

CONCOURS INTERNE DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS AGRÉGÉS

SESSION 2004

ELEMENTS DE CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MECANIQUE

1. Etude énergétique et technologique globale.

Questions :

- 1- 1** Détermination de la puissance moyenne du moteur P_{moteur} nécessaire pour mouvoir le véhicule à 25 km/h de moyenne.

La puissance du moteur sert à vaincre les seules forces qui travaillent qui sont les forces de résistance à l'avancement, donc : $P_{\text{moteur}} \cdot h_T = V_{\text{Moy}} \cdot (1/2 \cdot r_{\text{AIR}} \cdot S \cdot C_x \cdot V^2 + K_R \cdot m_T \cdot g)$.

$$\text{Soit : } P_{\text{moteur}} = 1/h_T \cdot (1/2 \cdot r_{\text{AIR}} \cdot S \cdot C_x \cdot V_{\text{Moy}}^3 + K_R \cdot m_T \cdot g \cdot V_{\text{Moy}}).$$

- 1- 2** Application numérique.

$$P_{\text{moteur}} = 1/0,87 \cdot (1/2 \cdot 1,19 \cdot 0,29 \cdot 0,12 (25/3,6)^3 + 1,36/1000 \cdot (28+48) \cdot 9,81 \cdot (25/3,6)) = 1/0,87 \cdot (6,93 + 7,04) \\ P_{\text{moteur}} = 16 \text{ W}$$

- 1- 3** Détermination analytique de la distance maximale théorique D_{Max} que peut parcourir le véhicule avec un litre d'essence à 25 km/h de moyenne.

La conservation de l'énergie suppose que : $P_{\text{cal}} \cdot d \cdot h_{\text{TH}} \cdot h_T = (F_A + F_R) \cdot D_{\text{Max}}$

$$\text{d'où : } D_{\text{Max}} = P_{\text{cal}} \cdot d \cdot h_{\text{TH}} \cdot h_T / (1/2 \cdot r_{\text{AIR}} \cdot S \cdot C_x \cdot V_{\text{Moy}}^2 + K_R \cdot m_T \cdot g).$$

- 1- 4** Application numérique.

Réponse : $D_{\text{Max}} = 42700 \cdot 10^3 \cdot 0,74 \cdot 0,33 \cdot 0,87 / (1/2 \cdot 1,19 \cdot 0,29 \cdot 0,12 (25/3,6)^2 + 1,36/1000 \cdot (28+48) \cdot 9,81) = 9071,78 \cdot 10^3 / (0,998 + 1,01) = 4517 \cdot 10^3 \text{ m}$. Soit une distance maxi théorique d'environ 4500 km ! Il faut toutefois noter que les terrains ne sont jamais parfaitement plats, que les virages existent et que la moyenne parfaite de 25 km/h est illusoire et que tout dépassement engendra une dépense énergétique supérieure.

- 1- 5** La puissance moyenne obtenue question 1- 2 conduirait à installer un moteur de très petite cylindrée (environ 5 cm³) fonctionnant en continu. Or ce type de moteur présente des difficultés techniques de réalisation et des rendements thermodynamiques plus faibles que les moteurs de cylindrée supérieure (à cause des surfaces d'échanges thermiques proportionnellement plus grandes et de l'importance relative des fuites par la coupe aux segments). De ce fait, la cylindrée du moteur installé est d'environ 30 cm³ et sa puissance est de l'ordre de 350 W. Le moteur fonctionnera donc par intermittence moins de 5 % du temps. Le faible temps de

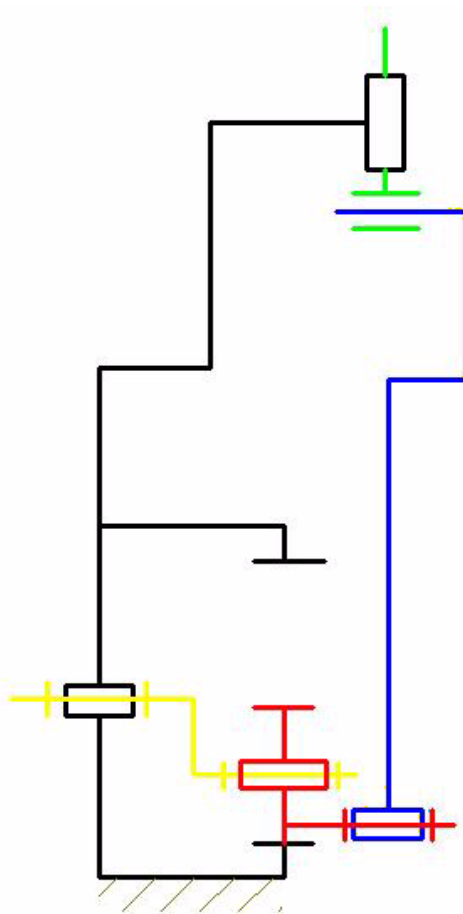
fonctionnement obtenu fait que le cylindre aura le temps de refroidir ce qui est nuisible au rendement thermodynamique du moteur. La solution adoptée (cf Document DT2) consiste à enfermer une petite quantité d'eau autour du cylindre afin de permettre sa vaporisation. Expliquer succinctement pourquoi cette solution permet de minimiser les échanges thermiques et la masse de l'ensemble.

Il ne faut pas que le moteur soit trop chaud pour un bon fonctionnement et un refroidissement reste nécessaire. Lors de la vaporisation, l'eau va emmagasiner une quantité de chaleur qui correspond à sa chaleur latente de changement d'état et qui sera évacuée vers l'extérieur sous cette forme. Les échanges thermiques dans le sens du refroidissement seront donc minimisés car le moteur est calorifugé et il n'y pas d'ailettes comme dans un moteur thermique classique. Cette technique originale et astucieuse permet de "garder le moteur chaud" tout en minimisant la masse. A la fin de la course, il ne doit théoriquement plus rester d'eau.

- 1- 6** Indiquer le travail supplémentaire W_{Supp} qu'il est possible de récupérer par rapport à un cycle classique et expliquer de manière concise pourquoi le moteur à détente prolongée permet une consommation inférieure.

Le travail supplémentaire correspond à l'aire ADEF. Le travail récupéré étant supérieur, le rendement est amélioré (de 0,28 à 0,33) et la consommation d'essence peut être diminuée.

- 1- 7** Réaliser le schéma cinématique de l'équipage mobile dans son carter.



- 1- 8** Déterminer et calculer numériquement le rapport de détente prolongée r_{DP} entre les volumes "PMB Haut" et "PMB bas". On donne $a = 10,5$ mm et $e = 4,5$ mm. A t-on intérêt à augmenter ou diminuer ce rapport ?

Au stade de l'étude, on peut admettre que le rapport de détente prolongée vaut : $r_{DP} = \frac{a+e}{a-e} = 2,5$. Du point de vue thermodynamique, il est théoriquement intéressant d'augmenter le rapport pour maximiser le rendement. Toutefois au-delà d'un certain point l'apport devient plus faible. De même du point de vue technologique, on se heurte à des impossibilités. En fait $r_{DP} = 2,5$ représente un bon compromis.

2. Étude cinématique et dynamique.

- 2- 1** Déterminer l'expression des coordonnées du centre de la tête de bielle T (x_T, y_T, z_T) dans R_0 en fonction de a, e, h, α et θ .

$\vec{O_0T} = a \cdot \vec{x_1} + e \cdot \vec{x_2} + h \cdot \vec{z_0}$, Il vient immédiatement que :

$$\begin{aligned}x_T &= a \cdot \cos\theta + e \cdot \cos(\alpha+\theta) \\y_T &= a \cdot \sin\theta + e \cdot \sin(\alpha+\theta) \\z_T &= h\end{aligned}$$

- 2- 2** On pose $\alpha = \alpha_0 + k \cdot \theta$ où α_0 est l'angle de calage et k est un réel. On supposera dans cette question que $\alpha_0 = 0$. Déterminer en supposant que le pignon 2 roule sans glisser sur la couronne 4, deux relations liant R, r, a et k . Puis exprimer R et r en fonction de a et k et le rapport R/r en fonction de k seulement.

La première relation est géométrique : $r + a = R(1)$; la deuxième est issue de l'hypothèse de roulement sans glissement : $r \cdot \alpha = -R \cdot \theta(2)$. Le rapport vaut : $-\frac{R}{r} = k$. Il vient : $r = \frac{-a}{1+k}$ et $R = a \cdot \frac{k}{1+k}$. Ces relations montrent que la géométrie de l'embellage dépend directement du rapport k .

- 2- 3** Indiquer en justifiant votre réponse le bon angle de calage.

Il faut caler à 90° car on a deux PMB différents (à 0° , on a deux PMH et donc pas de détente prolongée!).

- 2- 4** Déterminer de manière analytique la position $x(\theta, \alpha)$ du centre du pied de bielle P et donc du piston en fonction de e, L, a, α et θ . Le calage de l'équipage mobile est tel que pour $\theta = 0$:

$$x(0, \alpha_0) = a + e \cdot \cos\alpha_0 + \sqrt{L^2 - (e \cdot \sin\alpha_0)^2}$$

On écrit que la bielle a une longueur constante dans le plan $z_0 = h$: $L^2 = (x - x_T)^2 + y_T^2$. Soit :

$$L^2 = (x - (a \cdot \cos\theta + e \cdot \cos(\theta+\alpha)))^2 + (a \cdot \sin\theta + e \cdot \sin(\theta+\alpha))^2,$$

$$d'où : (x - (a \cdot \cos\theta + e \cdot \cos(\theta+\alpha)))^2 = L^2 - (a \cdot \sin\theta + e \cdot \sin(\theta+\alpha))^2$$

$$\text{Soit : } x - (a \cdot \cos\theta + e \cdot \cos(\theta+\alpha)) = \pm \sqrt{L^2 - (a \cdot \sin\theta + e \cdot \sin(\theta+\alpha))^2}^{1/2}$$

$$\text{et : } x = a \cdot \cos\theta + e \cdot \cos(\theta+\alpha) \pm \sqrt{L^2 - (a \cdot \sin\theta + e \cdot \sin(\theta+\alpha))^2}^{1/2}$$

La condition de calage permet d'identifier le signe + et on a finalement :

$$x = a \cdot \cos\theta + e \cdot \cos(\theta + \alpha) + \sqrt{L^2 - (a \cdot \sin\theta + e \cdot \sin(\theta + \alpha))^2}$$

2- 5 En déduire les expressions de la vitesse $\dot{x}(\theta, \alpha)$ et de l'accélération $\ddot{x}(\theta, \alpha)$ du centre du pied de bielle P et donc du piston. On supposera pour cette question que le régime de rotation du moteur est constant ($\dot{\theta} = \text{cste}$).

Pour le calcul de la vitesse, on a :

$$\dot{x} = -a \cdot \dot{\theta} \cdot \sin\theta - e \cdot (\alpha + \dot{\theta}) \cdot \sin(\alpha + \theta) + \frac{(L^2 - (a \cdot \sin\theta + e \cdot \sin(\alpha + \theta))^2)'}{2 \cdot \sqrt{L^2 - (a \cdot \sin\theta + e \cdot \sin(\alpha + \theta))^2}}$$

Soit :

$$\dot{x} = -a \cdot \dot{\theta} \cdot \sin\theta - e \cdot (\alpha + \dot{\theta}) \cdot \sin(\alpha + \theta) + \frac{-(a \cdot \sin\theta + e \cdot \sin(\alpha + \theta)) \cdot (a \cdot \dot{\theta} \cdot \cos\theta + e \cdot (\alpha + \dot{\theta}) \cdot \cos(\alpha + \theta))}{\sqrt{L^2 - (a \cdot \sin\theta + e \cdot \sin(\alpha + \theta))^2}}$$

Pour le calcul de l'accélération, on a :

$$\ddot{x} = -a \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos\theta - e \cdot (\alpha + \dot{\theta})^2 \cdot \cos(\alpha + \theta) + \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \quad (\ddot{\theta} = 0)$$

avec $u = -(a \cdot \sin\theta + e \cdot \sin(\alpha + \theta)) \cdot (a \cdot \dot{\theta} \cdot \cos\theta + e \cdot (\alpha + \dot{\theta}) \cdot \cos(\alpha + \theta))$;

$$v = \sqrt{L^2 - (a \cdot \sin\theta + e \cdot \sin(\alpha + \theta))^2}$$

et

$$u' = -[(a \cdot \dot{\theta} \cdot \cos\theta + e \cdot (\alpha + \dot{\theta}) \cdot \cos(\alpha + \theta))^2 + (a \cdot \sin\theta + e \cdot \sin(\alpha + \theta)) \cdot (-a \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin\theta - e \cdot (\alpha + \dot{\theta})^2 \cdot \sin(\alpha + \theta))]$$

$$v' = \frac{-(a \cdot \sin\theta + e \cdot \sin(\alpha + \theta)) \cdot (a \cdot \dot{\theta} \cdot \cos\theta + e \cdot (\alpha + \dot{\theta}) \cdot \cos(\alpha + \theta))}{\sqrt{L^2 - (a \cdot \sin\theta + e \cdot \sin(\alpha + \theta))^2}}$$

Finalement, de manière relativement condensée, on peut écrire :

$$\ddot{x} = -a \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos\theta - e \cdot (\alpha + \dot{\theta})^2 \cdot \cos(\alpha + \theta) + \frac{u' \cdot (L^2 - (a \cdot \sin\theta + e \cdot \sin(\alpha + \theta))^2) + u \cdot (a \cdot \sin\theta + e \cdot \sin(\alpha + \theta)) \cdot (a \cdot \dot{\theta} \cdot \cos\theta + e \cdot (\alpha + \dot{\theta}) \cdot \cos(\alpha + \theta))}{\sqrt{L^2 - (a \cdot \sin\theta + e \cdot \sin(\alpha + \theta))^2}}$$

2- 6 A partir des formules obtenues dans questions précédentes, on décide de comparer les graphes des trajectoires du centre du pied de bielle, des vitesses et des accélérations du piston pour la solution présentée $k = -2,5$ et la solution $k = -0,5$. Qualitativement, quels sont les apports de la solution $k = -0,5$ du point de vue cinématique, dynamique et de la combustion ?

D'une manière générale, le comportement est beaucoup plus régulier pour $k = -0.5$ donc source de moins de vibrations. De plus, l'intensité des vitesses et des accélérations sont beaucoup plus faibles, donc les efforts et la puissance dissipée par frottement sont aussi inférieurs ce qui autorise un meilleur rendement mécanique, essentiel dans la compétition. Enfin le passage au point mort haut est plus long ce qui devrait favoriser la propagation de flamme et donc la combustion.

Deuxième Problème :

2- 7 Déterminer le vecteur vitesse $\overrightarrow{V(G_2, 2/R_0)}$ du centre de gravité du pignon excentrique 2 dans son mouvement par rapport à R_0 en fonction de

$$a, s, \dot{\theta}, \alpha, \vec{y}_1, \vec{y}_2.$$

$$\overrightarrow{O_0 G_2} = a \cdot \vec{x}_1 + s \cdot \vec{x}_2 + t \cdot \vec{z}_0 \text{ d'où } \overrightarrow{V(G_2, 2/R_0)} = a \cdot \left(\frac{d}{dt} \vec{x}_1 \right)_{R_0} + s \cdot \left(\frac{d}{dt} \vec{x}_2 \right)_{R_0} = a \cdot \overrightarrow{\Omega(R_1/R_0)} \wedge \vec{x}_1 + s \cdot \overrightarrow{\Omega(R_2/R_0)} \wedge \vec{x}_2$$

Il vient : $\overrightarrow{V(G_2, 2/R_0)} = a \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{z}_0 \wedge \vec{x}_1 + s \cdot (\dot{\theta} + \alpha) \cdot \vec{z}_0 \wedge \vec{x}_2$ et finalement :

$$\overrightarrow{V(G_2, 2/R_0)} = a \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_1 + s \cdot (\dot{\theta} + \alpha) \cdot \vec{y}_2$$

2- 8 Déterminer analytiquement le vecteur accélération $\overrightarrow{a(G_2, 2/R_0)}$ du centre de gravité du pignon excentrique **2** dans son mouvement par rapport à R_0 en fonction des données du problème.

En dérivant le vecteur vitesse, on a presque immédiatement :

$$\overrightarrow{a(G_2, 2/R_0)} = a \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{y}_1 + s \cdot (\ddot{\theta} + \alpha) \cdot \vec{y}_2 - a \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{x}_1 - s \cdot (\dot{\theta} + \alpha)^2 \cdot \vec{x}_2$$

2- 9 Déterminer analytiquement le moment dynamique $\overrightarrow{\delta(G_2, 2/R_0)}$ du pignon excentrique **2** dans son mouvement par rapport à R_0 en fonction des données du problème.

On calcule d'abord le moment cinétique qui s'exprime simplement au centre de gravité :

$$\overrightarrow{\sigma(G_2, 2/R_0)} = [I(G_2, 2)] \cdot \overrightarrow{\Omega(2/R_0)} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha + \dot{\theta} \end{bmatrix} = (-E \cdot \vec{x}_2 - D \cdot \vec{y}_2 + C \cdot \vec{z}_0) \cdot (\alpha + \dot{\theta})$$

Le moment dynamique en G_2 s'obtient par dérivation directe et finalement :

$$\boxed{\overrightarrow{\delta(G_2, 2/R_0)} = (-E \cdot (\alpha + \dot{\theta}) + D \cdot (\alpha + \dot{\theta})^2) \cdot \vec{x}_2 - (D \cdot (\alpha + \dot{\theta}) + E \cdot (\alpha + \dot{\theta})^2) \cdot \vec{y}_2 + C \cdot (\alpha + \dot{\theta}) \cdot \vec{z}_0}$$

2- 10 En déduire le moment dynamique $\overrightarrow{\delta(O_2, 2/R_0)}$ du pignon excentrique **2** dans son mouvement par rapport à R_0 en fonction des données du problème.

La relation de constitution du torseur dynamique s'écrit ici :

$$\overrightarrow{\delta(O_2, 2/R_0)} = \overrightarrow{\delta(G_2, 2/R_0)} + \overrightarrow{O_2 G_2} \wedge m_2 \cdot \overrightarrow{a(G_2/R_0)}$$

avec :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O_2 G_2} \wedge m_2 \cdot \overrightarrow{a(G_2/R_0)} &= m_2 \cdot s \cdot (a \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos \alpha + s \cdot (\ddot{\theta} + \alpha) + a \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin \alpha) \cdot \vec{z}_0 + \\ & m_2 \cdot t \cdot (-a \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{x}_1 - s \cdot (\ddot{\theta} + \alpha) \cdot \vec{x}_2 - a \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{y}_1 - s \cdot (\dot{\theta} + \alpha)^2 \cdot \vec{y}_2) \end{aligned}$$

Le moment dynamique en O_2 s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{\delta(O_2, 2/R_0)} = (-E + m_2 \cdot t \cdot s) \cdot (\alpha + \dot{\theta}) + D \cdot (\alpha + \dot{\theta})^2 \cdot \vec{x}_2 - (D \cdot (\alpha + \dot{\theta}) + (E + m_2 \cdot t \cdot s) \cdot (\alpha + \dot{\theta})^2) \cdot \vec{y}_2 + m_2 \cdot t \cdot (-a \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{x}_1 - a \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{y}_1) + (C \cdot (\alpha + \dot{\theta}) + m_2 \cdot s \cdot (a \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos \alpha + s \cdot (\ddot{\theta} + \alpha) + a \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin \alpha)) \cdot \vec{z}_0}$$

2- 11 Dans la suite de ce problème, le moteur tourne à vitesse constante donc $\ddot{\theta} = 0$ et

par conséquent : $\alpha = 0$. On cherche dans cette question à déterminer l'action de contact dans la denture entre le pignon excentrique 2 et la couronne fixe 4.

a) Détermination du torseur des actions de la bielle sur l'excentrique au point de réduction T en fonction de P_{gaz} , S et de l'angle φ en admettant que la composante suivant \vec{x}_0 de l'effort du piston sur la bielle est $\overrightarrow{F_{\text{Piston} \rightarrow \text{Bielle}}} \cdot \vec{x}_0 = -P_{\text{Gaz}} \cdot S$. De plus, il est admis que l'ensemble des efforts d'inertie sur la bielle sont négligeable pour ce moteur "lent" et de faible cylindrée.

Avec $\varphi < 0$:

$$\{\text{Bielle} \rightarrow \text{Excentrique}\} = \begin{Bmatrix} -P_{\text{Gaz}} S & 0 \\ -P_{\text{Gaz}} S \cdot \tan \varphi & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_T$$

b) L'effort de contact à la dent en C (avec $\overrightarrow{O_0 C} = (a + r) \cdot \vec{x}_1$) s'écrit : $\overrightarrow{F_C} = -F_C \cdot \tan 20^\circ \cdot \vec{x}_1 - F_C \cdot \vec{y}_1$. Après écriture du théorème du moment dynamique par rapport à R_0 , déterminer analytiquement l'effort F_C en fonction des données du problème.

Le moment dynamique se simplifie en :

$$\overrightarrow{\delta(O_2, 2/R_0)} = D \cdot (\alpha + \dot{\theta})^2 \cdot \vec{x}_2 - ((E + m_2 \cdot t \cdot s) \cdot (\alpha + \dot{\theta})^2) \cdot \vec{y}_2 + m_2 \cdot t \cdot (-a \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{y}_1) + (m_2 \cdot s \cdot a \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin \alpha) \cdot \vec{z}_0$$

Le bilan des actions extérieures sur l'excentrique donne : $\{\text{Bielle} \rightarrow \text{Excentrique}\}_T$ (Cf question 2.11b), l'effort de contact à la dent F_C et le torseur de la liaison pivot en O_0 . Pour déterminer F_C seulement, il suffit de s'intéresser à la projection du théorème du moment dynamique sur z :

$$\overrightarrow{\delta(O_2, 2/R_0)} \cdot \vec{z}_1 = m_2 \cdot s \cdot a \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin \alpha = (\overrightarrow{O_2 T} \wedge \overrightarrow{F_{\text{Bielle}}} + \overrightarrow{O_2 C} \wedge \overrightarrow{F_C}) \cdot \vec{z}_1$$

et on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O_2 T} \wedge \overrightarrow{F_{\text{Bielle}}} &= e \cdot \vec{x}_2 \wedge (-P_{\text{Gaz}} S \cdot \vec{x}_0 - P_{\text{Gaz}} S \cdot \tan \varphi \cdot \vec{y}_0) = -e P_{\text{Gaz}} S \cdot \vec{x}_2 \wedge \vec{x}_0 - e P_{\text{Gaz}} S \cdot \tan \varphi \cdot \vec{x}_2 \wedge \vec{y}_0 \\ &= e P_{\text{Gaz}} S \cdot \sin(\theta + \alpha) \cdot \vec{z}_1 - e P_{\text{Gaz}} S \cdot \tan \varphi \cdot \cos(\theta + \alpha) \cdot \vec{z}_1 \\ \overrightarrow{O_2 C} \wedge \overrightarrow{F_C} &= r \cdot \vec{x}_1 \wedge (-F_C \cdot \vec{y}_1) = -r \cdot F_C \cdot \vec{z}_1 \end{aligned}$$

Soit : $m_2 \cdot s \cdot a \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin \alpha = e P_{\text{Gaz}} S \cdot \sin(\theta + \alpha) - e P_{\text{Gaz}} S \cdot \tan \varphi \cdot \cos(\theta + \alpha) - r \cdot F_C$ et par conséquent :

$$F_C = \frac{1}{r} \cdot \left\{ e P_{\text{Gaz}} S \cdot (\sin(\theta + \alpha) - \tan \varphi \cdot \cos(\theta + \alpha)) - m_2 \cdot s \cdot a \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin \alpha \right\}$$

c) Une approche simplifiée de l'évolution de l'effort de contact F_C lors du temps moteur est donnée document ressource DR6 pour $k = -2,5$ et $k = -0,5$. Quel est le problème technologique qui peut être soulevé pour le cas $k = -2,5$? Quel est par rapport à ce problème l'apport de la solution $k = -0,5$?

On a une inversion du signe de l'effort de contact ce qui génère un changement des faces de l'engrenage en contact pendant le fonctionnement pour $k = -2,5$. Ce changement de face dans la transmission de l'effort est nuisible en terme de durée de vie de l'engrenage, source de bruit, de vibrations et donc de pertes. Ce problème disparaît pour $k = 0,5$.

3. Étude de résistance des matériaux.

- 3- 1** On considère la poutre en position déformée dans le plan (A, \vec{x}, \vec{y}) comme représenté. La flèche de la poutre, supposée petite, est notée w au point G. Exprimer analytiquement le moment fléchissant M_f au point G en fonction des données du problème.

$$M_f = -F \cdot w$$

- 3- 2** Montrer que l'équation différentielle de la déformée peut se mettre sous la forme :

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \omega^2 \cdot w = 0 \quad (1)$$

Exprimer ω^2 en fonction de E , I_{Gz} et F .

On écrit : $EIw'' = -F \cdot w$ et : $\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{F}{EI_{Gz}} \cdot w = 0$. d'où : $\omega^2 = \frac{F}{EI_{Gz}}$

- 3- 3** La solution générale de l'équation (1) est de la forme $w = A_1 \cdot \cos(\omega x) + A_2 \cdot \sin(\omega x)$. A l'aide des conditions aux limites, montrer que $A_1 = 0$ et déterminer une condition nécessaire pour que la flèche de la déformée ne soit pas nulle.

En $x = 0$, $w = 0 \Rightarrow A_1 = 0$. En $x = L$, $w = 0 \Rightarrow A_2 \cdot \sin(\omega L) = 0$. Il faut que $\omega \cdot L = k \cdot \pi$ (k entier) pour que la flèche ne soit pas nulle.

- 3- 4** En déduire l'expression de la force critique d'Euler pour la poutre bi-appuyée.

La force critique correspond au premier mode de flambage ($k=1$) et est de la forme : $\sqrt{\frac{F}{EI}} \cdot L = \pi$ d'où l'expression recherchée :

$$F_C = \frac{\pi^2 \cdot EI}{L^2}$$

- 3- 5** Montrer que, dans le cas d'une poutre bi-encastree, l'équation différentielle de la déformée peut se mettre sous la forme :

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \omega^2 \cdot w = C \cdot x + D \quad (2)$$

La présence d'une force et d'un moment de réaction à l'encastrement justifie l'apparition du terme $Cx+D$.

- 3- 6** Résoudre l'équation différentielle et à l'aide des 4 conditions aux limites de la poutre bi-encastree, écrire un système homogène de 4 équations linéaires pour déterminer les constantes d'intégrations. Montrer que ce système admet une première solution non nulle si : $\omega \cdot L = 2 \cdot \pi$. En déduire l'expression de la charge critique d'Euler pour une poutre bi-encastree.

La solution particulière de l'équation particulière est de toute évidence un polynôme du premier degré, donc : $w = A_1 \cdot \cos(\omega x) + A_2 \cdot \sin(\omega x) + A_3 x + A_4$. La flèche et la pente sont non nulles aux extrémités, donc on peut écrire :

$$w(0) = 0 \implies A_1 + A_4 = 0 \quad (a)$$

$$w(L) = 0 \implies A_1 \cdot \cos(\omega L) + A_2 \cdot \sin(\omega L) + A_3 L + A_4 = 0 \quad (b)$$

$$w'(0) = 0 \implies A_2 + A_3 = 0 \quad (c)$$

$$w'(L) = 0 \implies -A_1 \omega \sin(\omega L) + A_2 \omega \cos(\omega L) + A_3 = 0 \quad (d)$$

Les équations (a) et (c) fournissent : $A_4 = -A_1$ et $A_3 = -A_2$. On remplace dans les équations (b) et (d) :

$$A_1 (\cos(\omega L) - 1) + A_2 (\sin(\omega L) - L) = 0$$

$$-A_1 \omega \sin(\omega L) + A_2 (\omega \cos(\omega L) - 1) = 0$$

Ce système homogène admet une solution non nulle si le déterminant est nul, soit si :

$$(\cos(\omega L) - 1)(\omega \cos(\omega L) - 1) + \omega \sin(\omega L)(\sin(\omega L) - L) = 0$$

Soit Finalement :

$$(1 + \omega L)(1 - \cos(\omega L)) - \omega L \sin(\omega L) = 0$$

Cette équation est bien vérifiée pour $\omega L = 2\pi$. On en déduit l'expression de la charge critique d'Euler pour une poutre bi-encastree :

$$F_C = \frac{4\pi^2 \cdot EI}{L^2}$$

- 3- 7** Calculer numériquement la force critique d'Euler pour la bielle du moteur à détente prolongée. Sachant qu'un coefficient de sécurité 2 est préconisé, le dimensionnement est-il correct ? Proposer éventuellement une modification de la bielle.

$$F_C = \pi^2 \cdot 72000 \cdot 19/12 \cdot 3^3 / 100^2 = 3037N \text{ (hypothèse bi-appuyé)}$$

$$F_C = 4\pi^2 \cdot 72000 \cdot 19/12 \cdot 3^3 / 100^2 = 12151N \text{ (hypothèse bi-encastree)}$$

La charge étant de 4300 N, suivant les conditions aux limites réelles, le coefficient de sécurité est compris entre 0,7 et 2,82. Il est vraisemblable que l'on soit plus proche, dans le plan de calcul, des conditions bi-encastrees. Tout dépend des jeux installés et des rigidités des différentes pièces. Seule l'expérience permet de trancher la question. Dans un souci de prise de marges, la manière la plus efficace consiste à augmenter le moment quadratique de la poutre.

Deuxième Problème :

- 3- 8** La figure (b) du document ressource DR7 montre le champ de la contrainte équivalente de Von Mises. Un zoom est effectué sur le pied de bielle.

- a) La couleur uniforme du champ de la contrainte équivalente est-elle conforme à la théorie ?

La contrainte équivalente observée est quasi- uniforme du fait d'une couleur bleue générale. Même si la contrainte équivalente de Von Mises dépend d'autres paramètres, la principale contrainte est une contrainte de compression qui doit varier du fait que la section varie. L'échelle de visualisation est inadaptee du fait de la forte concentration des contraintes au niveau du pied de bielle.

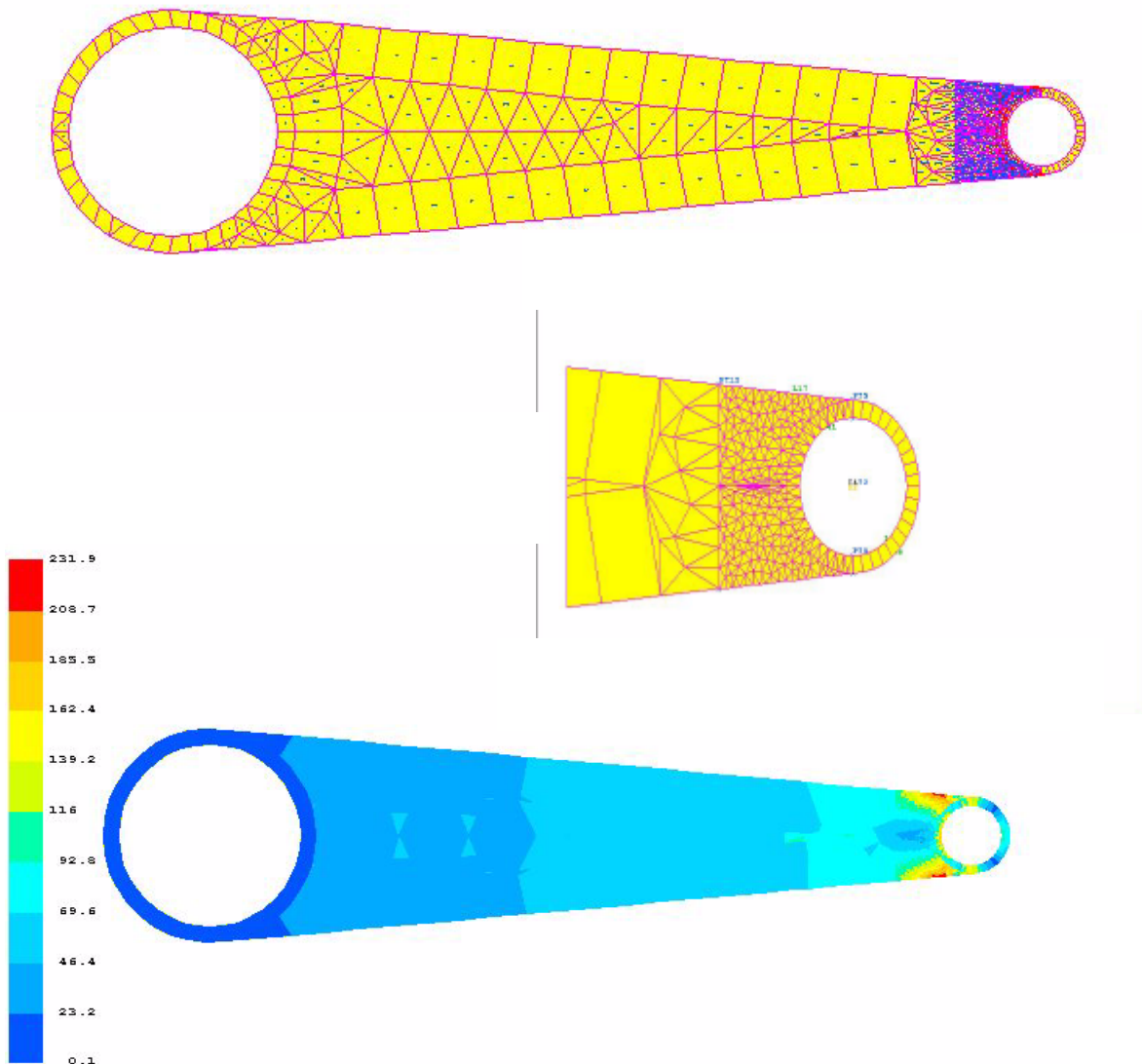
- b) En vous aidant du champ de cisaillement local autour du pied de bielle présenté document ressource DR8 figure (a), indiquez en argumentant si la valeur de la contrainte maximale est valide.

La concentration des contraintes est limitée à un élément qui est très élancé ce qui est mauvais numériquement. De plus, le gradient en cisaillement est très élevé puisque dans cet élément on passe de -196

MPa à +196 MPa. Par ailleurs les éléments proches ne présentent pas de gradients élevés. Ceci est symptomatique d'un problème numérique. La valeur de la contrainte maximale obtenue n'est donc pas valide.

c) Quelles solutions sont envisageables pour améliorer la qualité du résultat ?

Il faut améliorer le maillage en changeant la répartition des noeuds sur le cercle de pied de bielle de sorte à avoir des éléments moins élancés. On peut aussi raffiner le maillage localement. Voici les conséquences :



La contrainte maximale de Von Misès est d'environ 240 MPa au lieu de 520 MPa avec le précédent maillage soit un facteur 2 ! La baisse de la contrainte maximale permet en outre la visualisation du gradient dans la longueur de la bielle.

3-9 Une étude de stabilité a été menée et le premier mode de flambage est présenté document ressource DR8 figure (b). La charge de flambage obtenue est de 14920N.

a) Expliquer l'origine des différences obtenues entre le calcul par la formule d'Euler (environ 5000N) et le modèle éléments finis.

La valeur R.D.M. fournie correspond plutôt à des conditions aux limites bi-appuyées. L'influence des conditions aux limites est prépondérante et le modèle E.F. a des conditions aux limites de type " tout encastré". Toutefois, la valeur est encore supérieure à l'hypothèse bi-encastré car :

- a) le modèle poutre ne prend pas en compte la variation d'inertie de l'âme.*
- b) La longueur de l'âme soumise au flambage est en fait plus courte : 80 mm au lieu de 100mm.*
- c) Le pied et la tête de bielle ont des épaisseurs importantes (10 et 8 mm) et peuvent jouer le rôle de raidisseurs.*

Au bilan, il est peut probable que la bielle flambe et le dimensionnement est correct.

- b) Expliquer pourquoi le logiciel normalise automatiquement la flèche du mode de flambage à 1.

En flambage, la valeur de la flèche est indéterminée. Il est donc opportun de normaliser l'allure de la déformée.

4. Écriture de spécifications dimensionnelles et géométriques.

Objectif :

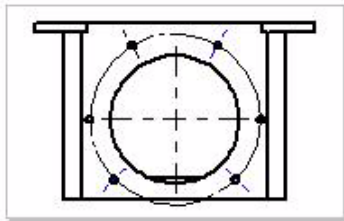
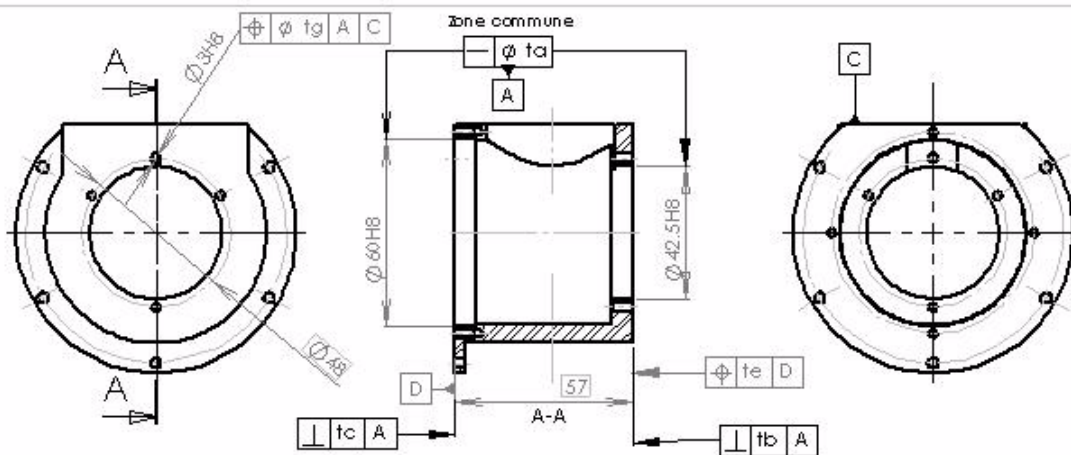
- En vue de la réalisation du carter bas, réaliser l'écriture des spécifications relatives aux surfaces fonctionnelles.

Question :

- 4- 1 Sur le document réponse DR10 du dossier ressource, écrire selon la norme I.S.O. (spécifications dimensionnelles et géométriques sans valeur numérique de tolérance) les exigences fonctionnelles relatives aux surfaces du carter bas assurant les fonctions techniques suivantes :

- FT1 : Guider en rotation le vilebrequin ;
- FT2 : Réaliser l'engrènement du pignon sur la roue dentée intérieure (calage,...).

Réponse :



CORRIGE

CARTER BAS

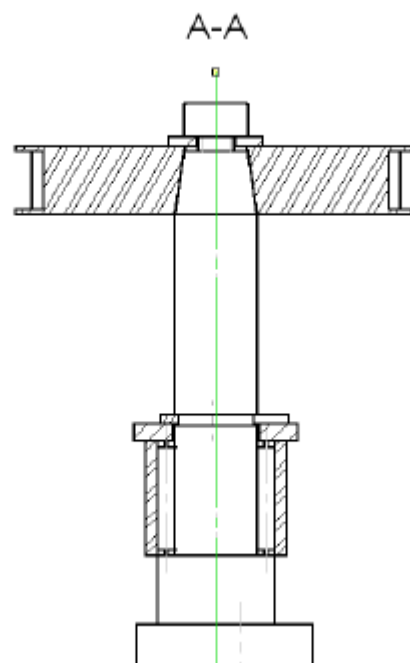
A

ECM 1.1.4.14

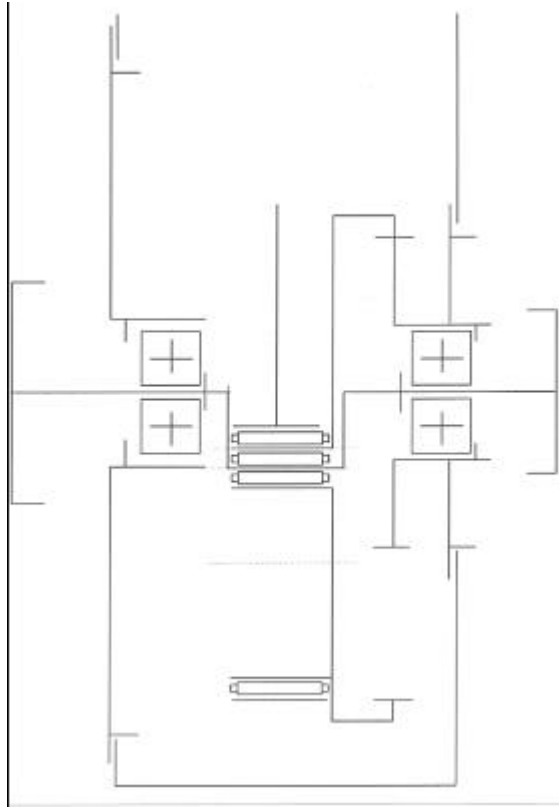
Document réponse 12

5. Études de reconception :

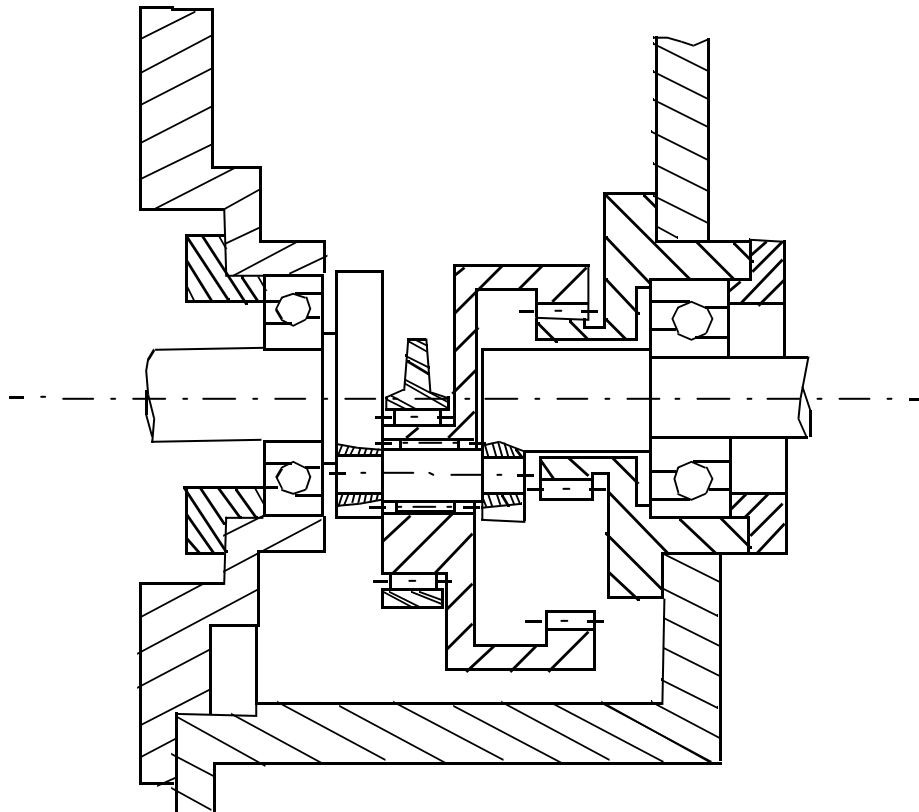
5- 1 Esquisser à main levée une solution constructive permettant d'assurer cette nouvelle fonction.



5- 2 Proposer sous forme d'un schéma technologique cette nouvelle conception.



5- 3 Esquisser à main levée, des solutions constructives des liaisons permettant d'assurer cette modification.



6. Exercice pédagogique

Finalités :

On se propose lors de l'étude de différents systèmes techniques, dont celui du moteur à détente prolongée, d'analyser les dispositions constructives existantes pour la transmission de puissance mécanique par des mécanismes à loi entrée/sortie complexe de différents types et leur comportement cinématique. Parmi ces mécanismes, vous vous intéresserez aux mécanismes à came.

Niveau d'enseignement concerné :

BTS Conception de Produits Industriels ou DUT Génie Mécanique.

Travail demandé :

Le travail demandé est relatif à une activité pédagogique de travail dirigé dont l'objectif général est de permettre à l'étudiant d'être capable d'analyser les mécanismes à came, d'en définir les différents types et de calculer leur comportement cinématique.

L'arrêté portant définition du BTS CPI précise les objectifs :

A partir des lois entrée-sortie d'un mécanisme à came :

- Tracer la came à partir d'une loi de mouvement donnée.
- Interpréter les courbes de comportement (statique, cinématique ou dynamique) produites par des logiciels.

La démarche retenue est celle qui, à partir de différents mécanismes que vous présentez, permet de dégager des principes généraux de fonctionnement. Le travail dirigé proposé s'appuie sur l'un de ces cas.

On demande :

- 6- 1** D'analyser le contenu à enseigner afin de définir précisément les différentes structures concernées par l'objectif général.

Réponse : Les différentes structures concernées par l'objectif général sont :

Les cames de différentes formes :

- Les cames cylindriques ou cames tambours
- A rainure

- Cloche
- A nervure
- Les cames disques périphériques
- Les cames disques à rainures
- Les cames rectilignes

Les différents types de suiveurs :

- Selon leur mouvement : rotation ou translation
- Selon leur type de contact : cylindrique ou plan

Les différents types de maintien de contact :

- Rainure de guidage
- Double galet
- Ressort

6- 2 De dégager et de décrire, pour le travail dirigé proposé, le ou les objectifs opérationnels s'inscrivant dans l'objectif général précisé ci-dessus.

Réponse : Le ou les objectifs opérationnels s'inscrivant dans l'objectif général précisé ci-dessus, pour le travail dirigé proposé sont :

Lire et comprendre les documents distribués

Déterminer les différents types de came

Tracer une came à partir d'une loi de déplacement définie pour l'organe de sortie

Interpréter des courbes de comportement statique, cinématique et dynamique afin d'identifier les conséquences des choix de dimensions des cames et des contacts sur les performances obtenues

6- 3 De décrire la situation initiale (les capacités initiales).

Réponse : Prérequis :

Mécanique

- Statique
- Cinématique et en particulier les lois entrée-sortie
- Bases de dynamique
- Frottement

Pression de Hertz

Analyse fonctionnelle

- Schématisation
- Cahier des charges fonctionnel

Technologie

- Norme du dessin technique
- Matériau : coefficient de frottement, pression spécifique, traitement de surface
- Ressort

6- 4 De définir les compétences nouvelles et la méthode à acquérir lors de la séquence, et d'identifier les difficultés prévisibles des étudiants.

Connaissances des différents types de cames

Méthode pour le tracé des cames

Evaluation de l'importance de différents paramètres pour choisir des dimensions et des matériaux.

6- 5 De décrire les supports techniques utilisés, les outils et les moyens pédagogiques

(matériels et/ou logiciels).

Réponse :

Supports techniques :

Dispositif de marquage automatique de pièces
Tronçonneuse pour couper les tubes fabriquées en continu
Tête autonome de machine transfert
Machine de soufflage par bi-orientation Sidel
Moteur Split-cycle
Machine de montage de stylo (Waterman)
Guilloteuse (Waterman)
Machine à repoter les fleurs
Tour à décolletage

Logiciels :

Mécaplan Wips
Meca 3D
Motion Works
SDS

6- 6 De décrire le déroulement de la séquence.

Réponse :

La durée de la séance de TD présentée sera 3h.

La séance de TD est conduite à partir des documents relatifs au moteur à détente prolongée

Etude générale

A partir des plans des différents mécanismes présentés, analyser, observez les différences, puis les sériez dans des tableaux. En déduire les différents types de mécanismes à came.

Etude de la distribution du moteur à détente prolongée

A partir du diagramme de Watt explicité, déterminer la phase théorique d'ouverture de la soupape d'admission du mélange air-'essence'. Tracer le graphe de mouvement théorique en fonction de l'angle de rotation du vilebrequin.

Tracé de came

A partir du diagramme réel de levée de soupape en fonction de l'angle de rotation du vilebrequin et après explication des différences par rapport à la théorie, déterminer la forme de la came de distribution dans le cas du contact plan.

Interprétation des courbes de comportement

Pour diminuer le frottement du contact came plateau, on se propose d'interposer un galet.

A partir d'une étude sous un logiciel de CAO ou de courbes extraites de ce logiciel, détermination de l'influence des dimensions de la came et du galet ou du plateau sur les efforts mis en jeu.

Détermination de dispositions constructives en fonction des efforts mis en jeu.