } \psi, \theta, \varphi)$ .

## Section 12 : Analyse d'une phase de mouvement particulière de la plate-forme

Dans la suite, on considère une phase de mouvement particulière pendant laquelle  $y, \psi$  et  $\varphi$  restent constamment nuls. L'étude du mouvement de la cabine devient plan (ce qui ne



correspond pas au type de mouvement de la cabine pour une très large proportion de la durée de l'attraction).

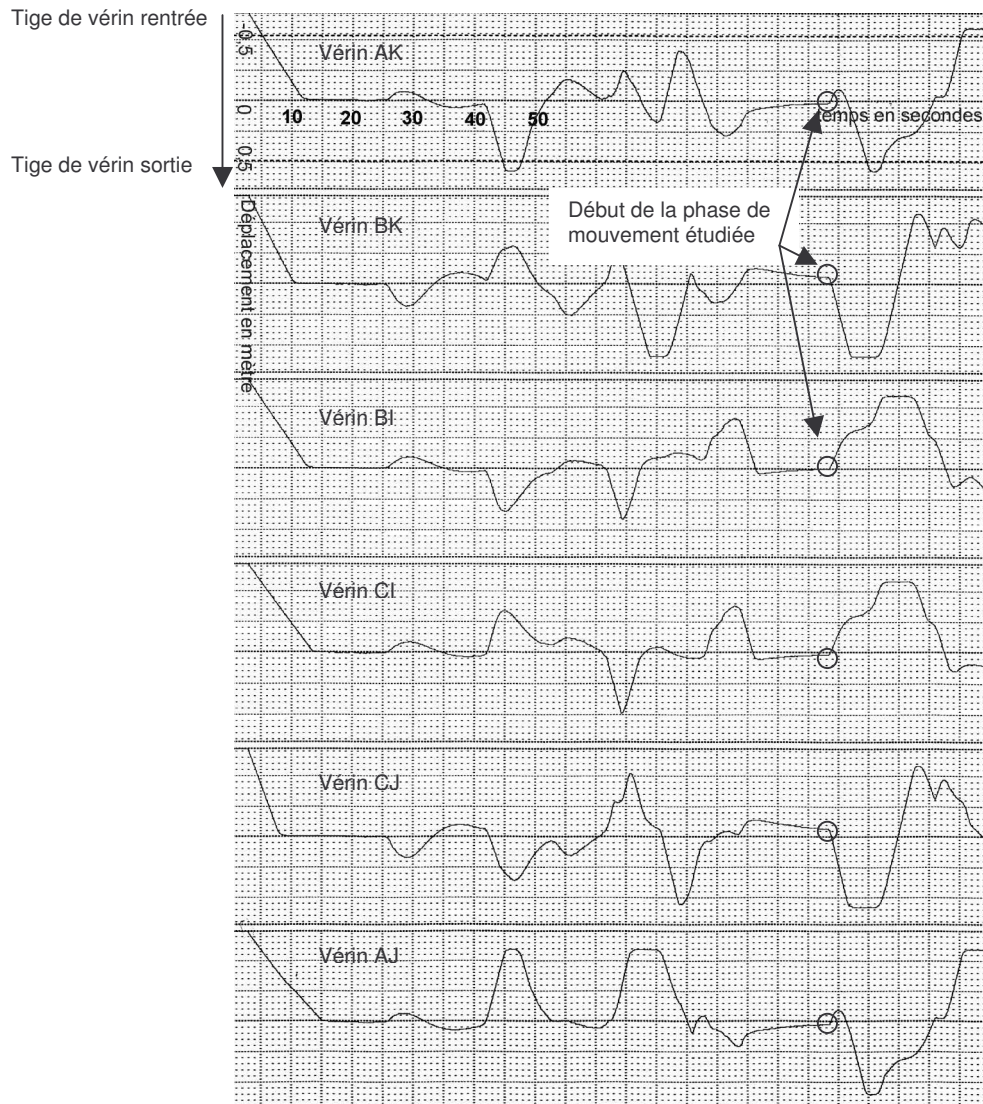


Figure 12-1 : Evolution des positions des 6 vérins de la plate-forme

**Q12.1** Déterminer la matrice de rotation  $[R]$  pour ce type de mouvement. Que deviennent les coordonnées des points I, J et K dans le repère fixe du sol ? Montrer que pour imposer un tel mouvement, il faut que :

$$z_{AJ} = z_{AK} = z_1 ; z_{CI} = z_{BI} = z_2 ; z_{BK} = z_{CJ} = z_3$$

**Q12.2** La figure 12-1 représente l'évolution au cours du temps des positions des 6 vérins pour la première phase de l'attraction. Sur le graphique, la position 0 du vérin correspond à la longueur moyenne entre  $z_m$  et  $z_M$ . Le début de la période de mouvement étudié est indiqué sur le graphique ( $t_i = 98$  s). Décrire qualitativement le mouvement de la cabine durant cette phase et indiquer à quel instant le mouvement redevient 3D.

**Q12.3** Compte tenu des simplifications dues au mouvement particulier étudié, écrire le système de 3 équations géométriques obtenu sous la forme :

$$F_i(x, z, \theta) = z_i^2 + f_i(x, z, \theta) = 0$$

où  $z_i$  est la longueur d'un des 3 vérins et  $f_i(x, z, \theta)$  la fonction non linéaire associée à cette longueur.

Les longueurs  $z_i(t)$  sont déterminées sur le graphe. On suppose aussi connues les fonctions  $\dot{z}_i(t)$  et  $\ddot{z}_i(t)$  qui sont les dérivées successives de  $z_i(t)$  par rapport au temps.

**Q12.4** On suit une démarche identique à celle de la section 10. Calculer l'opérateur  $\text{grad}[F]$  et proposer sous forme d'organigramme une méthode itérative de résolution de ce système d'équations non linéaires partant de la position initiale du mouvement étudié (on supposera que les valeurs de  $x_0, y_0, z_0, \psi_0, \theta_0, \varphi_0$  sont toutes nulles lorsque le mouvement débute) vers une position quelconque de l'espace accessible.

On considère l'effet du mouvement sur le passager dans le cas d'une simulation d'accélération brutale (Figure 12-2 cas 1). Le passager est en train de visionner le passage en « vitesse lumière » de son vaisseau et ressent cette accélération qui le plaque à son siège. Les capacités d'accélération des vérins étant limitées on procède différemment dans ce simulateur : tout en pouvant jouer sur les débattements horizontaux « x » et verticaux « z », on incline la plate-forme d'un angle  $\theta$  (figure 12-2 cas 2). Nous allons comparer les deux mouvements afin de déterminer les conditions à vérifier pour que la sensation soit la plus réaliste possible.

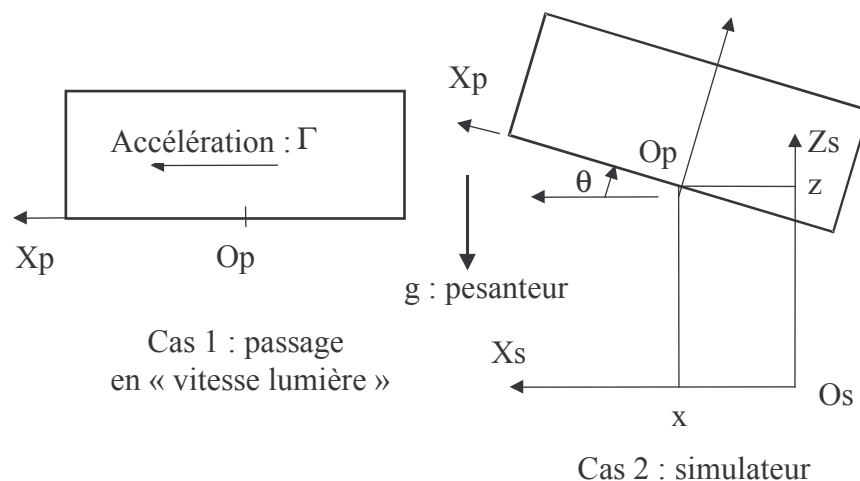


Figure 12-2 : Paramétrages des deux types de mouvement comparés. Attention, l'angle  $\theta$  est négatif. Il est conseillé de travailler sur une figure de calcul annexe où  $\theta$  serait positif compris entre 0 et  $\pi/2$ .

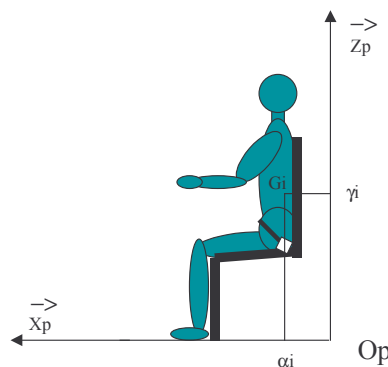


Figure 12-3 : Paramétrage de la position du passager du siège (i)

**Q12.5** On considère le passager installé dans la navette de la figure 12-2. Le mouvement de la navette par rapport à un référentiel Galiléen est une translation rectiligne d'accélération  $\Gamma$  très forte mais constante. La masse du passager est notée  $m_i$  et le moment d'inertie du passager par rapport à l'axe  $G_i \vec{Y}_p$  est noté  $I_{Gi}$ . Déterminer le torseur des actions de liaison entre le passager et son siège. Le passager, rigidifié par l'appréhension de ce saut dans l'espace, est supposé se comporter comme un solide indéformable. On précisera le moment en  $G_i$  et la résultante du torseur d'effort : siège  $\rightarrow$  passager. *Données* :  $m_i = 90 \text{ kg}$

**Q12.6** Dans le simulateur, l'accélération est simulée en inclinant la plate-forme vers l'arrière (figure 12-2 cas 2). Le passager, assis sur un siège situé à la position (i), est positionné de telle sorte que son centre d'inertie  $G_i$  se trouve aux coordonnées  $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$  dans la base de la plate-forme. Il est toujours rigidement lié à son siège et ressent les effets du mouvement par l'intermédiaire de son siège. Déterminer dans ce cas, le torseur de la liaison entre le passager et le siège. On précisera le moment en  $G_i$  et la résultante du torseur d'effort : siège  $\rightarrow$  passager. *Données* :  $I_{Gi} = 7,8 \text{ kg.m}^2$

**Q12.7** Déterminer les 3 conditions à vérifier si on souhaite que le passager ait les mêmes sensations entre les deux situations étudiées. Ces conditions ne peuvent être satisfaites exactement. Quelles doivent être les amplitudes en vitesse et en accélération à ne pas dépasser pour que les différences entre les valeurs non nulles de ces torseurs ne dépassent pas 5% ?

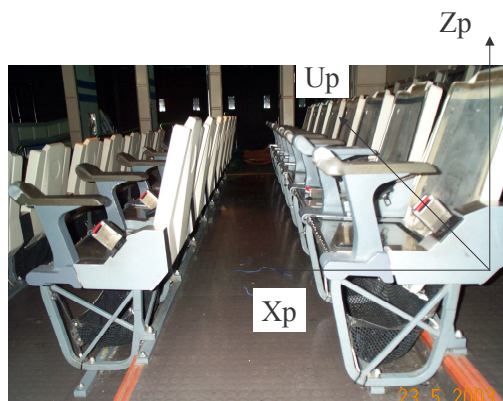


Figure 12-4 : Structure des sièges passagers

**Q12.8** On considère maintenant le cas du freinage brutal de la navette spatiale (dû à un choc contre une paroi par exemple). Une fois de plus, pour augmenter l'effet la plate-forme est inclinée vers l'avant d'un angle  $\theta$ . Au moment le plus critique, les conditions de vitesse et d'accélération sont les suivantes :

$$\theta = 40^\circ ; \dot{\theta} = 0 \text{ rd/s} ; \ddot{\theta} = 0 \text{ rd/s}^2$$

$$\ddot{x} = -4 \text{ m/s}^2 \text{ et } \ddot{z} = -2 \text{ m/s}^2$$

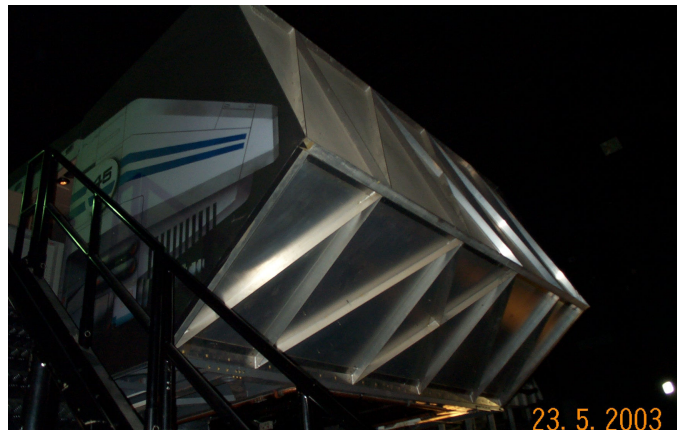
On demande de déterminer la tension dans la ceinture au niveau de l'attache. On supposera que la ceinture est alignée avec le vecteur  $U_p$  de coordonnées  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$  dans la base attachée à la plate-forme et que le passager n'est plus en contact avec le siège (il est projeté vers l'avant et légèrement vers le haut).

---

## Partie 2 : Mécanique des solides déformables

---

La structure de la navette virtuelle est constituée de poutres assemblées entre-elles par des cornières que nous modéliserons comme des encastrements parfaits. La structure est recouverte de panneaux fins en aluminium dont nous négligerons les effets dans l'étude qui suit. Le motif de base de cette structure est un rectangle traversé d'une poutre en diagonale pour assurer la rigidité (voir fig. 2-1) mais cette structure est incompatible avec la mise en place de portes permettant le passage des visiteurs.



*Figure 2-1 : Structure à base de poutres de la cabine (on néglige l'influence des panneaux en aluminium)*

Sur les flancs, la structure est donc de type rectangulaire simple afin de mettre en place des portes pour l'accès d'un côté et l'évacuation de l'autre (Fig. 2-2). Dans la section qui suit nous allons quantifier la perte de rigidité de la structure due à cette architecture. Pour cela on considérera un motif élémentaire afin de pouvoir mener des calculs de manière analytique. Des résultats numériques sont fournis pour permettre des comparaisons et des conclusions à cette partie.



*Figure 2-2 : Accès des passagers, flancs de la cabine*



Les effets de flexion sont les plus importants et c'est la raison qui pousse à travailler sur le portique simplifié (figure 21-2) sollicité par une charge horizontale  $F$ . Le comportement de la structure sous cette sollicitation éclairera les difficultés rencontrées par la présence des portes. Le portique est en acier de module élastique  $E = 210 \text{ GPa}$  et de limite élastique  $\sigma_e = 350 \text{ MPa}$ .

## Section 21 : Raideur d'un portique simplifié

**Q21.1** Déterminer l'aire et le moment quadratique de flexion par rapport à l'axe  $Z$  de la section droite de la poutre étudiée. On exprimera ces grandeurs sous forme paramétrée en fonction de la largeur du côté «  $a$  » et de l'épaisseur de la paroi «  $e$  ». Cette dernière est supposée faible devant «  $a$  ».

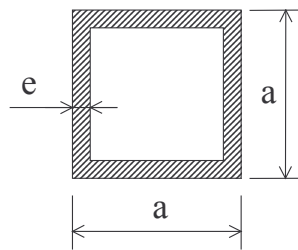


Figure 21-1 : Définition de la section droite  $e = 2,6 \text{ mm}$  et  $a = 40 \text{ mm}$

**Q21.2** Soit la structure plane de la figure 21-2, constituée de poutres droites pour lesquelles la section droite est définie à la question précédente. Soient  $X_A$ ,  $Y_A$ ,  $M_A$  et  $X_D$ ,  $Y_D$ ,  $M_D$  les inconnues de liaisons au niveau des encastremets. Montrer que cette structure est hyperstatique et préciser le degré d'hyperstatisme.

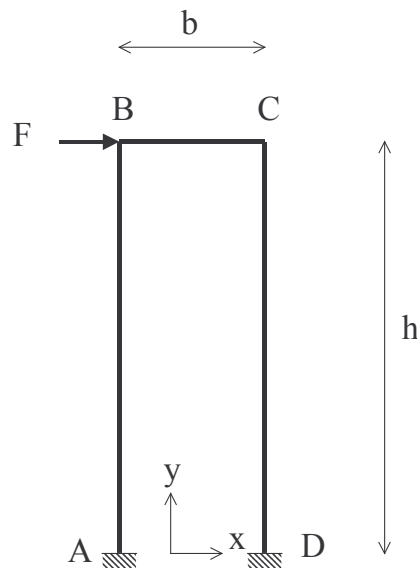


Figure 21-2 : portique bi-encastré en A et D.  $h = 2,1 \text{ m}$  et  $b = 0,9 \text{ m}$

**Q21.3** On retient les inconnues en D comme inconnues hyperstatiques que l'on note  $X$ ,  $Y$  et  $M$  dans la suite. Déterminer par superposition, les sollicitations internes de la structure isostatique associée provenant de successivement de  $F$ ,  $X$ ,  $Y$  et  $M$ . On tracera les diagrammes des moments fléchissants sur 4 figures différentes.



**Q21.4** Calculer l'énergie de déformation de la structure en négligeant les effets de l'effort tranchant et de la traction ou compression devant l'effet de flexion. En déduire 4 relations permettant de déterminer le déplacement horizontal en B (que l'on notera  $u_B$ ) ainsi que les inconnues  $X$ ,  $Y$  et  $M$ .

**Q21.5** Pour une charge  $F$  de 100 N, on détermine les inconnues hyperstatiques en résolvant le sous système 3x3 des relations précédemment obtenues :

$$X = -50 \text{ N}, Y = 109 \text{ N}, M = 56 \text{ Nm}$$

Déterminer le déplacement  $u_B$  et en déduire la raideur du portique défini par :  $K = F/u_B$

**Q21.6** Quel est l'endroit de la structure le plus sollicité en flexion ? Quelle est la valeur du moment fléchissant maximal dans la structure ?

## Section 22 : Tenue du chambranle d'une porte d'accès à l'attraction

Le jeu laissé entre la porte et le chambranle est de 3 mm (figure 22-1). La forte rigidité de la porte (conçue sur la base d'une structure de poutres rigidifiée par une barre diagonale et recouverte de plaques d'aluminium) conduit à des actions répétées du flanc de la porte sur le chambranle (figure 22-2). Ceci induit des sollicitations qui se superposent aux sollicitations déjà étudiées aux questions précédentes. On propose d'évaluer grossièrement ces contraintes supplémentaires dues au contact porte-chambranle, dans l'angle du chambranle en réalisant un calcul en élasticité plane. On modélise l'action de la porte sur le chambranle par une répartition de pression  $q$  et on impose les conditions limites en déplacement précisées sur la figure 22-3. L'allure de la répartition des contraintes de Von Mises est fournie sur la figure 22-4.

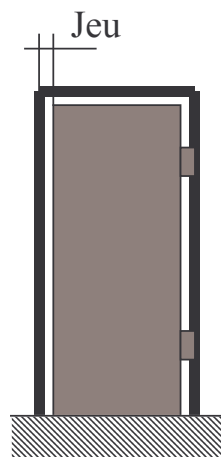


Figure 22-1

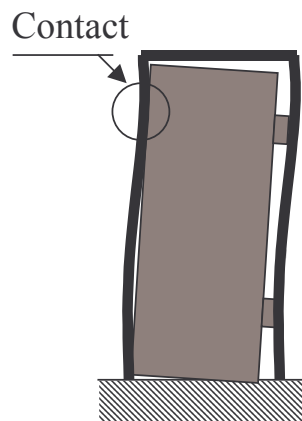


Figure 22-2

**Q22.1** Rappeler l'expression de la contrainte de Von Mises. A quoi se réduit-elle dans le cas d'un état de contrainte plane ? Le nœud 265 (situé dans l'arrondi de l'angle du chambranle) est le plus sollicité au sens de Von Mises. On y relève les contraintes suivantes :

$$\sigma_{xx} = 70 \text{ MPa}, \sigma_{yy} = 90 \text{ MPa}, \sigma_{xy} = 50 \text{ MPa}$$

En déduire la contrainte équivalente de Von Mises en ce point.

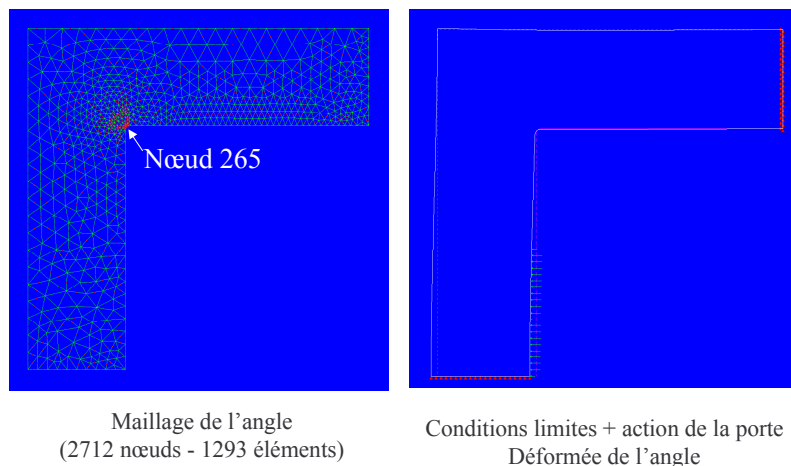
**Q22.2** Cet état de contrainte se superpose à celui déterminé précédemment par la RdM mais dont on sait qu'il n'a pas de sens dans l'angle. Un calcul par éléments finis conduit à un état de contrainte initial au nœud 265, qui vaut :

$$\sigma_{xx} = 100 \text{ MPa}, \sigma_{yy} = 95 \text{ MPa}, \sigma_{xy} = 90 \text{ MPa}$$

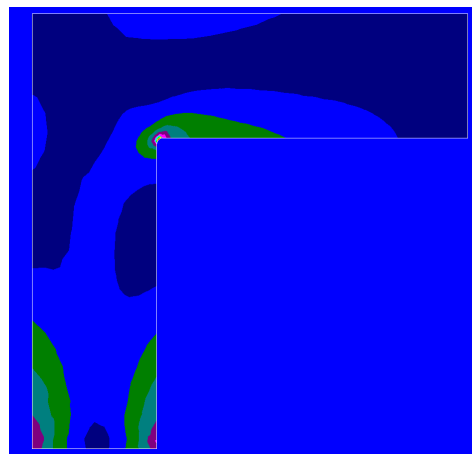
Peut-on superposer les contraintes de Von Mises ? Si non, comment évaluer la contrainte de Von Mises résultante ?

**Q22.3** Déterminer la matrice des contraintes globale au nœud 265. En déduire les contraintes principales ainsi que les directions principales associées. Justifier ce dernier résultat à l'aide des conditions limites de bord libre dans l'angle du chambranle.

**Q22.4** La structure est sollicitée de manière périodique et l'état de contrainte déterminé conduit à une détérioration par fatigue. Dans la première phase de cette détérioration une fissure s'initie suivant les plans de cisaillement maximum à partir du nœud 265. Par la suite cette fissure se développe suivant les plans où la traction est maximale. A l'aide des résultats précédents donner qualitativement l'allure des fissures issues du nœud 265 et que l'on observe sur le chambranle des portes d'accès.



*Figure 23-3 : Maillage et conditions limites*



*Figure 23-4 : Carte des iso-contraintes de Von Mises*

# Corrigé et commentaires sur l'épreuve de Mécanique des systèmes et des milieux déformables

Bien que les trois parties de l'épreuve soient indépendantes, la plupart des candidats aborde le sujet dans l'ordre du texte et les résultats vont décroissant. Les résultats par partie sont les suivants :

Partie 1 : moyenne 7,8/20 écart type 4,5

Partie 2 : moyenne 7,1/20 écart type 5,4

Partie 3 : moyenne 5,7/20 écart type 5,4

## **Partie 1**

C'est donc la partie la mieux réussie. Une part importante de calculs géométriques permet de classer les candidats en deux catégories : ceux pour qui ce type d'exercice ne présente aucune difficulté qui ont bien intégré la logique de la section et qui déroulent des calculs corrects ; ceux pour qui le théorème de Pythagore reste une difficulté et qui n'ont rien à faire dans un concours de ce niveau. Seule la détermination de la position basculée en avant a posé quelques difficultés ...

Une structure simplifiée était proposée en préambule, non pas pour guider dans la démarche de mise en équations mais plutôt pour la méthode de résolution. Cette partie montre une méconnaissance assez générale des méthodes numériques de résolution des problèmes mécaniques. Notamment la méthode itérative de Newton, est rarement expliquée avec rigueur.

Une petite question sur le nombre de boucles cinématiques et le degré d'hyperstatisme montre que ces notions classiques ne sont pas maîtrisées par un nombre important de candidats : le nombre de boucles indépendantes varie de 3 à 15 pour cette structure en passant par 5 (qui est la bonne réponse) mais plus souvent 6 (?). La notion de rang du système cinématique n'est pas connue.

La dernière section faisait l'étude d'une phase de mouvement plane, la lecture et l'interprétation des graphes fournis a été plutôt bien menée (une part importante de copie inverse le mouvement car les candidats n'ont pas vu le sens des ordonnées : tige sortie vers le bas).

Par la suite, on propose une mise en équations par le principe fondamental de la dynamique. Bien que souvent correcte, un nombre beaucoup trop élevé de copies présente des réponses incomplètes ou fausses (pas d'équation de moment, erreur de projection, fautes dans les calculs de moment dynamique ou cinétique). Ceci est inadmissible à une agrégation de Mécanique. L'interprétation des équations et la discussion sur la comparaison proposée est assez décevante. Il s'agissait d'une question ouverte et le nombre de remarques pertinentes est très faible.

De manière anecdotique, seuls 3 candidats sur 254 ont pensé qu'il ne fallait pas prendre en compte la pesanteur pour la phase d'accélération du vaisseau dans l'espace.

## **Partie 2**

Pour cette session, la partie Mécanique des solides déformables se limitait à des points de RdM et MMC basiques. La moyenne assez élevée de cette partie montre qu'une part significative des candidats maîtrise ces notions. Néanmoins, il est à constater que le calcul de l'aire d'un tube carré est une question sélective ! De même, confirmant les remarques déjà faites plus haut, le degré d'hyperstatisme est souvent parachuté (et faux).

Il en va de même pour les diagrammes des sollicitations internes. Qu'ils soient tracés sur la structure ou « à plat » comme dans le corrigé, ils sont très peu souvent justifiés par une coupure de section et un isolement correct.

On observe assez souvent des copies qui font la superposition des énergies de déformation, ceux là même qui répondent « non » (presque de manière offusqué par une question aussi triviale) à la superposition de la contrainte de Von Mises. Où est la logique ?

Contrairement aux années précédentes, beaucoup de candidats ont eu une analyse critique de leurs applications numériques : la raideur du chambranle déterminée va de 100 à  $10^9$  N/m et lorsque le résultat obtenu semble douteux, l'hypothèse de l'erreur de calcul est souvent avancée. Une erreur diagnostiquée est à demi pardonnée ...

Les méthodes de détermination des contraintes et directions principales sont connues : par les cercles de Mohr pour 10% des candidats, par diagonalisation pour les autres. Par contre, l'exploitation de ces résultats pour discuter de la propagation de fissure laisse à désirer. Cette dernière question a été rarement abordée, et certains résultats justes restent inexplicables (forme de la fissure juste avec des directions principales fausses).

## **Partie 3**

Cette partie a été négligée par un cinquième des candidats. La moyenne hors copies blanche est presque de 7, ce qui montre que ces notions sont aussi bien (ou mal) maîtrisées que celles plus traditionnelles de la mécanique du solide. Il faut néanmoins insister une fois de plus sur le fait que la mécanique des fluides, la thermodynamique et la thermique font partie intégrante des études de systèmes industriels et qu'un professeur agrégé ne peut pas se permettre de faire l'impasse sur ces sujets.

La mise en équation du vérin de pilotage ainsi que l'évaluation du débit de fuite ont été effectuées de manière satisfaisante par un nombre important de candidats.

Beaucoup de candidats ont considéré que lorsque la plate-forme descend la pression  $p_2$  devient supérieure à  $p_1$ , ce qui est en contradiction avec les équations établies précédemment.

Les questions élémentaires portant sur l'étude des pertes de charge n'ont souvent pas été traitées, alors que ces notions sont fondamentales.

Les candidats semblent ignorer le théorème de Bernoulli généralisé.

L'analyse dimensionnelle est un outil puissant dont l'usage dépasse le cadre de la mécanique des fluides et ne doit être négligée par les candidats.

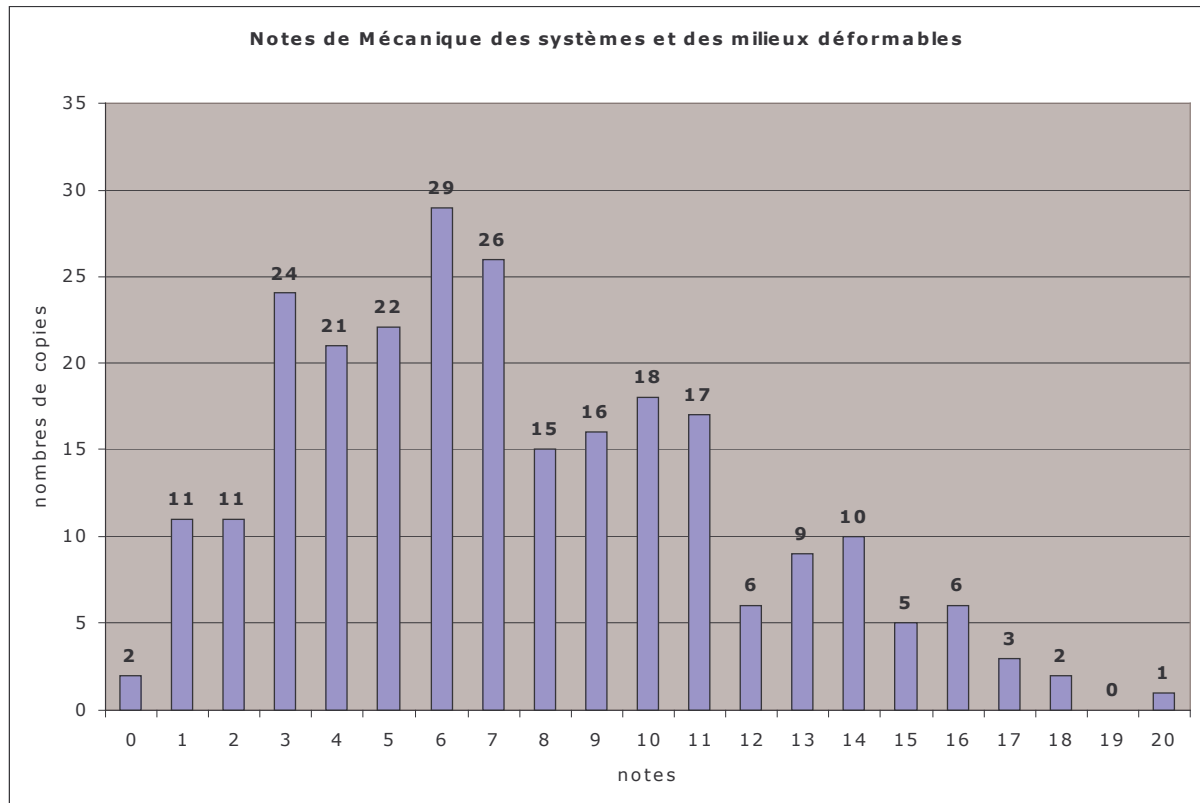
Les candidats doivent savoir analyser un système mécanique du point de vue énergétique. Dans le cas du système proposé, l'énergie potentielle est transformée en chaleur par laminage de l'huile lorsque la plate-forme descend.

Très peu de candidats ont su traiter la section 33 qui se réfère à des notions de base de transfert de chaleur.

## ***Distribution des notes***

Les résultats pour cette l'épreuve sont les suivants : moyenne 7,4 écart type 4,1

77 copies ont une note supérieure ou égale à 10, attestant ainsi qu'une quantité significative de bons candidats mérite d'obtenir ce concours.





## Partie 1 : Mécanique des solides rigides (corrigé)

### Section 10 : Analyse préliminaire d'une structure fermée simplifiée

**Q10.1** Soit  $m$  la projection de  $M$  sur l'horizontale  $OX$ . En appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles  $AmM$  et  $BmM$ , on tire les deux relations :

$$\begin{cases} z_1^2 = y^2 + (x+a)^2 \\ z_2^2 = y^2 + (x-a)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1(x, y) = -[y^2 + (x+a)^2] \\ f_2(x, y) = -[y^2 + (x-a)^2] \end{cases}$$

**Q10.2** D'après le système précédent :

$$z_1 = z_2 = z_m \rightarrow x_0 = 0 \quad \text{et} \quad y_0 = \sqrt{z_m^2 - a^2}$$

**Q10.3** L'opérateur gradient de la fonction  $F$  s'écrit sous la forme :

$$\underline{\underline{grad}}[F] = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2(x+a) & -2y \\ -2(x-a) & -2y \end{bmatrix}$$

Par définition du gradient on a :

$$dF = \underline{\underline{grad}}[F].dX$$

Si on fait le développement limité de  $[F(X)]$  au premier ordre entre  $X_{i+1}$  et  $X_i$ , on obtient :

$$F(X_{i+1}) - F(X_i) = \underline{\underline{grad}}[F]_{X_i} (X_{i+1} - X_i)$$

Sur le graphe, on voit que l'approximation  $X_{i+1}$  sera obtenue pour l'abscisse qui annule la fonction  $F$ , ce qui conduit à la relation :

$$X_{i+1} = X_i - \underline{\underline{grad}}^{-1}[F].F(X_i)$$

En imposant  $z_1(t)$  et  $z_2(t)$ , on peut déterminer  $x(t)$  et  $y(t)$  de proche en proche en suivant l'algorithme ci-dessous :

#### Définition des données

$zm=2;$   
 $zM=3.5;$   
 $a=1;$

#### Calcul de la position initiale

$x0=0;$   
 $y0=(zm^2-a^2)^{0.5};$

$tf = 10;$  durée de l'étude

#### Définition des paramètres de la méthode numérique

$n = 100;$  nombre de points pour lesquels on souhaite une valeur précise des inconnues  $x$  et  $y$   
 $dt=tf/n;$  pas de temps  
 $precision=0.000001;$  précision avec laquelle les équations sont satisfaites

#### Initialisation du problème

$t(1)=0;$   
 $z1(1)=zm;$

```

z2(1)=zm;
x(1)=x0;
y(1)=y0;

Boucle de résolution pour chaque pas de temps
for i=1:n
    t(i+1)=i*dt;
    z1(i+1)=...; évolution de z1(t)
    z2(i+1)=...; évolution de z2(t)
    auxx=x(i);
    auxy=y(i);
    j=0
    maxres=precision+1; initialisation du résidu plus grand que la précision

    Boucle de résolution par la méthode de Newton
    while maxres > precision
        j=j+1
        f1=z1(i+1)^2-(auxx+a)^2-auxy^2;
        f2=z2(i+1)^2-(auxx-a)^2-auxy^2;
        f=[f1;f2];
        gradf=-2*[(auxx+a) auxy;(auxx-a) auxy]; calcul du gradient
        deltax=-gradf\f; inversion de gradf
        auxx=auxx+deltax(1);
        auxy=auxy+deltax(2);

        resz1=(abs(z1(i+1)^2-(auxx+a)^2-auxy^2))^0.5;
        resz2=(abs(z2(i+1)^2-(auxx-a)^2-auxy^2))^0.5;
        maxres=max(resz1,resz2); calcul du résidu
    end

    x(i+1)=auxx;
    y(i+1)=auxy;
end

```

Dans le cas de la structure étudiée, une telle approche n'est pas indispensable car on peut déterminer  $x(t)$  et  $y(t)$  explicitement par les relations ci-dessous. Cependant, pour la structure réelle, constituée des 6 vérins, la résolution analytique du système n'est plus possible. Il faudra donc se tourner vers une résolution numérique.

$$x(t) = \frac{z_1^2 - z_2^2}{4a} \quad \text{et} \quad y(t) = \sqrt{z_1^2 - \left( \frac{z_1^2 - z_2^2}{4a} + a \right)^2}$$

**Q10.4** A partir des deux équations de la question Q10.1, on peut calculer les vitesses :

$$\begin{cases} z_1^2 = y^2 + (a+x)^2 \\ z_2^2 = y^2 + (a-x)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2z_1\dot{z}_1 = 2y\dot{y} + 2(x+a)\dot{x} \\ 2z_2\dot{z}_2 = 2y\dot{y} + 2(x-a)\dot{x} \end{cases}$$

Ce qui donne, sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} -2z_1\dot{z}_1 \\ -2z_2\dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -2(x+a) & -2y \\ -2(x-a) & -2y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \Rightarrow [V] = \begin{pmatrix} -2z_1\dot{z}_1 \\ -2z_2\dot{z}_2 \end{pmatrix}$$

[V] est donc connu ou calculable avec les  $z_i(t)$ ,  $\text{grad}[F]$  est aussi connu à chaque pas de temps. A chaque pas de temps, on peut donc calculer les dérivées premières de  $x$  et  $y$  par inversion de  $\text{grad}[F]$ .

**Q10.5** A partir des deux équations de la question Q10.4, on peut calculer les accélérations :

$$\begin{cases} 2z_1\dot{z}_1 = 2y\dot{y} + 2(x+a)\dot{x} \\ 2z_2\dot{z}_2 = 2y\dot{y} + 2(x-a)\dot{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2z_1\ddot{z}_1 + 2\dot{z}_1^2 = 2y\ddot{y} + 2\dot{y}^2 + 2(x+a)\ddot{x} + 2\dot{x}^2 \\ 2z_2\ddot{z}_2 + 2\dot{z}_2^2 = 2y\ddot{y} + 2\dot{y}^2 + 2(x-a)\ddot{x} + 2\dot{x}^2 \end{cases}$$

Ce qui donne, sous forme matricielle :

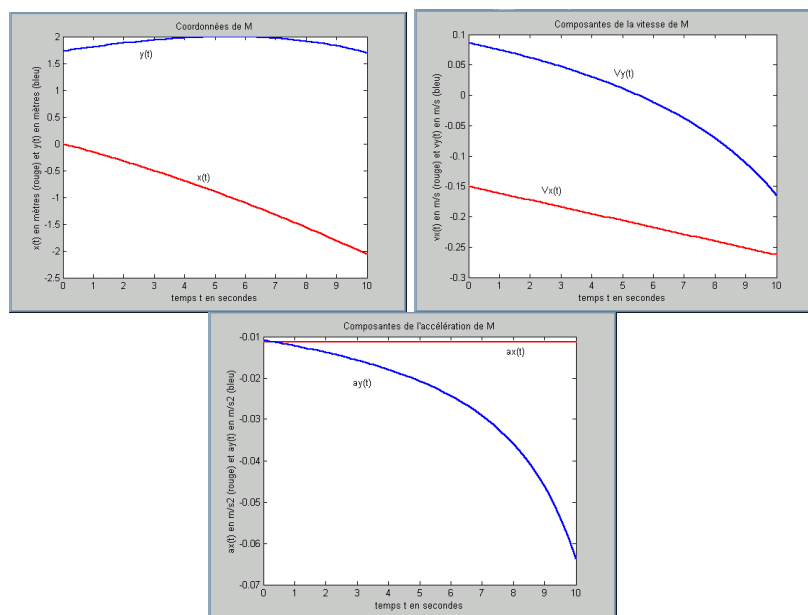
$$\begin{cases} 2z_1\ddot{z}_1 + 2\dot{z}_1^2 - 2\dot{y}^2 - 2\dot{x}^2 = 2y\ddot{y} + 2(x+a)\ddot{x} \\ 2z_2\ddot{z}_2 + 2\dot{z}_2^2 - 2\dot{y}^2 - 2\dot{x}^2 = 2y\ddot{y} + 2(x-a)\ddot{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2z_1\ddot{z}_1 - 2\dot{z}_1^2 + 2\dot{y}^2 + 2\dot{x}^2 \\ -2z_2\ddot{z}_2 - 2\dot{z}_2^2 + 2\dot{y}^2 + 2\dot{x}^2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -2(a+x) & -2y \\ -2(a-x) & -2y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix}$$

Ce qui permet de déterminer :

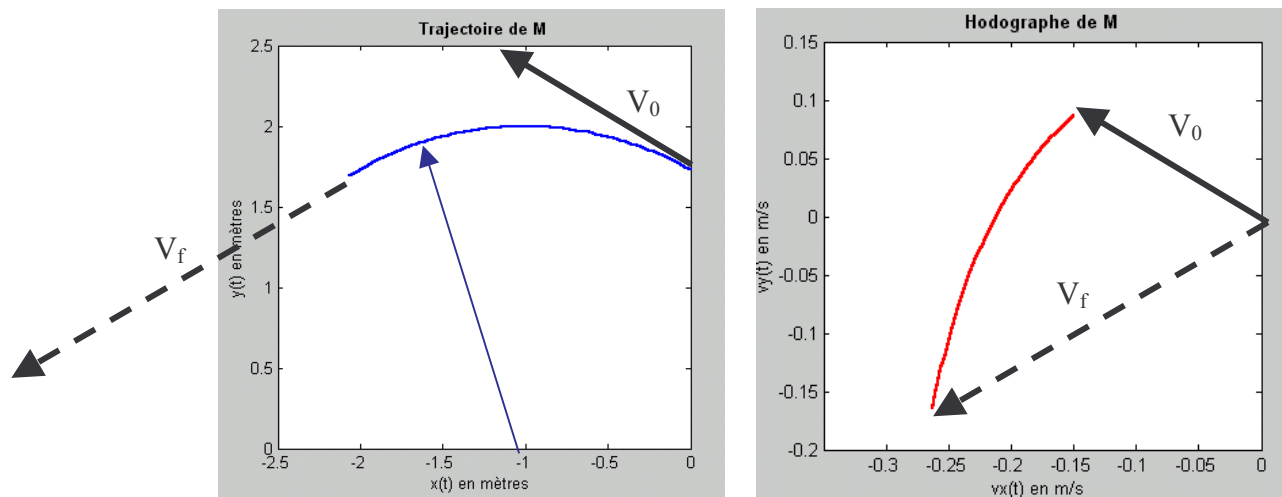
$$[\Gamma] = \begin{pmatrix} -2z_1\ddot{z}_1 - 2\dot{z}_1^2 + 2\dot{y}^2 + 2\dot{x}^2 \\ -2z_2\ddot{z}_2 - 2\dot{z}_2^2 + 2\dot{y}^2 + 2\dot{x}^2 \end{pmatrix}$$

$[\Gamma]$  est donc connu ou calculable avec les  $z_i(t)$ , ainsi que les dérivées premières de  $x$  et  $y$  par rapport au temps grâce à la question précédente. A chaque pas de temps, on peut donc calculer les dérivées secondes de  $x$  et  $y$  par inversion de  $\text{grad}[F]$ .

Sur les graphes qui suivent, on illustre la méthode sur le cas où  $z_1$  reste dans sa position minimale  $z_m$  et  $z_2$  évolue de  $z_m$  à  $z_M$  à vitesse constante entre  $t=0$  et  $t=t_f$ . La trajectoire de  $M$  est donc un arc de cercle. La figure de droite est l'hodographe du mouvement, c'est-à-dire le lieu de l'extrémité du vecteur vitesse.



**Coordonnées  $x(t)$  et  $y(t)$  de  $M$  et leurs dérivées premières et secondes par rapport au temps**

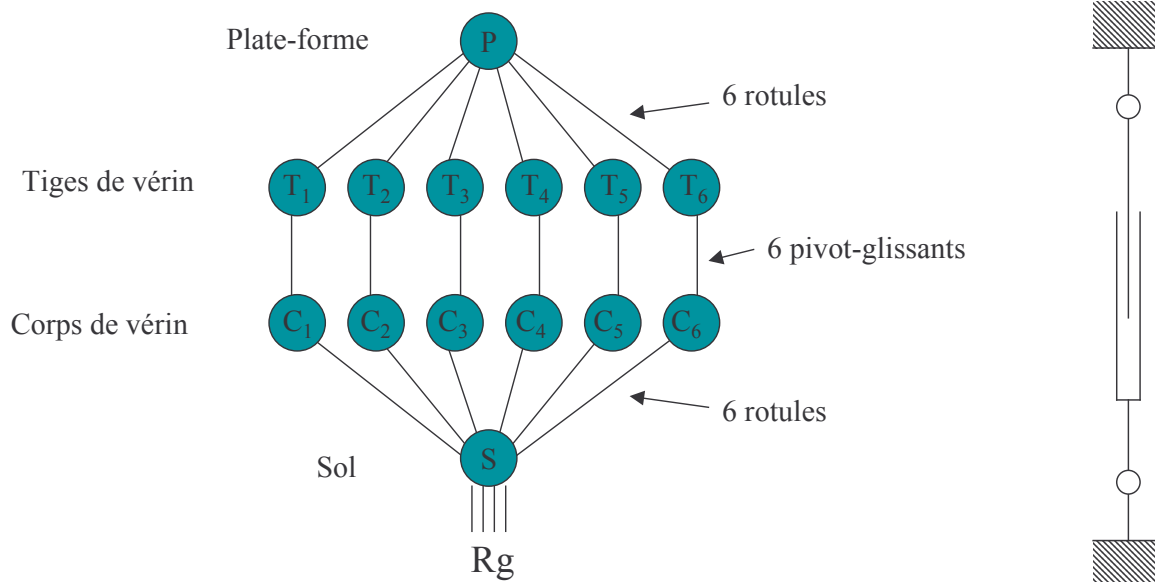


**Trajectoire et hodographe de M dans l'intervalle 0-10 secondes**

### Section 11 : Analyse géométrique de la position de la plate-forme 3D

**Q11.1** Le graphe des liaisons fait apparaître :

- $K = 18$  liaisons qui totalisent  $I_c = 6 \times (3+2+3) = 48$  ddl
- $N = 14$  solides
- $m_i = 12$  mobilités internes : rotations propres des corps et des tiges de vérin (figure de droite)
- $m_u = 6$  mobilités utiles : 6 mouvements élémentaires de la plate-forme



On en déduit :

$$m = m_u + m_i = 18 \quad \rightarrow \quad r_c = I_c - m = 48 - 18 = 30$$

La mobilité est de 18 et le rang du système cinématique est de 30.

**Q11.2.** Notons qu'il y a 6 boucles cinématiques indépendantes. En effet :

$$v = K - N + 1 = 18 - 14 + 1 = 5.$$

Ce qui donne un degré d'hyperstatisme h :

$$h = 6v - rc = 30 - 30 = 0$$

Le système est donc isostatique ; toutes les composantes d'efforts sont calculables.

**Q11.3** Les coordonnées des points d'attache des vérins au sol sont :

$$A : \begin{pmatrix} x_A = R_s \\ y_A = 0 \\ z_A = 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,7m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; B : \begin{pmatrix} x_B = -\frac{R_s}{2} \\ y_B = \frac{\sqrt{3}R_s}{2} \\ z_B = 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,85m \\ 1,47m \\ 0 \end{pmatrix}; C : \begin{pmatrix} x_C = -\frac{R_s}{2} \\ y_C = -\frac{\sqrt{3}R_s}{2} \\ z_C = 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,85m \\ -1,47m \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Q11.4** Les longueurs des vérins sont données par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} z_{AJ}^2 &= (x_J - R_s)^2 + y_J^2 + z_J^2 \\ z_{AK}^2 &= (x_K - R_s)^2 + y_K^2 + z_K^2 \\ z_{BI}^2 &= \left(x_I + \frac{R_s}{2}\right)^2 + \left(y_I - \frac{\sqrt{3}R_s}{2}\right)^2 + z_I^2 \\ z_{BK}^2 &= \left(x_K + \frac{R_s}{2}\right)^2 + \left(y_K - \frac{\sqrt{3}R_s}{2}\right)^2 + z_K^2 \\ z_{CI}^2 &= \left(x_I + \frac{R_s}{2}\right)^2 + \left(y_I + \frac{\sqrt{3}R_s}{2}\right)^2 + z_I^2 \\ z_{CJ}^2 &= \left(x_J + \frac{R_s}{2}\right)^2 + \left(y_J + \frac{\sqrt{3}R_s}{2}\right)^2 + z_J^2 \end{aligned}$$

**Q11.5** Lorsque tous les vérins sont de même longueur  $z(t)$ , la plate-forme est horizontale. Les hauteurs  $z_I$ ,  $z_J$  et  $z_K$  sont égales à  $h(t)$ . De plus, les centres des cercles de rayons  $R_s$  et  $R_p$  sont sur la même verticale et les coordonnées  $x_I$ ,  $y_I$ ,  $x_J$ ,  $y_J$  et  $x_K$ ,  $y_K$  peuvent facilement être déterminées. Le point I par exemple :

$$x_I = -R_p = -1,4 \text{ m} \quad y_I = 0$$

N'importe quelle relation du système précédent (ici le vérin BI) donne donc la hauteur h :

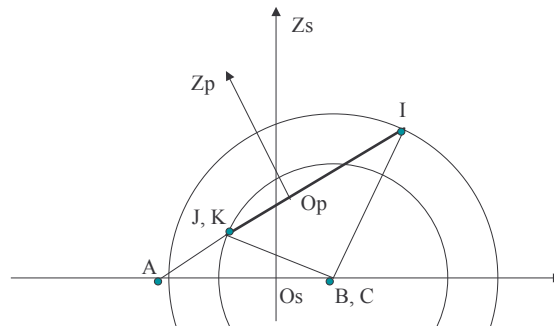
$$z^2 = \left(-R_p + \frac{R_s}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}R_s}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{z^2 - \left(R_p - \frac{R_s}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}R_s}{2}\right)^2}$$

Les hauteurs extrêmes valent :

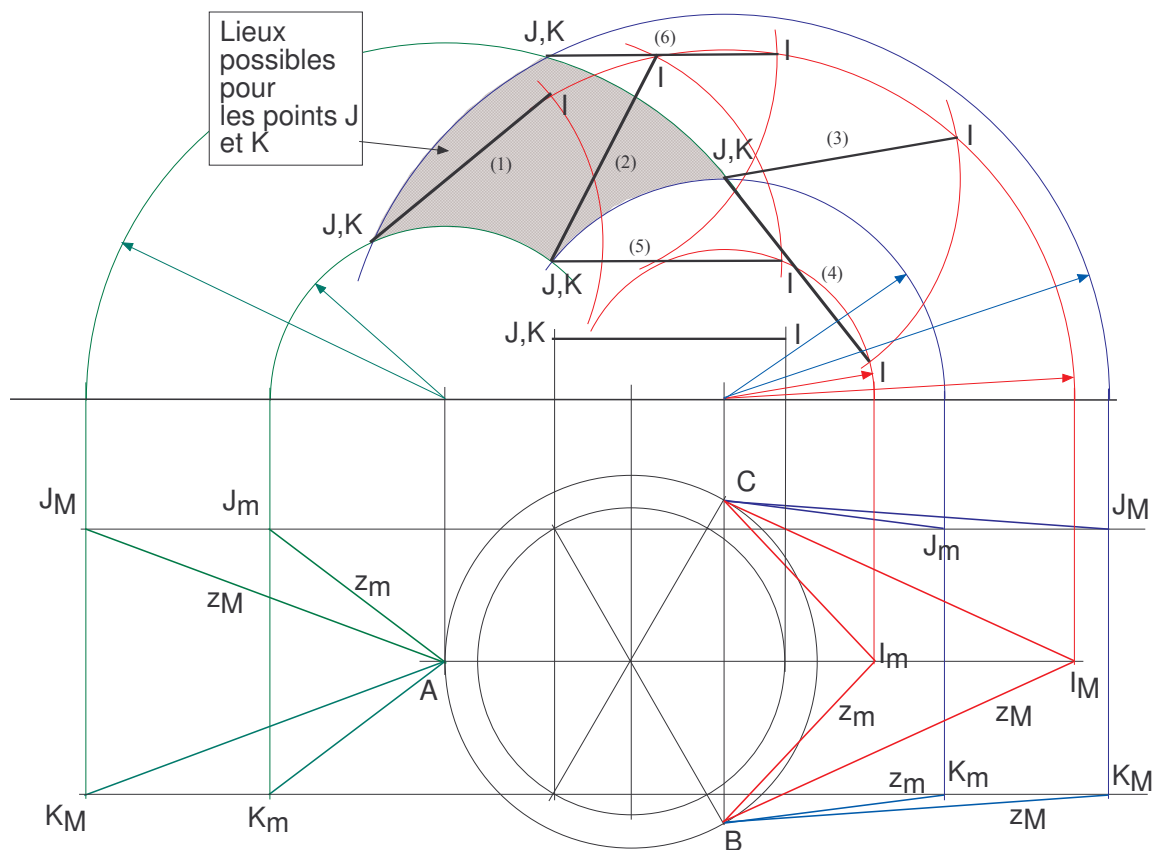
$$h_m = 1,24 \text{ m} \quad \text{et} \quad h_M = 3,13 \text{ m}$$

**Q11.6** Considérons la position la plus en avant de la plate-forme vue dans le plan (Os,X,Z). Le point I doit être le plus en haut possible : les vérins CI et BI doivent donc être sortis. Les point J et K doivent être les plus en bas possible : les vérins CJ et BK doivent être rentrés. B,I,J forme un triangle pour lequel l'inclinaison est maximale lorsque AJ, AK sont rentrés.





Des calculs élémentaires à base du théorème de Pythagore permettent de déterminer les longueurs BI, BJ et AJ projetées dans la plan (Os,X,Z). Soient : BI = 3,17 m, BJ = 1,98 m et AJ = 1,59 m.



L'épure respectant les proportions permet de montrer que l'angle de basculement maximal vers l'avant  $\theta_{av}$  est de  $62^\circ$ . On montre la zone possible pour les projections de J et K. Les placements des points I possibles correspondant aux 4 positions limites font apparaître un maximum pour la situation décrite plus haut : cas (2).

On obtient aussi les deux cas de la question Q11.5 : cas (5) et (6). Les (3) autres inclinaisons – cas (1), (3) et (4) sont des positions intermédiaires qui ne correspondent pas à des limites (notamment pour la limite arrière). En effet, en théorie, le plateau pourrait basculer au delà de la position verticale. Dans ce cas, les débattements sont limitées par les butées dans les liaisons rotules. Aucune indication dans le sujet ne permet de conclure sur la position arrière.

**Q11.7** Les coordonnées sont les suivantes :

$$I: \begin{pmatrix} \alpha_I = -R_s \\ \beta_I = 0 \\ \gamma_I = 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,4m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; J: \begin{pmatrix} \alpha_J = \frac{R_p}{2} \\ \beta_J = -\frac{\sqrt{3}R_p}{2} \\ \gamma_J = 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7m \\ -1,21m \\ 0 \end{pmatrix}; K: \begin{pmatrix} \alpha_K = \frac{R_p}{2} \\ \beta_K = \frac{\sqrt{3}R_p}{2} \\ \gamma_K = 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7m \\ 1,21m \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Q11.8** La rotation de la base de la plate-forme par rapport à la base du sol est obtenue par le produit des trois rotations élémentaires ou par l'expression des vecteurs de la base  $\vec{x}_p, \vec{y}_p, \vec{z}_p$  en fonction des vecteurs de la base  $\vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s$ .

$$[R] = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi & \sin \theta \sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi & \sin \theta \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \\ \cos \theta \sin \psi & \sin \theta \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi & \sin \theta \cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \varphi & \cos \theta \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Dans ces conditions, on peut en déduire :

$$\begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + [R] \begin{pmatrix} \alpha_M \\ \beta_M \\ \gamma_M \end{pmatrix}$$

Soit finalement :

$$\begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \alpha_M \cos \theta \cos \psi + \beta_M (\sin \theta \sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi) + \gamma_M (\sin \theta \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi) \\ y + \alpha_M \cos \theta \sin \psi + \beta_M (\sin \theta \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi) + \gamma_M (\sin \theta \cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi) \\ z - \alpha_M \sin \theta + \beta_M \cos \theta \sin \varphi + \gamma_M \cos \theta \cos \varphi \end{pmatrix}$$

**Q11.9** Il suffit de remplacer les valeurs de  $\alpha_M, \beta_M$  et  $\gamma_M$  par celles des points I, J et K obtenus dans la question 11.7 dans les expressions de  $x_M, y_M$  et  $z_M$  de la question 11.8 afin d'obtenir les 9 expressions de  $x_I, y_I, z_I, x_J, y_J, z_J$  etc...

$$\begin{pmatrix} x_I \\ y_I \\ z_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - R_p \cos \theta \cos \psi \\ y - R_p \cos \theta \sin \psi \\ z + R_p \sin \theta \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_J \\ y_J \\ z_J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + R_p \left\{ \frac{1}{2} \cos \theta \cos \psi - \frac{\sqrt{3}}{2} (\sin \theta \sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi) \right\} \\ y + R_p \left\{ \frac{1}{2} \cos \theta \sin \psi - \frac{\sqrt{3}}{2} (\sin \theta \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi) \right\} \\ z - R_p \left\{ \frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta \sin \varphi \right\} \end{pmatrix} \quad \text{Ap}$$

$$\begin{pmatrix} x_K \\ y_K \\ z_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + R_p \left\{ \frac{1}{2} \cos \theta \cos \psi + \frac{\sqrt{3}}{2} (\sin \theta \sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi) \right\} \\ y + R_p \left\{ \frac{1}{2} \cos \theta \sin \psi + \frac{\sqrt{3}}{2} (\sin \theta \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi) \right\} \\ z - R_p \left\{ \frac{1}{2} \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta \sin \varphi \right\} \end{pmatrix}$$

rès substitution de ces 9 termes dans les relations de la question 11.4, on aboutit à un système de 6 relations à 6 inconnues  $x, y, z$  et  $\psi, \theta$  et  $\varphi$ . Plus complexe certes, que celui de la partie préliminaire mais de la même forme :

$$[F]=[0] \quad \text{avec : } [F] = \begin{cases} F_1 = z_{AJ}^2 + f_1(x, y, z, \psi, \theta, \varphi) \\ F_2 = z_{AK}^2 + f_2(x, y, z, \psi, \theta, \varphi) \\ F_3 = z_{BI}^2 + f_3(x, y, z, \psi, \theta, \varphi) \\ F_4 = z_{BK}^2 + f_4(x, y, z, \psi, \theta, \varphi) \\ F_5 = z_{CI}^2 + f_5(x, y, z, \psi, \theta, \varphi) \\ F_6 = z_{CJ}^2 + f_6(x, y, z, \psi, \theta, \varphi) \end{cases}$$

Le calcul du gradient de  $[F]$  est rendu plus délicat par la présence des nombreux sinus et cosinus mais la méthode de détermination du vecteur  $[X]$  et de ces dérivées  $[V]$  et  $[\Gamma]$ , est tout à fait identique à celle mise en place dans la partie préliminaire.

Dans la section suivante, on se limite à l'étude d'un mouvement « plan » afin de ne pas alourdir des calculs analytiques déjà laborieux.

## Section 12 : Analyse d'une phase de mouvement particulière de la plate-forme

**Q12.1** Dans la phase de mouvement qui correspond à  $y$ ,  $\psi$  et  $\varphi$  constamment nuls, la matrice de rotation ne dépend plus que de  $\theta$  :

$$[R] = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \varphi & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Les coordonnées des points I, J et K dans le repère fixe sont donc :

$$\begin{pmatrix} x_I \\ y_I \\ z_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - R_p \cos \theta \\ 0 \\ z + R_p \sin \theta \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_J \\ y_J \\ z_J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \frac{R_p}{2} \cos \theta \\ -\frac{\sqrt{3}R_p}{2} \\ z - \frac{R_p}{2} \sin \theta \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_K \\ y_K \\ z_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \frac{R_p}{2} \cos \theta \\ \frac{\sqrt{3}R_p}{2} \\ z - \frac{R_p}{2} \sin \theta \end{pmatrix}$$

$x_J$  et  $x_K$  ainsi que  $z_J$  et  $z_K$  sont identiques.  $y_J$  et  $y_K$  sont opposés. Dans ces conditions, les expressions de la question 11.4 montrent que :

$$z_{AJ} = z_{AK} \quad \text{et} \quad z_{CJ} = z_{BK}$$

Par ailleurs, puisque  $y_I$  est nul, il apparaît aussi que :

$$z_{BI} = z_{CI}$$

Trois fonctions  $z_1(t)$ ,  $z_2(t)$  et  $z_3(t)$  indépendantes permettent de piloter l'attraction durant un mouvement de ce type.

**Q12.2** Entre 0 et 98 s, les 6 vérins évoluent de manière indépendante (hormis une petite période entre  $t=15$  s et  $t=25$  s où tous les vérins sont au repos à mi-course). A  $t = 98$  s tous les vérins sont dans la position mi-course et démarre une séquence pour laquelle, on observe que :

- les vérins AK et AJ ont même mouvement
- les vérins CI et BI ont même mouvement

- les vérins BK et CJ ont même mouvement

Donc le mouvement est bien du type de celui décrit à la question précédente (mouvement « plan ») et cette situation perdure jusqu'à l'instant  $t = 120$  s où on perd les parités. Le mouvement redevient 3D. Durant le mouvement plan, on observe de plus que :

- après une légère rentrée de tige, les vérins AK et AJ s'allongent en position tige sortie ( $t = 105$  s), puis les tiges rentrent à nouveau jusqu'à  $t=120$  s
- les tiges des vérins CI et BI rentrent et restent en position mini jusqu'à  $t=110$  s puis reviennent en position mi-course
- les tiges des vérins BK et CJ sortent plus rapidement encore que AK et AJ, puis rentrent oscillent un peu au voisinage de la position mini.

Donc, le mouvement de la plate forme sera un basculement assez rapide vers l'arrière (simulation d'une forte accélération) puis basculement plus modéré vers l'avant avec quelques à-coups en fin de mouvement.

**Q12.3** Une étude fine des lois de mouvements imposées aux vérins permet de connaître  $z_i(t)$  et ses dérivées successives. Le système de 3 relations à résoudre s'écrit cette fois :

$$\begin{aligned} z_1^2 &= \left( x + \frac{R_p}{2} \cos \theta - R_s \right)^2 + \left( \frac{\sqrt{3}R_p}{2} \right)^2 + \left( z - \frac{R_p}{2} \sin \theta \right)^2 \\ z_2^2 &= \left( x - R_p \cos \theta + \frac{R_s}{2} \right)^2 + \left( \frac{\sqrt{3}R_s}{2} \right)^2 + (z + R_p \sin \theta)^2 \\ z_3^2 &= \left( x + \frac{R_p}{2} \cos \theta + \frac{R_s}{2} \right)^2 + \left( \frac{\sqrt{3}R_p}{2} - \frac{\sqrt{3}R_s}{2} \right)^2 + \left( z - \frac{R_p}{2} \sin \theta \right)^2 \end{aligned}$$

On en déduit facilement les fonctions  $f_i(t)$  qu'on ne cherchera pas à développer plus :

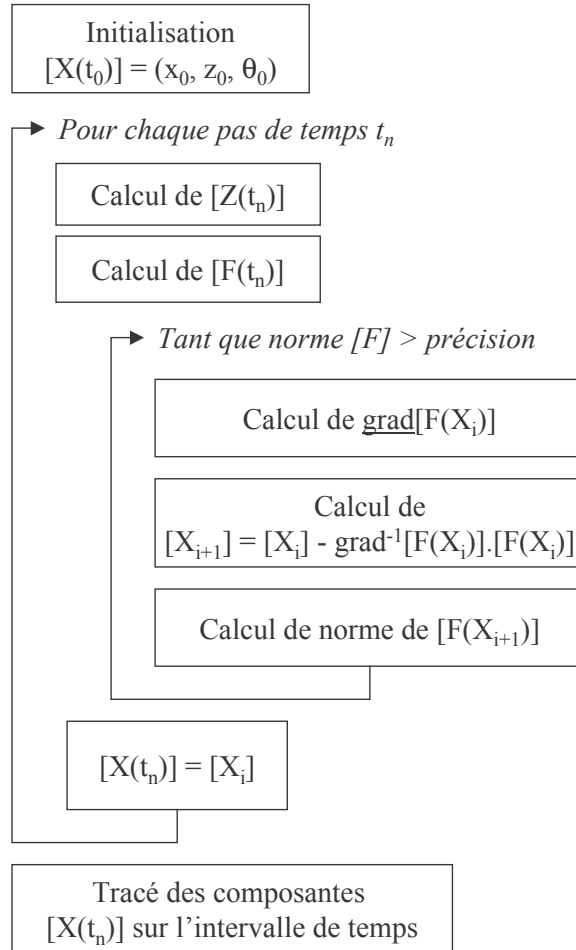
$$\begin{aligned} f_1(x, z, \theta) &= - \left( x + \frac{R_p}{2} \cos \theta - R_s \right)^2 - \left( \frac{\sqrt{3}R_p}{2} \right)^2 - \left( z - \frac{R_p}{2} \sin \theta \right)^2 \\ f_2(x, z, \theta) &= - \left( x - R_p \cos \theta + \frac{R_s}{2} \right)^2 - \left( \frac{\sqrt{3}R_s}{2} \right)^2 - (z + R_p \sin \theta)^2 \\ f_3(x, z, \theta) &= - \left( x + \frac{R_p}{2} \cos \theta + \frac{R_s}{2} \right)^2 - \left( \frac{\sqrt{3}(R_p - R_s)}{2} \right)^2 - \left( z - \frac{R_p}{2} \sin \theta \right)^2 \end{aligned}$$

**Q12.4** L'opérateur  $\text{grad}[F]$  est ici représenté par une matrice 3x3. Les différentes dérivées sont données ci-dessous :

$$\underline{\underline{grad[F]}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{1}{R_p} \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial z} & \frac{1}{R_p} \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial z} & \frac{1}{R_p} \frac{\partial f_3}{\partial \theta} \end{bmatrix} \quad \text{avec :}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= -2 \left( x + \frac{R_p}{2} \cos \theta - R_s \right) \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} &= -2 \left( z - \frac{R_p}{2} \sin \theta \right) \\ \frac{1}{R_p} \frac{\partial f_1}{\partial \theta} &= \sin \theta \left( x + \frac{R_p}{2} \cos \theta - R_s \right) + \cos \theta \left( z - \frac{R_p}{2} \sin \theta \right) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} &= -2 \left( x - R_p \cos \theta + \frac{R_s}{2} \right) \\ \frac{\partial f_2}{\partial z} &= -2 (z + R_p \sin \theta) \\ \frac{1}{R_p} \frac{\partial f_2}{\partial \theta} &= -2 \sin \theta \left( x - R_p \cos \theta + \frac{R_s}{2} \right) + 2 \cos \theta (z + R_p \sin \theta) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} &= -2 \left( x + \frac{R_p}{2} \cos \theta + \frac{R_s}{2} \right) \\ \frac{\partial f_3}{\partial z} &= -2 \left( z - \frac{R_p}{2} \sin \theta \right) \\ \frac{1}{R_p} \frac{\partial f_3}{\partial \theta} &= \sin \theta \left( x + \frac{R_p}{2} \cos \theta + \frac{R_s}{2} \right) + \cos \theta \left( z - \frac{R_p}{2} \sin \theta \right) \end{aligned}$$

On suit donc l'algorithme suivant, déjà présenté sous une forme programmée dans la section 10 :





**Q12.5** On isole le passager, il est uniquement soumis aux actions mécaniques du siège car il y a longtemps, longtemps dans une lointaine, très lointaine galaxie, les effets de la pesanteur terrestre ne se faisaient pas sentir. Le torseur dynamique exprimé en  $G_i$ , pour un solide en translation possède une résultante  $m_i \Gamma$  dirigée suivant  $X$  et c'est tout. Le PFD s'écrit donc :

$$_{G_i} \left\{ \begin{array}{c} m_i \Gamma \vec{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\} = _{G_i} \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_{G_i} \end{array} \right\}$$

La résultante est égale à  $m_i \Gamma$  et dirigée suivant  $x$  qui correspond à l'axe  $x_p$  de la base liée à la plate-forme. Le moment du torseur de liaison est nul en  $G_i$ . Au final, si on note  $X, Y, Z$  et  $L, M, N$  les composantes du torseur de liaison siège  $\rightarrow$  passager dans la base du repère  $R_p$ , on a :

$$\begin{aligned} X &= m_i \Gamma & L &= 0 \\ Y &= 0 & M &= 0 \\ Z &= 0 & N &= 0 \end{aligned}$$

**Q12.6** Dans le simulateur les effets de la pesanteur terrestre sont bien présentes, la forme du torseur des actions du siège est identique à la précédente question : une résultante et un moment. La forme du torseur dynamique, par contre, est très différentes de la précédente. Le calcul de l'accélération d'un point  $M$  situé aux coordonnées  $\alpha, \beta, \gamma$  dans le repère de la plate-forme donne :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O_s M} &= \overrightarrow{O_s O_p} + \overrightarrow{O_p M} = x \cdot \vec{x}_s + z \cdot \vec{z}_s + \alpha \cdot \vec{x}_p + \beta \cdot \vec{y}_p + \gamma \cdot \vec{z}_p \\ &\Downarrow \\ \overrightarrow{V(M / Rs)} &= \frac{d \overrightarrow{O_s M}}{dt} \Big|_{R_s} = \dot{x} \cdot \vec{x}_s + \dot{z} \cdot \vec{z}_s + \dot{\theta} (-\alpha \cdot \vec{z}_p + \gamma \cdot \vec{x}_p) \\ &\Downarrow \\ \overrightarrow{\Gamma(M / Rs)} &= \ddot{x} \cdot \vec{x}_s + \ddot{z} \cdot \vec{z}_s + \ddot{\theta} (-\alpha \cdot \vec{z}_p + \gamma \cdot \vec{x}_p) - \dot{\theta}^2 (\alpha \cdot \vec{x}_p + \gamma \cdot \vec{z}_p) \end{aligned}$$

Le moment dynamique quant à lui, nécessite le calcul du moment cinétique :

$$\overrightarrow{\sigma_{G_i}(passager / Rs)} = I_{G_i} \dot{\theta} \cdot \vec{y}_s$$

On obtient le moment dynamique par dérivation, soit :

$$\overrightarrow{\delta_{G_i}(passager / Rs)} = I_{G_i} \ddot{\theta} \cdot \vec{y}_s$$

Le PFD s'écrit :

$$\begin{aligned} m_i \overrightarrow{\Gamma(G_i / Rs)} &= -m_i g \cdot \vec{z}_s + \vec{R} \\ \overrightarrow{\delta_{G_i}(passager / Rs)} &= \vec{M}_{G_i} \end{aligned}$$

Ce qui donne, en projection sur la base du repère  $R_p$  de la plate-forme :

$$\begin{aligned} X &= m_i (\ddot{x} \cos \theta - \ddot{z} \sin \theta + \gamma_i \ddot{\theta} - \alpha_i \dot{\theta}^2 - g \sin \theta) & L &= 0 \\ Y &= 0 & M &= I_{G_i} \ddot{\theta} \\ Z &= m_i (\ddot{x} \sin \theta + \ddot{z} \cos \theta - \alpha_i \ddot{\theta} - \gamma_i \dot{\theta}^2 + g \cos \theta) & N &= 0 \end{aligned}$$

**Q12.7** En comparant, les expressions de X, Z et M des torseurs des questions 12.5 et 12.6, on tire trois relations à satisfaire si on veut que chaque passager ressente exactement les sensations d'une accélération.

$$m_i \Gamma = m_i (\ddot{x} \cos \theta - \ddot{z} \sin \theta + \gamma_i \ddot{\theta} - \alpha_i \dot{\theta}^2 - g \sin \theta) \quad (1)$$

$$0 = m_i (\ddot{x} \sin \theta + \ddot{z} \cos \theta - \alpha_i \ddot{\theta} - \gamma_i \dot{\theta}^2 + g \cos \theta) \quad (2)$$

$$0 = I_{G_i} \ddot{\theta} \quad (3)$$

La condition (3) impose une faible accélération angulaire, ce qui peut être obtenu en imposant une vitesse angulaire constante  $\omega$ . Si les accélérations suivant x et z sont faibles, les équations (1) et (2) deviennent :

$$\Gamma \approx -\alpha_i \omega^2 - g \sin \theta \quad (1)$$

$$0 = -\gamma_i \omega^2 + g \cos \theta \quad (2)$$

Notons que  $\theta$  est négatif et donc que  $-\sin \theta$  est positif : on a bien la sensation d'une accélération lorsque la cabine penche vers l'arrière. Pour les passagers assis au niveau  $\alpha_i = 0$ , la sensation d'accélération est de :

$$\Gamma = 9,81 \sin 60^\circ = 8,5 \text{ m/s}^2$$

A titre de comparaison, un véhicule qui passe de 0 à 100 km/h en 10 s n'accélère que de  $2,77 \text{ m/s}^2$ . La sensation procurée par l'attraction est donc assez forte. L'équation (1) montre aussi que les passagers assis vers l'avant ( $\alpha_i > 0$ ) vont ressentir une accélération plus faible que ceux assis vers l'arrière de la cabine où le terme  $-\alpha_i \omega^2$  est positif et s'ajoute au poids. Pour que cette différence n'excède pas x% de la sensation moyenne, il faut que :

$$\Delta \alpha_i < x\% \frac{g \sin \theta}{\omega^2} \Rightarrow \omega < \sqrt{x\% \frac{g \sin \theta}{\Delta \alpha_i}}$$

En se plaçant dans la position limite  $\theta = 60^\circ$  et en prenant comme valeur de  $\Delta \alpha_i$  le rayon Rp de la plate-forme, on tire la vitesse angulaire  $\omega$  maximale pour 5% d'écart :

$$\omega_{\text{Max}} = 0.55 \text{ rad/s}$$

Soit un basculement de  $31^\circ$  en une seconde. Pour le basculement arrière de  $60^\circ$ , le temps mis est lisible sur les graphes. Il est d'environ 5 s (voir vérins BK et CJ) : la condition est bien satisfaite.

L'équation (2) ne peut être vérifiée que si :  $\omega^2 = g/\gamma_i \cos \theta$ .  $\gamma_i$  est l'altitude des centres de gravité de chaque passager assis : cette valeur reste très proche d'un passager à l'autre. On peut donc caler l'évolution de  $\omega$  sur la fonction  $\cos \theta$  qui varie. Si cette variation est suffisamment lente, la relation (3) reste approximativement vérifiée.

**Q12.8** On se place cette fois en fin de phase de plongée vers l'avant, les équations précédentes ne sont pas modifiées. Seuls changent les signes des vitesses et des angles. Penché en avant, l'angle  $\theta$  est positif. On s'arrange pour que les vitesses et les accélérations angulaires soient nulles à ce moment et l'effet « choc » est assuré par les décélérations suivants x et z.

La ceinture exerce sur le passager un effort égal à la projection de la résultante sur l'axe Up :

$$\begin{aligned}\vec{u}_p \cdot \vec{R} &= \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Z) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} m_i (\ddot{x}(\sin \theta + \cos \theta) + \ddot{z}(\cos \theta - \sin \theta) + (\gamma_i - \alpha_i) \ddot{\theta} - (\alpha_i + \gamma_i) \dot{\theta}^2 + g(\cos \theta - \sin \theta))\end{aligned}$$

Compte tenu des valeurs numériques, cette projection vaut :

$$\vec{u}_p \cdot \vec{R} = \frac{\sqrt{2}}{2} 90(-4(\sin 40^\circ + \cos 40^\circ) - 2(\cos 40^\circ - \sin 40^\circ) + 10(\cos 40^\circ - \sin 40^\circ)) = 590 \text{ N}$$

Cette valeur est négative car il s'agit de l'action de la ceinture sur le passager. La tension dans la ceinture au niveau des attaches est égale à la moitié de la valeur absolue de 590 N (en supposant que le passager est positionné symétriquement par rapport aux deux points d'ancrage de la ceinture) :  $T_u = 295 \text{ N}$

## Partie 2 : Mécanique des solides déformables (corrigé)

### Section 21 : Raideur d'un portique simplifié

**Q21.1** Aire :  $S = a^2 - (a - 2e)^2 = 4e(a - e) \cong 4ae = 416 \text{ mm}^2$

Moment quadratique :  $I_{Gz} = \frac{a^4}{12} - \frac{(a - 2e)^4}{12} = \frac{2a^3e}{3} - \frac{a^2e^2}{2} + \frac{8ae^3}{3} - \frac{4e^4}{3} \cong \frac{2a^3e}{3} = 11,09 \text{ cm}^4$

**Q21.2** Il s'agit d'un problème statique, la mobilité est nulle :  $m = 0$ . Le nombre d'équations issues du PFS pour ce problème plan est :  $E_s = 3$ . Le nombre d'inconnues statiques est :  $I_s = 3 \times 2 = 6$  (3 par encastrement)  $\rightarrow$  Le degré d'hyperstatisme est :  $h = 3$ .

**Q21.3** Structure encastree en A, soumise au chargement en B (F) et en D (X, Y et M). En restant dans le domaine élastique, la sollicitation interne résultante de ce chargement est la superposition des sollicitations internes résultant de F, de X, de Y et de M.

Tronçon AB : abscisse curviligne s telle que  $s = 0$  en A et  $s = h$  en B

Tronçon BC : abscisse curviligne s telle que  $s = h$  en B et  $s = h+b$  en C

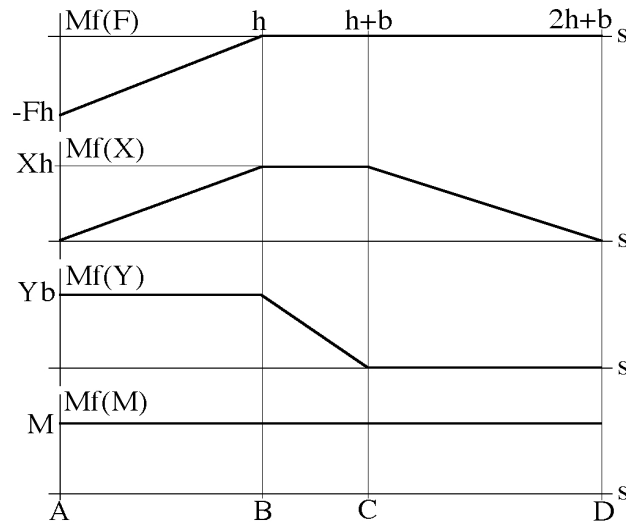
Tronçon CD : abscisse curviligne s telle que  $s = h+b$  en C et  $s = 2h+b$  en D

Le tableau ci-dessous présente les sollicitations internes générées par chacune des sollicitations externes en A, B, C, D et le long des 3 tronçons AB, BC et CD : 1<sup>ère</sup> ligne = effort normal ; 2<sup>ème</sup> ligne = effort tranchant ; 3<sup>ème</sup> ligne = moment fléchissant

	A	AB	B	BC	C	CD	D
F	0	0		0		0	0
	-F	-F		0		0	0
	-Fh	F(s-h)	0	0	0	0	0
X	0	0		X		0	0
	-X	-X		0		X	X
	0	Xs	Xh	Xh	Xh	X(2h+b-s)	0
Y	Y	Y		0		0	0
	0	0		Y		0	0
	Yb	Yb	Yb	Y(h+b-s)	0	0	0

	0	0	0	0	0	0	0
M	0	0	0	0	0	0	0
	M	M	M	M	M	M	M

Les diagrammes de moments fléchissants sont donc les suivants :



**Q21.4** En supposant que l'effet du moment fléchissant est prépondérant, l'énergie de déformation élastique s'écrit :

$$W_{def} = \frac{1}{2} \int_0^{2h+b} \frac{Mf^2}{EI_{Gz}} ds$$

$$= \frac{1}{2EI_{Gz}} \left[ \int_0^h (F(s-h) + Xs + Yb + M)^2 ds + \int_h^{h+b} (Xh + Y(h+b-s) + M)^2 ds + \int_{h+b}^{2h+b} (X(2h+b-s) + M)^2 ds \right]$$

Le déplacement horizontal en B est donné par :  $u_B = \frac{\partial W_{def}}{\partial F} = \frac{h^2}{6EI_{Gz}} (2Fh - Xh - 3Yb - 3M)$

L'encastrement en D permet d'écrire :  $\frac{\partial W_{def}}{\partial X} = 0$  ;  $\frac{\partial W_{def}}{\partial Y} = 0$  et  $\frac{\partial W_{def}}{\partial M} = 0$

Pour déterminer les actions d'encastrement, il faut résoudre le système 3x3 suivant :

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{3}h^3 + 2bh^2 & bh^2 + hb^2 & 2h^2 + 2bh \\ bh^2 + hb^2 & 2hb^2 + \frac{2}{3}b^3 & 2hb + b^2 \\ 2h^2 + 2bh & 2hb + b^2 & 4h + 2b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Fh^3}{3} \\ Fbh^2 \\ Fh^2 \end{bmatrix}$$

Soit à résoudre :

$$\begin{bmatrix} 20,29 & 5,67 & 12,60 \\ 5,67 & 3,89 & 4,59 \\ 12,60 & 4,59 & 10,20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 308,7 \\ 396,9 \\ 441 \end{bmatrix}$$

ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2118 & 0 & -0,2616 \\ 0 & 0,5487 & -0,2469 \\ -0,2616 & -0,2469 & 0,5324 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 308,7 \\ 396,9 \\ 441 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50 \\ 109 \\ 56 \end{bmatrix}$$

**Q21.5** Le déplacement horizontal du point B vaut ici 2,42 mm. La raideur du portique vaut donc 41320 N/m.

**Q21.6** Les diagrammes du moment fléchissant montrent que celui-ci évolue linéairement le long du portique. Le maximum est donc atteint en A (-56 Nm), en B (49 Nm), en C (-49 Nm) ou en D (56 Nm). Le maximum est atteint en A ou D et vaut 56 Nm. Néanmoins les liaisons avec le sol sont renforcées ce qui n'est pas le cas des angles en B et C, c'est la raison pour laquelle l'étude se poursuit sur l'étude de l'angle en B.

## Section 22 : Tenue du chambranle d'une porte d'accès à l'attraction

**Q22.1** L'expression de la contrainte de Von Mises en contraintes planes dans le plan xy est la suivante :

$$\sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2))} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}^2 + 3\sigma_{xy}^2}$$

La contrainte équivalente de Von Mises au nœud 265 vaut donc 120 MPa.

**Q22.2** La contrainte équivalente de Von Mises n'est pas une forme linéaire des contraintes qui la constitue. La superposition des contraintes de Von Mises n'est donc pas possible. Il faut superposer les états de contraintes, et calculer la contrainte équivalente de Von Mises de ce nouvel état :

$$\begin{bmatrix} 70 & 50 & 0 \\ 50 & 90 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 100 & 90 & 0 \\ 90 & 95 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 170 & 140 & 0 \\ 140 & 185 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

soit une contrainte équivalente de Von Mises de 300 MPa.

**Q22.3** Les contraintes principales sont les valeurs propres de la matrice des contraintes.

$$\begin{vmatrix} 170 - \lambda & 140 & 0 \\ 140 & 185 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{soit } \sigma_I = 37 \text{ MPa}, \sigma_{II} = 318 \text{ MPa et } \sigma_{III} = 0 \text{ MPa.}$$

Les directions principales sont les vecteurs propres associés aux valeurs propres.

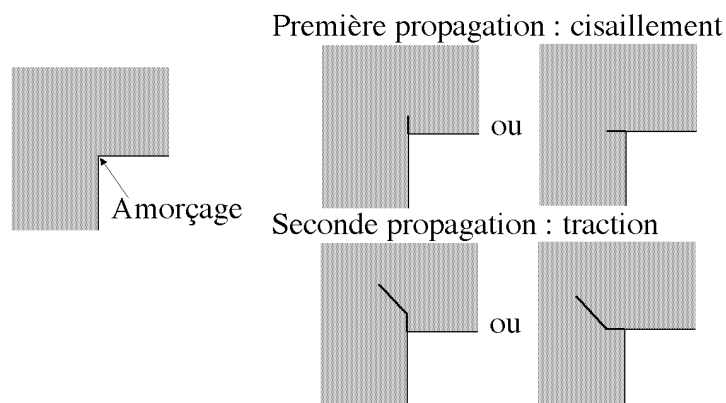
$$\text{Pour } \sigma_I, \begin{bmatrix} 133 & 140 & 0 \\ 140 & 148 & 0 \\ 0 & 0 & -37 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{donne } e_1 = -1,05 e_2 \text{ et } e_3 = 0, \text{ soit } \begin{bmatrix} -0,72 \\ 0,69 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Pour } \sigma_{II}, \begin{bmatrix} -148 & 140 & 0 \\ 140 & -133 & 0 \\ 0 & 0 & -318 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{donne } e_1 = 0,95 e_2 \text{ et } e_3 = 0, \text{ soit } \begin{bmatrix} 0,69 \\ 0,72 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Pour } \sigma_{III}, \begin{bmatrix} 170 & 140 & 0 \\ 140 & 185 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{donne } e_1 = 0 \text{ et } e_2 = 0, \text{ soit } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Le nœud 265 est situé sur le bord libre, au niveau du milieu du congé de raccordement. Le vecteur contrainte suivant la normale au bord libre est théoriquement nulle. Cette normale correspond ici globalement à la première direction principale, et la première contrainte principale est bien quasiment nulle (le dixième de la contrainte maximale).

**Q22.4** L'amorçage de la fissure aura lieu dans la zone la plus sollicitée, soit au voisinage du nœud 265. Les plans de cisaillement maximum dans cette zone sont situés à  $\pm 45^\circ$  des directions principales, qui sont ici sensiblement à  $\pm 45^\circ$  des directions x et y du portique (figure ci-dessous). Les plans de cisaillement maximum correspondent donc aux directions x et y du portique, et s'est suivant ces plans que les fissures vont commencer à se propager. Le plan de traction maximum dans cette zone est perpendiculaire à la direction principale correspondant à la traction maximum ( $\sigma_{II}$ ), soit ici à  $+45^\circ$  de la direction y.



## Partie 3 : Mécanique des fluides (corrigé)

### Section 31 : Mise en équation du vérin de pilotage.

**Q31.1** Lorsque le simulateur est au repos, les forces en présence sont le poids de la tige et du piston du vérin, la force exercée sur la tige qui résulte du poids de la plate-forme, les actions de pression sur les deux faces du piston. Le frottement peut être négligé en première approche. L'écriture du PFS donne :

$$p_1.S_1 - p_2.S_2 - mg.\sin \alpha - F = 0$$

avec :  $F = Mg.\sin \alpha$  ;  $S_1 = \pi D_1^2/4$  ;  $S_2 = \pi(D_1^2 - D_2^2)/4$

On peut supposer que la pression  $p_2$  est sensiblement la pression atmosphérique (lors de la mise en position de la plate-forme, la chambre supérieure communique avec le réservoir du groupe hydraulique à la pression atmosphérique).

$$\text{D'où } p_1 = (p_2.S_2 + (M+m).g.\sin \alpha)/S_1$$

$$\text{A.N. } p_1 = 74,47 \text{ bar}$$

**Q31.2** Lorsque le simulateur est en fonctionnement, le débit de fuite entre les deux chambres crée un frottement fluide s'opposant au déplacement du piston. La vitesse du piston étant supposée constante, on néglige les quantités d'accélération.

Pour un mouvement ascendant, on a :

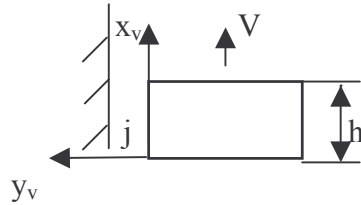
$$p_1.S_1 - p_2.S_2 - mg.\sin \alpha - F - F_f = 0$$



Pour un mouvement descendant, on a :

$$p_1.S_1 - p_2.S_2 - mg.\sin \alpha - F + F_f = 0$$

**Q31.3** On s'intéresse à l'écoulement entre les deux chambres résultant du jeu  $j$ . Le problème est modélisable de la façon suivante :



Les parois cylindriques sont assimilées à deux plaques parallèles, de largeur  $\pi.D_1$ , de hauteur  $h$  distantes de  $j$ . On utilise les équations de Navier-Stokes et l'équation de continuité. On établit l'équation donnant l'allure générale du profil des vitesses, puis on particularise le problème grâce aux conditions aux limites.

$$\text{On a : } \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{f} - \overrightarrow{\text{grad}} p + \mu \Delta \vec{v}$$

avec :  $\vec{f} = \vec{0}$  (on néglige les effets des actions de pesanteur sur l'huile)

$$\overrightarrow{\text{grad}} p = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x_v} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \Delta \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 v_{x_v}}{\partial y_v^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où : } \mu \frac{\partial^2 v_{x_v}}{\partial y_v^2} = \frac{\partial p}{\partial x_v}$$

Avec les conditions limites suivantes :  $y_v = 0$ ,  $v_{xv} = V$  et  $y_v = j$ ,  $v_{xv} = 0$   
on obtient :

$$\frac{\partial p}{\partial x_v} = \frac{p_2 - p_1}{h} \quad \text{et} \quad v_{xv} = \frac{p_2 - p_1}{2\mu.h} \cdot (y_v^2 - y_v.j) - \frac{V}{j} \cdot y_v + V$$

**Q31.4** Par intégration du champ des vitesses à travers la section de passage de l'huile, on trouve le débit de fuite  $Q_f$ . On a :

$$Q_f = \int_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad \text{avec } dS = \pi D_1 \cdot dy_v \quad \text{et} \quad \vec{v} \cdot \vec{n} = v_{xv}$$

Ce qui implique :

$$Q_f = \pi D_1 \cdot \left( \frac{p_1 - p_2}{12\mu.h} \cdot j^3 + \frac{V \cdot j}{2} \right)$$

**A.N. :**  $Q_f = 3,48.10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$

**Q31.5** La force de frottement  $F_f$  est le produit de la contrainte de viscosité au niveau du piston par la surface de celui-ci.

$$\text{On a : } \vec{F}_f = -\pi D_1 . h . \mu . \left( \frac{\partial v_{xv}}{\partial y_v} \right)_{y_v=0} . \vec{x}_v \rightarrow \vec{F}_f = -\pi D_1 . ((p_1 - p_2) . \frac{j}{2} - \frac{V . h . \mu}{j}) . \vec{x}_v$$

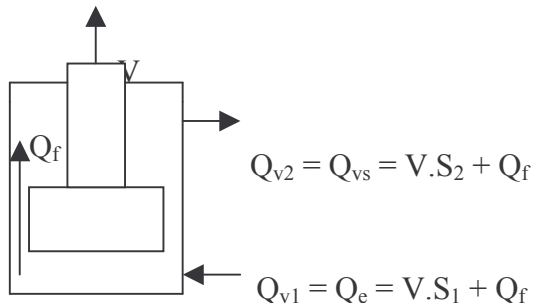
**A.N. :**  $\vec{F}_f = -29,23 \vec{x}_v$

**Q31.6** La force F étant identique que la plate-forme monte ou descende ,  $p_1$  est supérieure à  $p_2$  (la différence de pression  $p_1 - p_2$  est pratiquement identique). L'analyse de la relation donnant le débit de fuite  $Q_f$  montre :

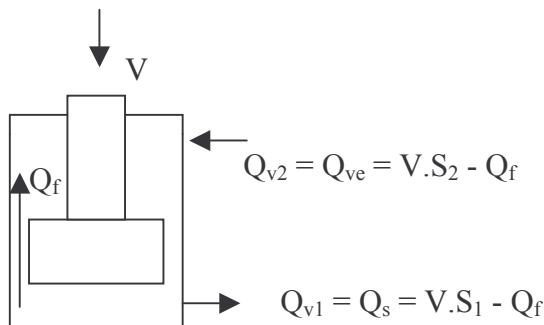
- qu'il est presque identique que la plate-forme monte ou descende
- qu'il va toujours de la chambre inférieure vers la chambre supérieure.

### Etablissement des relations donnant les débits :

#### Cas d'un mouvement ascendant



#### Cas d'un mouvement descendant



**Q31.7** Les différents organes de réglage et composants de l'installation sont modélisables par des singularités et des longueurs droites en série. Pour un écoulement turbulent, les différentes pertes de charge (et également la somme) sont proportionnelles à la vitesse au carré. Or  $v = Q_v/S$ , donc finalement  $\Delta p = K.Q_v^2$  avec K en  $\text{Pa.s}^2/\text{m}^6$  ou  $\text{kg}/\text{m}^7$ .

**Q31.8** L'expression générale des pertes de charge linéaires  $\Delta p_{\text{lin}}$  est :

$$\Delta p_{\text{lin}} = \lambda . l / d . \rho v^2 / 2$$

avec  $v$  : vitesse dans la conduite de section S. Comme  $v = Q_v/S$ , on peut écrire :

$$\Delta p_{\text{lin}} = \lambda . l / d . \rho Q_v^2 / (2 . S^2)$$

**Nota :** Pour évaluer  $\lambda$ , il faut déterminer le régime de l'écoulement.

**Q31.9** On applique le théorème de Bernoulli généralisé entre 1 point dans la chambre supérieure et 1 point à la sortie de l'huile dans le réservoir du groupe hydraulique.

On néglige les actions de pesanteur pour l'huile et les pertes de charge singulières autres que celles des composants de l'installation. L'énergie cinétique de l'huile dans la chambre supérieure est négligeable et l'huile débouche dans le réservoir à la pression atmosphérique.

On a :

$$p_2 = \Sigma(\Delta p_{lin} + \Delta p_{sing}) = (\lambda_1 \cdot (l_3 + l_4)/d \cdot \rho / (2 \cdot S^2) + K_{d2}) \cdot Q_v^2$$

**A.N. :**  $Q_{v2} = V \cdot S_2 = V \cdot \pi (D_1^2 - D_2^2)/4 = 0,189 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$  ;  $v_2 = 1,228 \text{ m/s}$  ;

$Re_2 = 1290$  (régime laminaire) d'où  $\lambda = 64/Re_2$  ;  $p_2 = 2,03 \text{ bar}$ .

**Q31.10** On applique le théorème de Bernoulli généralisé entre 1 point à la sortie de la pompe et 1 point au débouché de la conduite dans la chambre inférieure du vérin. Comme précédemment on néglige les effets de la pesanteur sur l'huile.

On a :

$$p_3 = p_1 + \Sigma(\Delta p_{lin} + \Delta p_{sing}) = p_1 + (\lambda_1 \cdot (l_1 + l_2)/d \cdot \rho / (2 \cdot S^2) + K_{d1} + K_{c1} + K_{l1}) \cdot Q_v^2$$

Il faut calculer  $p_1$  et les pertes de charges

Pour calculer  $p_1$ , on utilise la relation établie à la question 31.2 en négligeant  $F_f$ .

**A.N. :**  $p_1 = 75,6 \text{ bar}$

$Q_{v1} = V \cdot S_1 = V \cdot \pi D_1^2/4 = 0,393 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$  ;  $v_1 = 2,55 \text{ m/s}$  ;

$Re_1 = 2678$  (régime turbulent) d'où  $\lambda = 0,316 \cdot Re_1^{-0,25} = 0,0439$  ;

$\Sigma(\Delta p_{lin} + \Delta p_{sing}) = 4,8 \text{ bar}$  ;  $p_3 = 80,4 \text{ bar}$

## **Section 32 : Etude du fonctionnement de la pompe à palettes à l'aide de groupements sans dimension.**

**Q32.1** Pour obtenir les différents groupements sans dimension, on utilise la méthode de Rayleigh. On effectue dans un premier temps l'inventaire des variables dimensionnées intervenant dans le problème. Cette analyse s'appuie sur l'expérience.

Dans le cas des pompes à palettes, l'énoncé du problème suggère les variables suivantes : la puissance absorbée  $P_{abs}$ , le débit  $Q_{vp}$ , la vitesse de rotation  $n$ , la cylindrée  $Cyl$ , la différence de pression entre l'entrée et la sortie  $\Delta p$ , la masse volumique de l'huile  $\rho$ .

On exprime chaque variable en fonction d'un système d'unités fondamentales. En dynamique des fluides, les unités fondamentales retenues sont la masse  $M$ , la longueur  $L$  et le temps  $T$ .

Si une relation existe entre les variables, elle peut avoir la forme suivante :

$$P_{abs} = K \cdot Q_v^a \cdot \Delta p^b \cdot Cyl^c \cdot n^d \cdot \rho^e$$

On traduit l'homogénéité dimensionnelle de la relation pour les 3 unités fondamentales. On trouve :

$$P_{abs} = K \cdot \Delta p \cdot Cyl \cdot n \left( \frac{Q_v}{Cyl \cdot n} \right)^a \left( \frac{\rho \cdot Cyl^{2/3} \cdot n^2}{\Delta p} \right)^e$$

On voit apparaître les 3 groupements sans dimension :

$$\Pi_1 = \frac{\Delta p}{\rho \cdot Cyl^{2/3} \cdot n^2} \text{ avec } \Pi_1 : \text{Coefficient de pression}$$

$$\Pi_2 = \frac{Q_{vp}}{Cyl \cdot n} \text{ avec } \Pi_2 = \eta_{vol} : \text{Rendement volumétrique de la pompe}$$

$$\Pi_3 = \frac{Cyl \cdot n \cdot \Delta p}{P_{abs}} \text{ avec } \Pi_3 = \eta_{méca} : \text{Rendement mécanique de la pompe}$$

Le théorème de Vaschy-Buckingham permet de prévoir le nombre de groupements sans dimension. Pour un problème comportant n variables indépendantes et p unités fondamentales, on obtient n-p groupements sans dimension.

**Q32.2** L'utilisation des groupements sans dimension permet, connaissant les caractéristiques d'une pompe:

- de prévoir comment les caractéristiques de la pompe vont évoluer lorsqu'on modifie 1 ou plusieurs paramètres de fonctionnement (ex: n,  $\Delta p$ ,  $\rho$ ).
- de prévoir les caractéristiques d'une pompe géométrique semblable.

La démarche à suivre pour trouver le point de fonctionnement est la suivante : connaissant la cylindrée,  $\Delta p$ ,  $\rho$  et n, on calcule  $\pi_1$ . Sur les courbes caractéristiques, on relève  $\eta_{vol}$  et  $\eta_{méca}$ . On en déduit la puissance absorbée et le débit d'huile  $Q_{vp}$ .

Application à l'installation :

$$Cyl = 0,019 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} ; n = 24,16 \text{ tr/s} ; \Delta p = 80 \cdot 10^5 \text{ Pa} ; \rho = 900 \text{ kg/m}^3$$

**A.N. :**  $\pi_1 = 21\,387$  ;  $\eta_{vol} = 0,95$  ;  $\eta_{méca} = 0,85$

$$P_{abs} = 4320 \text{ W} ; Q_{vp} = 0,413 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} \text{ ( 24,78 L/mn )}$$

**Q32.3** La cylindrée et la vitesse de rotation sont différentes.

$$\text{On calcule } \pi'_1 = \pi_1 \cdot (1/2^{2/3}) \cdot (1/(1,05^2)) = 0,5714 \cdot \pi_1 = 12\,220.$$

Avec la même méthode qu'en Q32.2, on trouve :

$$\eta_{vol} = 0,97 ; \eta_{méca} = 0,79$$

$$P_{abs} = 9761 \text{ W} ; Q_{vp} = 0,935 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} \text{ ( 56,1 L/mn )}$$

### **Section 33: Etude des effets thermiques associés au pilotage de la plate-forme.**

**Q33.1** L'échauffement de l'huile est beaucoup plus important à la descente dont le contrôle nécessite la création d'une perte de charge importante au niveau du limiteur de débit.

**Q33.2** La puissance thermique créée a deux origines principales : les pertes de charge et les frottements mécaniques au niveau de la pompe.

La puissance thermique  $P_{th}$  créée par des pertes de charge  $\Delta p$  est  $P_{th} = \Delta p \cdot Q_v$ . Il est nécessaire d'analyser la manière dont les débits se répartissent lors de la descente du vérin et les chutes de pression.

Soit  $Q_{vp}$  le débit de la pompe,  $Q_{v2}$  le débit entrant dans la chambre supérieure du vérin,  $Q_{v1}$  le débit sortant de la chambre inférieure du vérin,  $Q_{vlim}$  le débit traversant le limiteur de débit. En négligeant le débit de fuite au niveau du piston du vérin, on a :

$$Q_{v2} = V \cdot \pi (D_1^2 - D_2^2) / 4 \quad ; \quad Q_{v1} = V \cdot \pi D_1^2 / 4 \quad ;$$

$$Q_{vlim} = Q_{vp} - Q_{v2} = Q_{vp} - V \cdot \pi (D_1^2 - D_2^2) / 4$$

Lorsque le limiteur de pression s'ouvre, la pression au refoulement de la pompe est égale à la pression de réglage du limiteur de pression. Les expressions des chutes de pression dans les différentes parties de l'installation sont :

Entre l'entrée du limiteur de pression et le réservoir :  $p_{lim} - p_{atm}$

Entre la sortie de la pompe et l'entrée de l'huile dans le vérin :  $p_{lim} - p_2$

Entre la sortie du vérin et le réservoir d'huile :  $p_1 - p_{atm}$

**Nota:** En pression relative,  $p_{atm} = 0$

Les expressions des chutes de pression peuvent être établies en se référant à la démarche de la section 31.

La puissance thermique  $P_{th1}$  créée par les pertes de charge est :

$$P_{th1} = (p_{lim} - p_{atm}) \cdot Q_{vlim} + (p_{lim} - p_2) \cdot Q_{v2} + (p_1 - p_{atm}) \cdot Q_{v1}$$

Le rendement mécanique  $\eta_p$  d'une pompe est défini par :  $\eta_p = P_{hydraulique} / P_{mécanique}$

La puissance hydraulique est égale à :  $P_{hydraulique} = (p_{lim} - p_{atm}) \cdot Q_{vp}$

La puissance mécanique transformée en chaleur est :  $P_{th2} = P_{mécanique} - P_{hydraulique}$

$$= P_{hydraulique} \cdot (1/\eta_p - 1)$$

D'où :  $P_{th2} = (p_{lim} - p_{atm}) \cdot Q_{vp} \cdot (1/\eta_p - 1)$

La puissance thermique totale  $P_{th} = P_{th1} + P_{th2}$

**Q33.3** L'analyse des équations montre qu'on peut diminuer les pertes thermiques en réduisant ou supprimant le débit traversant le limiteur de pression. Il faut dans ce cas utiliser une pompe à débit variable.

**Q33.4** On effectue un bilan thermique. La puissance thermique créée est :

- échangée par les composants et les conduites
- stockée dans l'huile sous forme de chaleur.

On a :  $P_{thm} = \sum K_i \cdot S_i \cdot (\theta - \theta_a) + \rho \cdot c_h \cdot V_h \cdot d\theta / dt$

L'intégration de cette équation différentielle permet de trouver le temps  $t$  nécessaire pour que la température de l'huile augmente d'une température initiale  $\theta_1$  jusqu'à une température finale  $\theta_2$ .

$$\text{On a : } t = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\rho \cdot c_h \cdot V_h \cdot d\theta}{P_{thm} - \sum K_i \cdot S_i (\theta - \theta_a)}$$

$$\Rightarrow \theta_2 = \theta_a + \frac{P_{thm}}{\sum K_i \cdot S_i} \left( 1 - e^{\frac{-\sum K_i S_i}{\rho \cdot c_h \cdot V_h} t} \right) + (\theta_2 - \theta_1) \cdot e^{\frac{-\sum K_i S_i}{\rho \cdot c_h \cdot V_h} t}$$