

**EPREUVE DE MECANIQUE DES SYSTEMES
ET DES MILIEUX DEFORMABLES**

**Eléments de corrigé
et commentaires**

Première partie : Mécanique des solides indéformables

Section 11 : Détermination du modèle géométrique direct

Q.11.1 - L'écriture de la fermeture géométrique nous conduit à la relation :

$$\overrightarrow{A_0 A_4} = \overrightarrow{A_0 A_2} + \overrightarrow{A_2 A_4}$$

En projetant sur le repère $R_0 (A_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, nous obtenons les relations demandées :

$$L = s_{21} \cos f_{10} - s_{34} \cos f_{40} \quad (1)$$

$$0 = s_{21} \sin f_{10} - s_{34} \sin f_{40} \quad (2)$$

Q.11.2 – Pour exprimer les coordonnées du point A_2 , il suffit d'écrire :

$$\overrightarrow{A_0 A_2} = x \vec{x}_0 + y \vec{y}_0 = s_{21} \cos f_{10} \vec{x}_0 + s_{21} \sin f_{10} \vec{y}_0$$

Ceci nous donne le modèle géométrique direct :

$$x = s_{21} \cos f_{10} - \frac{L}{2} = s_{34} \cos f_{40} + \frac{L}{2} \quad (3)$$

$$y = s_{21} \sin f_{10} = s_{34} \sin f_{40} \quad (4)$$

Q.11.3 – A partir des relations (3) et (4), nous pouvons exprimer directement les relations demandées :

$$\cos f_{10} = \frac{L^2 + s_{12}^2 - s_{34}^2}{2Ls_{12}} = f(L, s_{12}, s_{34}) \quad (5)$$

$$\cos f_{40} = \frac{L^2 - s_{12}^2 + s_{34}^2}{2Ls_{34}} = g(L, s_{12}, s_{34}) \quad (6)$$

Q.11.4 – A partir des relations (1) et (2), nous pouvons écrire la vitesse du point A_2 ce qui nous donne :

$$\dot{x} = \dot{s}_{21} \cos f_{10} - s_{21} \dot{f}_{10} \sin f_{10}$$

$$\dot{y} = \dot{s}_{21} \sin f_{10} + s_{21} \dot{f}_{10} \cos f_{10}$$

Dans ces équations, nous devons éliminer la grandeur \dot{f}_{10} que nous obtenons à partir de l'équation (5) :

$$\dot{f}_{10} = \frac{\dot{s}_{21} \cos f_{10}}{y} - \frac{s_{21} \dot{s}_{21} - s_{34} \dot{s}_{34}}{yL}$$

En remplaçant cette expression dans les deux ci dessus, nous pouvons exprimer les relations demandées :

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \dot{s}_{21} \\ \dot{s}_{34} \end{Bmatrix} \text{ avec } [J] = \begin{bmatrix} \cos(f_{10}) - K_1 y & -K_2 y \\ \sin(f_{10}) + K_1 x & K_2 x \end{bmatrix}$$

Les expressions de K_1 et de K_2 sont donc :

$$K_1 = \frac{\cos f_{10}}{y} - \frac{1}{L \sin f_{10}}$$

$$K_2 = \frac{1}{L \sin f_{40}}$$

Q.11.5 - La broche est positionnée au point de coordonnées (85, 1200) en mm. Le déplacement s'effectue suivant \vec{x} à une vitesse de 120m/mn par rapport au bâti. Les applications numériques nous conduisent aux résultats intermédiaires suivants :

$$s_{12} = 1337,2 \text{ mm}, f_{10} = 63,8^\circ, s_{34} = 1271,4 \text{ mm}, f_{40} = -70,7^\circ$$

Finalement, nous obtenons les vitesses des moteurs linéaires :

$$\dot{s}_{12} = 9,14 \text{ m/mn et } \dot{s}_{34} = 85,72 \text{ m/mn}$$

Nous constatons que dans cette configuration, les valeurs obtenues sont acceptables car la vitesse maximum est fixée à 151 m/mn.

Q.11.6 – Afin de vérifier le dimensionnement en vitesse, nous effectuons les calculs sur un contour de l'espace de travail qui représente un carré de 630 x 630 mm avec une loi de vitesse de consigne en trapèze (accélération 20 m/s², vitesse constante puis décélération 20 m/s²).

Les résultats présentés sur les courbes montrent que les vitesses des actionneurs ne dépassent pas les 120 m/mn. Nous pouvons donc conclure que ces derniers sont bien dimensionnés en vitesse.

Section 12 : Etude des efforts dans les moteurs linéaires

Q.12.1 – L'énergie cinétique du système est la somme des énergies cinétiques de chacun des éléments, ce qui nous donne :

$$2T(\Sigma / R_0) = 2(T(1 / R_0) + T(2 / R_0) + T(3 / R_0) + T(4 / R_0))$$

avec :

$$2T(1 / R_0) = C_1 \dot{f}_{10}^2 \text{ et } 2T(4 / R_0) = C_4 \dot{f}_{40}^2$$

et

$$2T(2 / R_0) = C_2 \dot{f}_{10}^2 + m_2 \left[(\dot{s}_{12} - y_2 \dot{f}_{10})^2 + (s_{12} + x_2)^2 \dot{f}_{10}^2 \right]$$

$$2T(3 / R_0) = C_3 \dot{f}_{40}^2 + m_3 \left[(\dot{s}_{34} - y_3 \dot{f}_{40})^2 + (s_{34} + x_3)^2 \dot{f}_{40}^2 \right]$$

d'où

$$2T(\Sigma/R_0) = (C_1 + C_2)\dot{\mathbf{f}}_{10}^2 + m_2 \left[(\dot{s}_{12} - y_2 \dot{\mathbf{f}}_{10})^2 + (s_{12} + x_2)^2 \dot{\mathbf{f}}_{10}^2 \right] + \\ + (C_3 + C_4)\dot{\mathbf{f}}_{40}^2 + m_3 \left[(\dot{s}_{34} - y_3 \dot{\mathbf{f}}_{40})^2 + (s_{34} + x_3)^2 \dot{\mathbf{f}}_{40}^2 \right]$$

Q.12.2 – L'énergie potentielle du système est la somme des énergies potentielles sur chacun des éléments :

$$V = m_1 g \overrightarrow{A_0 G_1} \cdot \overrightarrow{y_0} + m_2 g \overrightarrow{A_0 G_2} \cdot \overrightarrow{y_0} + m_3 g \overrightarrow{A_4 G_3} \cdot \overrightarrow{y_0} + m_4 g \overrightarrow{A_4 G_4} \cdot \overrightarrow{y_0}$$

Après calculs, nous trouvons :

$$V = g \left\{ \begin{aligned} &(m_1 x_1 + m_2 (s_{12} + x_2)) \sin \mathbf{f}_{10} + (m_1 y_1 + m_2 y_2) \cos \mathbf{f}_{10} + \\ &(m_4 x_4 + m_3 (s_{34} + x_3)) \sin \mathbf{f}_{40} + (m_3 y_3 + m_4 y_4) \cos \mathbf{f}_{40} \end{aligned} \right\}$$

Q.12.3 - L'effort d'usinage exercé par la pièce sur l'outil est rapporté au point A_2 . Il est modélisé par deux composantes comme suit :

$$\{F_{ext \rightarrow bras}\} = \begin{Bmatrix} F_x \vec{x}_0 + F_y \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{A_2}$$

Les forces de commande S_{ij} sont exercées par les moteurs entre les solides i et j. Elles sont de la forme :

$$\{S_{moteur \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} S_{21} \vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{A_2} \quad \{S_{moteur \rightarrow 3}\} = \begin{Bmatrix} S_{43} \vec{x}_4 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{A_2}$$

Le calcul du travail virtuel de l'effort d'usinage et son expression en coordonnées généralisées montre que les forces généralisées associées à cet effort s'écrivent :

$$\{Q_{ext}\} = \begin{Bmatrix} \cos \mathbf{f}_{10} F_x + \sin \mathbf{f}_{10} F_y \\ 0 \\ s_{12} (-F_x \sin \mathbf{f}_{10} + \cos \mathbf{f}_{10} F_y) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Les forces de commande sont de la forme :

$$\{Q_{moteur}\} = \begin{Bmatrix} S_{21} \\ S_{43} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

En final, le vecteur des forces généralisées s'écrit :

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} \cos \mathbf{f}_{10} F_x + \sin \mathbf{f}_{10} F_y + S_{21} \\ S_{43} \\ s_{12} (-F_x \sin \mathbf{f}_{10} + \cos \mathbf{f}_{10} F_y) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Q.12.4 – A partir de ces résultats, nous pouvons écrire les équations du mouvement avec les équations de Lagrange qui sont données par :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} + \frac{\partial}{\partial q_j} \Phi_i \mathbf{I}_i = Q_j \text{ et } \{\Phi(q)\} = \{0\}$$

Pour chacun des paramètres de mouvement, l'écriture des équations de Lagrange conduit à la forme matricielle suivante :

$$[M(q)]\{\ddot{q}\} + [C(q, \dot{q})]\{\dot{q}\} + \{g(q)\} + [h(q)]\{\mathbf{I}\} = \{Q\}$$

avec $[M(q)]$ la matrice de masse, $[C(q, \dot{q})]$ la matrice de Coriolis, $\{g(q)\}$ le vecteur des forces de gravité et $[h(q)]$ la matrice relative aux coefficients des multiplicateurs de Lagrange.

Tout calcul fait, les matrices ont pour expression :

$$[M(q)] = \begin{bmatrix} m_2 & 0 & -m_2 y_2 & 0 \\ 0 & m_3 & 0 & -m_3 y_3 \\ -m_2 y_2 & 0 & (C_1 + C_2) + m_2 y_2^2 + m_2 (x_2 + s_{21})^2 & 0 \\ 0 & -m_3 y_3 & 0 & (C_3 + C_4) + m_3 y_3^2 + m_3 (x_3 + s_{34})^2 \end{bmatrix}$$

$$[C(q, \dot{q})] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -m_2 (x_2 + s_{21}) \dot{\mathbf{f}}_{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m_3 (x_3 + s_{34}) \dot{\mathbf{f}}_{40} \\ m_2 (x_2 + s_{21}) \dot{\mathbf{f}}_{10} & 0 & m_2 (x_2 + s_{21}) \dot{s}_{21} & 0 \\ 0 & m_3 (x_3 + s_{34}) \dot{\mathbf{f}}_{40} & 0 & m_3 (x_3 + s_{34}) \dot{s}_{34} \end{bmatrix}$$

$$\{g(q)\} = g \begin{Bmatrix} m_2 \sin \mathbf{f}_{10} \\ m_3 \sin \mathbf{f}_{40} \\ m_1 (-y_1 \sin \mathbf{f}_{10} + x_1 \cos \mathbf{f}_{10}) + m_2 (-y_2 \sin \mathbf{f}_{10} + (s_{21} + x_2) \cos \mathbf{f}_{10}) \\ m_3 (-y_3 \sin \mathbf{f}_{40} + (s_{34} + x_3) \cos \mathbf{f}_{40}) + m_4 (-y_4 \sin \mathbf{f}_{40} + x_4 \cos \mathbf{f}_{40}) \end{Bmatrix}$$

$$[h(q)] = \begin{bmatrix} \cos \mathbf{f}_{10} & \sin \mathbf{f}_{10} \\ -\cos \mathbf{f}_{40} & -\sin \mathbf{f}_{40} \\ -s_{21} \sin \mathbf{f}_{10} & s_{21} \cos \mathbf{f}_{10} \\ s_{34} \sin \mathbf{f}_{40} & -s_{34} \cos \mathbf{f}_{40} \end{bmatrix}$$

Q.12.5 – Les paramètres cinématiques de ce système sont soumis à 2 équations de liaisons (fermeture géométrique) que nous avons exprimées sous la forme $\{\Phi(q)\} = \{0\}$. Pour chaque relation, nous avons associé un multiplicateur de Lagrange I_i . Les deux multiplicateurs traduisent les actions de liaison au point A_2 .

Q.12.6 - Dans un premier temps, pour dimensionner les moteurs, nous faisons l'hypothèse que seule la matrice de masse est prépondérante devant la matrice de Coriolis, les forces de gravité et la matrice $[h(q)]$. Le système d'équations correspondant s'écrit donc :

$$[M(q)]\{\ddot{q}\} = \{Q\}$$

avec les matrices définies ci-dessus. Ceci représente une hypothèse qui nous permet d'obtenir de façon rapide un ordre de grandeur de la valeur des efforts dans les moteurs.

Q.12.7 – A partir de l'hypothèse formulée ci-dessus, nous pouvons calculer les efforts dans les moteurs au point de coordonnées $(85, 1200)$ en mm pour une accélération maximum suivant \vec{x} . Les calculs donnent $S_{21} = 2826 \text{ N}$ et $S_{43} = 1271 \text{ N}$. Nous trouvons des valeurs tout à fait acceptables pour les moteurs. Cependant, cette hypothèse est trop forte pour permettre le dimensionnement. Le fait de négliger les forces de Coriolis et de gravité n'est pas acceptable étant donné les masses en mouvement, les vitesses et les accélérations.

Q.12.8 - La résolution des équations complètes permet d'obtenir les efforts dans les moteurs. Les résultats sont donnés dans la figure 12.1. Ils permettent de mettre en évidence des pics d'efforts pour des positions particulières. Nous montrons donc qu'il est bien nécessaire de prendre en compte tous les termes des équations et de regarder les résultats sur tout l'espace de travail.

Les pics d'efforts sont de l'ordre de 25 000N.

Comme chaque liaison glissière est pilotée par deux moteurs linéaires délivrant chacun un effort de 14 500N d'effort maximum, nous pouvons donc conclure que d'un point de vue dynamique, ils sont bien dimensionnés.

Partie 2 : Mécanique des solides déformables

Section 21 : Raideurs en traction, flexion et torsion d'un bras

Q.21.1 - Les aires des sections droites valent :

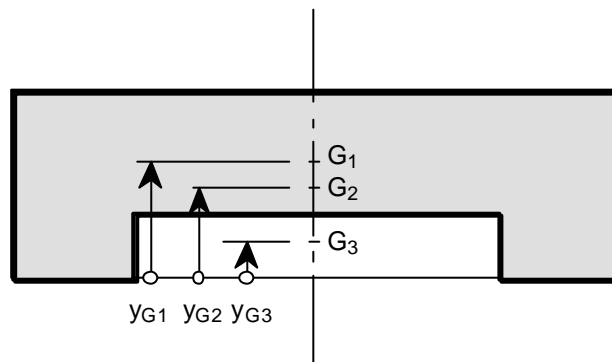
$$\begin{aligned} S_2 &= hb = 0,3 \cdot 10^6 \text{ mm}^2 \\ S_3 &= (h-e)(b-2e) = 60 \cdot 10^3 \text{ mm}^2 \\ \text{et } S_1 &= S_2 - S_3 = 0,24 \cdot 10^6 \text{ mm}^2 \end{aligned}$$

Pour les calculs de flexion demandés par la suite, c'est le moment quadratique par rapport à la ligne neutre que l'on souhaite calculer (cette ligne est discontinue).

$$\begin{aligned} I_2 &= bh^3/12 = 2,25 \cdot 10^9 \text{ mm}^4 \\ I_3 &= (b-2e)(h-e)^3/12 = 0,05 \cdot 10^9 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Pour le tronçon (1) la différence $I_2 - I_3$ ne suffit pas car les sections n'ont pas le même centre d'inertie.

$$y_{G1} S_1 = y_{G2} S_2 - y_{G3} S_3 \quad \rightarrow \quad y_{G1} = 175 \text{ mm}$$



Par le théorème de Huygens on transporte les moments I_2 et I_3 en G_1 :

$$\begin{aligned} I_{2G1} &= I_2 + d_{12}^2 S_2 & \text{avec : } d_{12} &= 25 \text{ mm} \\ I_{3G1} &= I_3 + d_{13}^2 S_3 & \text{avec : } d_{13} &= 125 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\rightarrow I_1 = I_{2G1} - I_{3G1} = 1,45 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$$

Q.21.2 - Sous l'effet de la charge N chaque tronçon (i) subit une contrainte $\sigma_i = N/S_i$ et par suite il s'allonge d'une longueur :

$$\Delta L_i = NL_i/ES_i$$

L'allongement global vaut : $\Delta L_t = \Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3 \rightarrow K_L = N/\Delta L_t$

$$\rightarrow K_L = \frac{E}{\frac{L_1}{S_1} + \frac{L_2}{S_2} + \frac{L_3}{S_3}} = 3,3 \cdot 10^6 \text{ N/mm}$$

Q.21.3 - Sous l'effet de la charge T chaque tronçon (i) est soumis à de la flexion. Le moment fléchissant $M_f(x)$ s'exprime :

$$M_f(x) = T(L_1 + L_2 + L_3 - x) = T(L_t - x)$$

On calcule la flèche à l'extrémité par le théorème de Castigliano :

$$\delta = \partial W / \partial T \quad \text{avec : } W = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{L_1} \frac{M_f^2(x)}{E \cdot I_1} dx + \int_{L_1}^{L_1+L_2} \frac{M_f^2(x)}{E \cdot I_2} dx + \int_{L_1+L_2}^{L_1+L_2+L_3} \frac{M_f^2(x)}{E \cdot I_3} dx \right\}$$

$$\rightarrow d = \frac{T}{E} \left\{ \frac{1}{I_1} \int_0^{L_1} (L_t - x)^2 dx + \frac{1}{I_2} \int_{L_1}^{L_1+L_2} (L_t - x)^2 dx + \frac{1}{I_3} \int_{L_1+L_2}^{L_1+L_2+L_3} (L_t - x)^2 dx \right\}$$

$$d = \frac{T}{3E} \left\{ \frac{(L_1 + L_2 + L_3)^3}{I_1} + (L_2 + L_3)^3 \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1} \right) + (L_3)^3 \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_2} \right) \right\}$$

→ Raideur transversale : $K_T = T/\delta = 7715 \text{ N/mm}$.

Q.21.4 - Dans le cas d'une poutre de section uniforme, on détermine la section S_e et le moment quadratique I_e conduisant aux mêmes raideurs par identification :

$$\left. \begin{aligned} \Delta L = \frac{NL_t}{ES_e} &\Rightarrow K_L = \frac{ES_e}{L_t} \\ d = \frac{TL_t^3}{3EI_e} &\Rightarrow K_T = \frac{3EI_e}{L_t^3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_e = 95.10^3 \text{ mm}^2; I_e = 0,295.10^9 \text{ mm}^4$$

Le rapport λ quantifie la différence de rigidité déjà évoquée plus haut :

$$I = \frac{I_e}{L_t^2 S_e} = \frac{K_T}{3K_L} = 78.10^{-3}$$

Q.21.5 - La définition des contraintes à partir de la fonction de torsion ϕ permet de vérifier les équations d'équilibre local. Les conditions limites de bord libre sur le contour de la section droite s'écrivent :

$$\underline{\underline{s}} \cdot \vec{n} = \vec{0} \quad \text{avec : } \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \underline{\underline{m}} K \left(n_y \frac{\partial f}{\partial z} - n_z \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0 \rightarrow \vec{n} \wedge \overrightarrow{\text{grad} f} = \vec{0}$$

Ce qui implique que le vecteur $\overrightarrow{\text{grad} f}$ doit être parallèle à \vec{n} en tout point du contour de la section droite. Dans ces conditions $\overrightarrow{\text{grad} f}$ est normal au contour, ce qui implique que la fonction ϕ est constante le long du contour. On choisit arbitrairement $\phi = 0$ pour le contour extérieur, ce qui est sans conséquence puisque les contraintes sont obtenues par dérivation de ϕ .

Q.21.6 - La fonction ϕ doit vérifier la condition : $\Delta\phi + 2\phi = 0$ en tout point de la section et $\phi = 0$ en tout point du contour. Une solution approchée doit vérifier au mieux ces deux relations, pour cela on considère une famille de fonction approchée ψ telle que $\psi = 0$ sur le contour et on fait vérifier au mieux la condition sur le laplacien en utilisant la forme faible du problème :

$$\iint_{\text{section}} (\Delta \psi + 2\psi) \psi^* dA = 0$$

où ψ^* est une fonction scalaire quelconque. Il est clair que si la fonction ψ est solution du problème de torsion alors elle vérifie la relation précédente. Inversement si la relation précédente est vérifiée pour toutes les fonctions ψ^* alors ψ sera la solution du problème. Si on transforme l'intégrale précédente à l'aide du théorème de la divergence, on obtient la formulation symétrique en ψ, ψ^* suivante :

$$\underbrace{\iint_{\text{section}} \Delta \psi \cdot \psi^* dA}_{(a)} = - \iint_{\text{section}} 2\psi \psi^* dA$$

Le terme (a) se développe :

$$\begin{aligned} (a) &= \iint_{\text{section}} \mathbf{y}_{,ii} \psi^* dA \\ &= \iint_{\text{section}} \left\{ (\mathbf{y}_{,i} \psi^*)_{,i} - \mathbf{y}_{,i} \psi^*_{,i} \right\} dA \\ &= \iint_{\text{section}} (\mathbf{y}_{,i} \psi^*)_{,i} dA - \iint_{\text{section}} \mathbf{y}_{,i} \psi^*_{,i} dA \\ &= \int_{\text{contour}} \mathbf{y}_{,i} \psi^* n_i ds - \iint_{\text{section}} \mathbf{y}_{,i} \psi^*_{,i} dA \end{aligned}$$

On choisit ψ^* nulle sur le contour de la section ce qui élimine le premier terme. Ce qui conduit à la formulation suivante :

$$\iint_{\text{section}} \text{grad} \psi \cdot \text{grad} \psi^* dA = \iint_{\text{section}} 2\psi \psi^* dA$$

Q.21.7 - La fonction $\psi(y,z)$ définie par l'équation des droites constituant le contour de la section rectangulaire donne :

$$\overrightarrow{\text{grad} \psi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2Ay \left(z^2 - \frac{b^2}{4} \right) \\ 2Az \left(y^2 - \frac{h^2}{4} \right) \end{pmatrix}$$

La formulation de la question 21.6 conduit au calcul de deux intégrales :

$$\iint_{\text{section}} \overrightarrow{\text{grad}} \mathbf{y} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \mathbf{y}^* dA = 4AA^* \int_{-b/2-h/2}^{+b/2+h/2} \int_{-b/2-h/2}^{+b/2+h/2} \left\{ y^2 \left(z^2 - \frac{b^2}{4} \right)^2 + z^2 \left(y^2 - \frac{h^2}{4} \right)^2 \right\} dy dz = \frac{AA^* b^3 h^3 (h^2 + b^2)}{90}$$

$$\iint_{\text{section}} 2\mathbf{y}^* dA = 2A^* \int_{-b/2-h/2}^{+b/2+h/2} \int_{-b/2-h/2}^{+b/2+h/2} \left(z^2 - \frac{b^2}{4} \right) \left(y^2 - \frac{h^2}{4} \right) dy dz = \frac{A^* b^3 h^3}{18}$$

$$\rightarrow A = \frac{5}{b^2 + h^2} \rightarrow \begin{aligned} \mathbf{s}_{xy} &= \frac{10\mathbf{mK}z}{b^2 + h^2} \left(y^2 - \frac{h^2}{4} \right) \\ \mathbf{s}_{xz} &= \frac{10\mathbf{mK}y}{b^2 + h^2} \left(z^2 - \frac{b^2}{4} \right) \end{aligned}$$

Q.21.8 - Les contraintes sont définies à partir de la fonction de torsion et le calcul du moment de torsion se fait par l'intégrale :

$$\vec{M}_t = \iint_{\text{section}} \left(\vec{OM} \wedge \underline{\underline{\mathbf{s}(M)}} \cdot \vec{x} \right) dA$$

⇓

$$M_t = -\mathbf{mK} \iint_{\text{section}} \left(y \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} + z \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial z} \right) dA = 2\mathbf{mK} \iint_{\text{section}} \mathbf{y} dA$$

Avec la fonction ψ obtenue, le calcul du moment donne :

$$M_t = \frac{5\mathbf{mK}b^3h^3}{18(b^2+h^2)} \quad \text{avec : } K = \frac{\mathbf{q}_2}{L_2} \text{ pour le tronçon (2) et } \mathbf{m} = \frac{E}{1+u}$$

$$M_t = \frac{5\mathbf{mK}(b-2e)^3(h-2e)^3}{18((b-2e)^2 + (h-2e)^2)} \quad \text{avec : } K = \frac{\mathbf{q}_3}{L_3} \text{ pour le tronçon (3)}$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{aligned} \mathbf{q}_2 &= \frac{18(1+u)L_2}{5E} \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} M_t = 0,324 \cdot 10^{-12} M_t \\ \mathbf{q}_3 &= \frac{18(1+u)L_3}{5E} \frac{(b-2e)^2 + (h-2e)^2}{(b-2e)^3 (h-2e)^3} M_t = 28,3 \cdot 10^{-12} M_t \end{aligned} \right.$$

Les θ_i sont exprimés en radian et M_t en Nmm. Compte tenu de la rigidité en torsion du tronçon (1), on peut calculer la rigidité globale à la torsion par :

$$K_{M_t} = \frac{M_t}{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3} = 34 \cdot 10^9 \text{ Nmm / rd}$$

Q.21.9 - Dans la base globale $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ le vecteur \vec{GM} (G centre d'inertie de la section $x = L_t$) et l'effort \vec{F} s'expriment :

$$\vec{GM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -F \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{GM} \wedge \vec{F} = dF \vec{X}$$

Le torseur des efforts extérieurs rapporté à l'extrémité de la poutre et projeté dans la base liée à la direction de la poutre, donne donc :

$$N = -F \cos 15^\circ ; \quad T = -F \sin 15^\circ ; \quad M_t = d F \sin 15^\circ$$

Nota : il y a aussi une composante de flexion suivant l'inertie la plus forte de la poutre. On négligera son effet.

Compte tenu des rigidités associées à chaque sollicitation, les déplacements du point M correspondant valent :

$$\begin{aligned} U_N &= N/K_N = 2,9 \cdot 10^{-7} F \\ U_T &= T/K_T = 3,3 \cdot 10^{-5} F \\ U_{Mt} &= d M_t/K_{Mt} = 4,9 \cdot 10^{-6} F \end{aligned} \quad (U_i \text{ en mm avec } F \text{ en N})$$

On constate que, pour cette configuration, le déplacement provenant de la souplesse de la poutre est le plus élevé en flexion quel que soit l'effort de coupe F. C'est donc essentiellement cette raideur que l'on cherche à augmenter dans la conception de la machine.

Section 22 : Pulsations propres en traction, flexion d'un seul bras

Q.22.1 - On isole un tronçon de poutre de longueur "dx" sollicité en traction, le PFD en projection sur l'axe de la poutre donne :

$$N(x+dx) - N(x) = \rho S dx \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} \quad \text{avec : } N(x) = ES \frac{\partial U(x,t)}{\partial x}$$

Ce qui conduit à l'équation différentielle du second ordre en U(x,t) :

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}$$

En posant $U(x,t) = \underline{u}(x) \cdot \cos \omega t$ l'équation précédente devient : $E/\rho u'' + \omega^2 u = 0$, dont les solutions sont du type :

$$\underline{u}(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x \quad \text{avec : } \omega^2 = \lambda^2 E/\rho$$

La poutre est encastree en $x = 0$, ce qui donne une condition : $U(x=0) = 0 \rightarrow A = 0$. La déformée est donc sinusoïdale et la longueur d'onde L_k associée à la $k^{\text{ème}}$ pulsation propre ω_k est donnée par :

$$L_k = 2p/\lambda_k = \frac{2\pi}{\omega_k} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Q.22.2 - Sans la masse M , l'extrémité $x = L_t$ est libre de charge :

$$N(L_t) = 0 \rightarrow \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=L_t} = 0 \rightarrow \cos \lambda L_t = 0 \rightarrow \lambda_{k+1} = (2k+1) \frac{\pi}{2L_t}$$

Ce qui donne : $\omega_{k+1} = (2k+1) \frac{\pi}{2L_t} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ avec : $\omega_1 = \frac{1,57}{L_t} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 4000 \text{ rd/s}$ ou $f_1 = 636 \text{ Hz}$

Q.22.3 - Avec la masse M à l'extrémité $x = L_t$, la condition limite s'écrit :

$$-N(L_t) = M \left. \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right|_{x=L_t} \rightarrow -ES \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=L_t} = M \left. \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right|_{x=L_t} \rightarrow ES \lambda \cos \lambda L_t = M \omega^2 \sin \lambda L_t$$

Ce qui conduit à :

$$\frac{rSL_t}{IL_tM} = \tan \lambda L_t \quad \text{ou} : \begin{cases} \frac{A}{X} - \tan X = 0 \\ A = \frac{M_{\text{poutre}}}{M}; X = \lambda L_t \end{cases}$$

Dans notre cas : $A = 2,56$ ce qui correspond au graphique en annexe 1 - courbe noire en $X = 1$ - la poutre est deux fois et demi plus lourde que la masse à son extrémité. D'après ce même graphique, la première pulsation propre correspond à $X = 1,1$ (première intersection des courbes rouge et noire). La masse M réduit assez fortement la valeur de la première pulsation propre qui passe de 4000 rd/s sans masse à :

$$\omega_1 = \frac{1,1}{L_t} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 2800 \text{ rd/s} \quad \text{ou} \quad f_1 = 446 \text{ Hz.}$$

Soit un écart de près de 30%. Ce résultat est assez logique puisque globalement, sur un système élastique, la pulsation propre est de l'ordre de la racine de la raideur sur la masse. Si on augmente la masse à raideur égale, on réduit la pulsation propre.

Q.22.4 - On isole un tronçon de poutre de longueur " dx " sollicité en traction, le PFD donne les deux relations suivantes :

$$T(x+dx) - T(x) = \rho S dx \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} \quad \text{et} \quad M_f(x+dx) - M_f(x) + dx T(x+dx) = \rho I dx \frac{\partial^2 j(x,t)}{\partial t^2}$$

Avec dans le cadre de l'hypothèse de Bernoulli : $M_f(x) = EI \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2}$

On montre que si la poutre est élancée il est légitime de négliger le terme d'inertie en rotation de la section devant le terme d'inertie en translation suivant Y. Ce qui conduit à l'équation différentielle du quatrième ordre :

$$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} + \frac{EI}{rS} \frac{\partial^4 V(x,t)}{\partial x^4} = 0$$

Avec : $V(x,t) = \underline{v}(x)\cos\omega t$ cette relation devient : $\omega^2 \underline{v}(x) = \frac{EI}{rS} \underline{v}^{(4)}(x)$

La forme proposée dans l'énoncé vérifie la relation précédente pour toutes valeurs de λ telles que :

$$\omega^2 = I^4 \frac{EI}{rS}$$

De plus, si la poutre est encastree en $x = 0$, les conditions limites en déplacement et rotation donnent :

$$\underline{v}(0) = 0 \rightarrow \alpha + \gamma = 0 \quad \text{et} \quad \underline{v}'(0) = 0 \rightarrow \beta + \delta = 0$$

Q.22.5 - Si l'extrémité est libre (pas de masse) on aboutit aux conditions classiques :

$$M_f(L_t) = 0 \rightarrow \underline{v}''(L_t) = 0 \rightarrow \alpha(\cos\lambda L_t + \text{ch}\lambda L_t) + \beta(\sin\lambda L_t + \text{sh}\lambda L_t) = 0$$

$$T(L_t) = 0 \rightarrow \underline{v}'''(L_t) = 0 \rightarrow \alpha(\sin\lambda L_t - \text{sh}\lambda L_t) - \beta(\cos\lambda L_t + \text{ch}\lambda L_t) = 0$$

On doit avoir un déterminant nul pour ne pas tomber sur la solution triviale $\alpha = \beta = 0$. Ce qui conduit à la relation définissant les valeurs de λ_k possibles :

$$\cos \lambda L_t = -\frac{1}{\text{ch} \lambda L_t}$$

Graphiquement ou par itération, on obtient les valeurs suivantes :

$$\lambda_1 L_t = 0,597p \quad ; \quad \lambda_2 L_t = 1,491p \quad ; \quad \lambda_{k+1} L_t \sim (2k+1)p/2$$

On en déduit la première pulsation propre en flexion de la poutre :

$$\omega_1 = \frac{(0,597\pi)^2}{L_t^2} \sqrt{\frac{EI}{rS}} = 253 \text{rd/s} \quad \text{ou} \quad f_1 = 40,2 \text{ Hz} \quad (8x \text{ moins qu'en traction})$$

Avec la masse M à l'extrémité, la condition sur le moment fléchissant ne change pas, mais la condition sur l'effort tranchant devient :

$$-T(L_t) = M \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} \Big|_{x=L_t} \rightarrow EI \frac{\partial^3 V(x,t)}{\partial x^3} \Big|_{x=L_t} = M \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} \Big|_{x=L_t}$$

$$\rightarrow EI\lambda^3 \{ \alpha(\sin\lambda L_t - \text{sh}\lambda L_t) - \beta(\cos\lambda L_t + \text{ch}\lambda L_t) \} = -M\omega^2 \{ \alpha(\cos\lambda L_t - \text{ch}\lambda L_t) + \beta(\sin\lambda L_t - \text{sh}\lambda L_t) \}$$

$$\rightarrow \alpha(\sin \lambda L_t - \text{sh} \lambda L_t) - \beta(\cos \lambda L_t + \text{ch} \lambda L_t) + I L_t \frac{M}{M_{\text{poutre}}} \{ \alpha(\cos \lambda L_t - \text{ch} \lambda L_t) + \beta(\sin \lambda L_t - \text{sh} \lambda L_t) \} = 0$$

Cette dernière équation associée à la condition limite $M_f(L_t) = 0$ donne un système dont le déterminant doit être nul pour éviter la solution triviale $\alpha = \beta = 0$.

En posant, comme pour la question 22.3 : $A = M_{\text{poutre}}/M$ et $X = \lambda L_t$ le déterminant conduit à la relation suivante :

$$\frac{\sin X \text{ch} X - \text{sh} X \cos X}{1 + \cos X \text{ch} X} - \frac{A}{X} = 0$$

Que l'on peut résoudre graphiquement grâce au graphique de l'annexe 2. Ce qui donne pour la première racine : $X_1 = 1,4$. D'où on tire la valeur de la première pulsation propre de flexion :

$$\omega_1 = \frac{1,4^2}{L_t^2} \sqrt{\frac{EI}{rS}} = 141 \text{ rd/s} \quad \text{ou} \quad f_1 = 22,4 \text{ Hz} \quad (44\% \text{ de différence avec le cas sans masse})$$

Soit une fréquence propre 20 fois plus faible en flexion (22 Hz) qu'en traction (446 Hz).

Q.22.6 - La première fréquence propre de flexion se trouve dans la plage d'excitation correspondant à l'usinage TGV (0,5 à 50 Hz). Il y a donc risque de résonance. Nous allons voir dans la partie qui suit comment la structure parallèle de la machine présentée permet de réduire les risques de résonance.

Section 23 : Détermination approchée des pulsations et modes propres par la méthode des éléments finis

Q.23.1 - Les U_i sont les déplacements des nœuds (i). La matrice $[N]$ est la matrice (1,2) des fonctions de forme $[N_1, N_2]$. $[B]$ est la matrice (1,2) des dérivées des fonctions de forme $[dN_1/dx, dN_2/dx]$. Dans le cas particulier de l'élément de traction, la matrice $[K]$ s'écrit :

$$[K] = ES \cdot [I_d]$$

Dans ce cas, l'intégration de l'énergie de déformation donne une matrice de raideur K pour la poutre :

$$\mathbf{K} = ES/L \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix}$$

L'énergie cinétique donne une matrice de masse \mathbf{M} :

$$\mathbf{M} = \rho SL/6 \begin{bmatrix} +2 & +1 \\ +1 & +2 \end{bmatrix}$$

Q.23.2 La poutre est encastree au niveau du nœud (1) donc : $U_1 = 0$ et le système à résoudre devient très simple :

$$K_{22} - \omega^2 M_{22} = 0$$

Sans la masse M à l'extrémité la pulsation propre vaut :

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{3}}{L} \sqrt{\frac{E}{r}} \rightarrow 702 \text{ Hz (+10% p/r à solution analytique)}$$

Avec la masse M, on a : $M_{22} = M + \rho SL/3$ ce qui conduit à :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3ES}{L(3M + rSL)}} = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{3A}{3+A}} \sqrt{\frac{E}{r}} \rightarrow 446 \text{ Hz (+7% par rapport à la solution analytique)}$$

Compte tenu de ce qu'il n'y a qu'un seul élément, la précision sur la première pulsation est très bonne par rapport à la solution analytique.

Q.23.3 - V_i : déplacement nodal transversal du nœud (i)
 ϕ_i : rotation de la section droite au nœud (i)

L'hypothèse de Bernoulli lie les déplacements et les rotations de sections droites. Les fonctions de forme N_i doivent vérifier des conditions en déplacement et en rotation ce qui oblige à choisir des fonctions polynômes de degré 3. Ces fonctions sont données dans l'énoncé, ainsi que les matrices de masse et de raideur élémentaires. En prenant en compte les conditions d'encastrement au nœud (1), le problème à résoudre est de dimension 2 avec une matrice de masse :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M + \frac{13rSL}{35} & \frac{11rSL^2}{210} \\ \frac{11rSL^2}{210} & \frac{rSL^3}{105} \end{bmatrix}$$

Pour la matrice de raideur, il n'y a pas d'influence de la masse :

$$\mathbf{K} = EI/L^3 \begin{bmatrix} +12 & -6L \\ -6L & +4L^2 \end{bmatrix}$$

La résolution passe par la détermination des racines de : $\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0$

Ce qui conduit à :

$$\left(12 - \frac{13A+35}{35A} X^2\right) \left(4 - \frac{X^2}{105}\right) - \left(6 - \frac{X^2}{210}\right)^2 = 0 \quad \text{avec : } X^2 = \frac{rSL^4}{EI} \omega^2$$

Pour le cas « sans masse » on fait tendre A vers l'infini, ce qui donne la 1^{ère} racine :

$$X^2 = 12,5 \rightarrow X = 3,53 \rightarrow \omega_1 = \frac{3,53}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{rS}} \rightarrow f_1 = 40,3 \text{ Hz}$$

Pour le cas « avec masse » on prend la valeur A = 2,56, ce qui donne la 1^{ère} racine :

$$X^2 = 4,75 \rightarrow X = 2,18 \rightarrow \omega_1 = \frac{2,18}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{rS}} \rightarrow f_1 = 24,9 \text{ Hz}$$

Q.23.4 - Le problème global fait intervenir les sollicitations de traction et de flexion, les matrices de masse et de raideur locales sont donc des matrices 6x6. Par exemple pour la matrice de raideur on obtient :

$$[K_l] = \begin{bmatrix} ES/L & 0 & 0 & -ES/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 4EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 4EI/L \\ -ES/L & 0 & 0 & ES/L & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 0 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 4EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix}$$

Le passage des matrices de masse et de raideur du repère local au repère global se fait par la matrice de rotation [R] avec $\theta = 75^\circ$ pour la poutre (1-2) et -75° pour la poutre (2-3):

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos \mathbf{q} & \sin \mathbf{q} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \mathbf{q} & \cos \mathbf{q} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \mathbf{q} & \sin \mathbf{q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \mathbf{q} & \cos \mathbf{q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow [K_g] = {}^T[R][K_l][R] \quad \text{et} \quad [M_g] = {}^T[R][M_l][R]$$

Q.23.5 - La colonne des déplacements globaux s'écrit :

$$[U_g] = \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ \mathbf{j}_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ \mathbf{j}_{21} \\ \mathbf{j}_{23} \\ U_3 \\ V_3 \\ \mathbf{j}_3 \end{bmatrix}$$

Notons que φ_{21} et φ_{23} sont les rotations des sections droites au niveau de l'articulation (2) pour les deux poutres (1-2) et (2-3). Ces deux rotations sont indépendantes puisqu'une rotation est possible en (2). Les matrices globales de masse et de raideur sont donc de dimension 10x10 avant la prise en compte des conditions limites. Les conditions limites concernent les déplacements U_i et V_i des nœuds (1) et (3) : le problème passe de la dimension 10x10 à la dimension 6x6.

Q.23.6 - Pour prendre en compte l'influence de la masse M on ajoute sa valeur dans la matrice de masse globale sur la diagonale au niveau du nœud (2) pour les d.d.l. U_2 et V_2 . Une fois cette opération effectuée, il ne reste plus qu'à résoudre :

$$[K_g - \omega^2 M_g][U_g] = [0]$$

On obtient ainsi une approximation des 6 premiers modes propres et des pulsations propres associées.

Q.23.7 - Le premier mode est donné dans l'énoncé, la pulsation propre associée est de 67 Hz soit environ 3 fois supérieure à la pulsation propre d'une poutre encastree-libre : la rigidité est donc bien augmentée grâce la structure parallèle. De plus, la valeur de 67 Hz est au-delà de la plage des fréquences d'excitation lors de l'UTGV, aussi répond-on au cahier des charges imposé.

Partie 2 : Mécanique des solides déformables (corrigé)

Section 21 : Raideurs en traction, flexion et torsion d'un bras

Q21.1 Les aires des 3 tronçons de poutre valent :

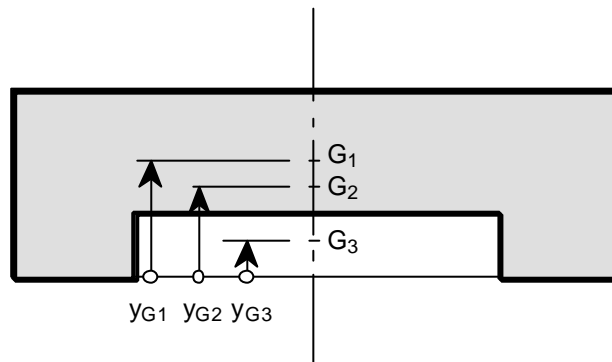
$$\begin{aligned} S_2 &= hb = 0,3 \cdot 10^6 \text{ mm}^2 \\ S_3 &= (h-e)(b-2e) = 60 \cdot 10^3 \text{ mm}^2 \\ \text{et } S_1 &= S_2 - S_3 = 0,24 \cdot 10^6 \text{ mm}^2 \end{aligned}$$

Pour les calculs de flexion demandés par la suite, c'est le moment par rapport à la ligne neutre que l'on souhaite calculer (ligne discontinue).

$$\begin{aligned} I_2 &= bh^3/12 = 2,25 \cdot 10^9 \text{ mm}^4 \\ I_3 &= (b-2e)(h-e)^3/12 = 0,05 \cdot 10^9 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Pour le tronçon (1) la simple différence ne suffit pas car les sections n'ont pas même centre d'inertie.:

$$y_{G1} S_1 = y_{G2} S_2 - y_{G3} S_3 \quad \rightarrow \quad y_{G1} = 175 \text{ mm}$$



Par le théorème de Huygens on transporte les moments I_2 et I_3 en G_1 :

$$\begin{aligned} I_{2G1} &= I_2 + d_{12}^2 S_2 & \text{avec : } d_{12} &= 25 \text{ mm} \\ I_{3G1} &= I_3 + d_{13}^2 S_3 & \text{avec : } d_{13} &= 125 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\rightarrow I_1 = I_{2G1} - I_{3G1} = 1,45 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$$

Q21.2 Sous l'effet de la charge N chaque tronçon (i) subit une contrainte $\sigma_i = N/S_i$ et il s'allonge d'une longueur :

$$\Delta L_i = NL_i/ES_i$$

L'allongement global vaut : $\Delta L_t = \Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3 \quad \rightarrow \quad K_L = N/\Delta L_t$

$$K_L = \frac{E}{\frac{L_1}{S_1} + \frac{L_2}{S_2} + \frac{L_3}{S_3}} = 3,3 \cdot 10^6 \text{ N/mm}$$

Q21.3 Sous l'effet de la charge T chaque tronçon (i) est soumis à de la flexion. Le moment fléchissant $M_f(x)$ s'exprime :

$$M_f(x) = T(L_1 + L_2 + L_3 - x) = T(L_t - x)$$

On calcule la flèche à l'extrémité par le théorème de Castigliano :

$$\delta = \frac{\partial W}{\partial T} \quad \text{avec : } W = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{L_1} \frac{M_f^2(x)}{E.I_1} dx + \int_{L_1}^{L_1+L_2} \frac{M_f^2(x)}{E.I_2} dx + \int_{L_1+L_2}^{L_1+L_2+L_3} \frac{M_f^2(x)}{E.I_3} dx \right\}$$

$$\Rightarrow d = \frac{T}{E} \left\{ \frac{1}{I_1} \int_0^{L_1} (L_t - x)^2 dx + \frac{1}{I_2} \int_{L_1}^{L_1+L_2} (L_t - x)^2 dx + \frac{1}{I_3} \int_{L_1+L_2}^{L_1+L_2+L_3} (L_t - x)^2 dx \right\}$$

$$d = \frac{T}{3E} \left\{ \frac{(L_1 + L_2 + L_3)^3}{I_1} + (L_2 + L_3)^3 \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1} \right) + (L_3)^3 \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_2} \right) \right\}$$

Raideur transversale : $K_T = T/\delta = 7715 \text{ N/mm}$. Cette rigidité beaucoup plus faible qu'en traction (environ 430 fois).

Q21.4 On détermine la section S_e et le moment quadratique I_e conduisant aux mêmes raideurs par identification :

$$\left. \begin{aligned} \Delta L = \frac{NL_t}{ES_e} &\Rightarrow K_L = \frac{ES_e}{L_t} \\ d = \frac{TL_t^3}{3EI_e} &\Rightarrow K_T = \frac{3EI_e}{L_t^3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_e = 95.10^3 \text{ mm}^2; I_e = 0,295.10^9 \text{ mm}^4$$

Le rapport λ défini dans l'énoncé devient :

$$I = \frac{I_e}{L_t^2 S_e} = \frac{K_T}{3K_L} = 7,8.10^{-4}$$

Q.21.5 Les conditions limites de bord libre sur le contour de la section droite s'écrivent :

$$\underline{s} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{avec : } \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{mK} \left(n_y \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z} - n_z \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} \right) = 0 \rightarrow \vec{n} \wedge \overrightarrow{\text{grad} \mathbf{f}} = \vec{0}$$

Le vecteur $\overrightarrow{\text{grad} \mathbf{f}}$ doit être parallèle à \vec{n} en tout point du contour de la section droite. Dans ces conditions $\overrightarrow{\text{grad} \mathbf{f}}$ est normal au contour, ce qui implique que la fonction ϕ est constante le long du contour. On choisit arbitrairement $\phi=0$ pour le contour extérieur, ce qui est sans conséquence puisque les contraintes sont obtenues par dérivation de ϕ .

Q.21.6 La fonction ϕ doit vérifier la condition : $\Delta\phi+2=0$ en tout point de la section et $\phi=0$ en tout point du contour. Une solution approchée doit vérifier au mieux ces deux relations, pour cela on

considère une famille de fonction approchée ψ telle que $\psi=0$ sur le contour et on fait vérifier au mieux la condition sur le laplacien en utilisant la forme faible du problème :

$$\iint_{\text{section}} (\Delta \psi + 2) \psi^* dA = 0$$

où ψ^* est une fonction scalaire quelconque. Il est clair que si la fonction ψ est solution du problème de torsion alors elle vérifie la relation précédente. Inversement si la relation précédente est vérifiée pour toutes les fonctions ψ^* alors ψ sera la solution du problème. Si on transforme l'intégrale précédente à l'aide du théorème de la divergence, on obtient la formulation symétrique en ψ, ψ^* suivante :

$$\underbrace{\iint_{\text{section}} \Delta \psi \psi^* dA}_{(a)} = - \iint_{\text{section}} 2 \psi^* dA$$

Le terme (a) se développe :

$$\begin{aligned} (a) &= \iint_{\text{section}} \mathbf{y}_{,ii} \psi^* dA \\ &= \iint_{\text{section}} \left\{ (\mathbf{y}_{,i} \psi^*)_{,i} - \mathbf{y}_{,i} \psi^*_{,i} \right\} dA \\ &= \iint_{\text{section}} (\mathbf{y}_{,i} \psi^*)_{,i} dA - \iint_{\text{section}} \mathbf{y}_{,i} \psi^*_{,i} dA \\ &= \int_{\text{contour}} \mathbf{y}_{,i} \psi^* n_i ds - \iint_{\text{section}} \mathbf{y}_{,i} \psi^*_{,i} dA \end{aligned}$$

On choisit ψ^* nulle sur le contour de la section ce qui élimine le premier terme. Ce qui conduit à la formulation suivante :

$$\iint_{\text{section}} \overrightarrow{\text{grad}} \psi \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \psi^* dA = \iint_{\text{section}} 2 \psi^* dA$$

Q.21.7 La fonction $\psi(y,z)$ définie par l'équation des tronçons de droites constituant le contour de la section rectangulaire donne le gradient suivant :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 2Ay \left(z^2 - \frac{b^2}{4} \right) \\ 2Az \left(y^2 - \frac{h^2}{4} \right) \end{pmatrix}$$

La formulation de la question 21.6 conduit au calcul de deux intégrales :

$$\iint_{\text{section}} \overrightarrow{grad} \mathbf{y} \cdot \overrightarrow{grad} \mathbf{y}^* dA = 4AA^* \int_{-b/2}^{+b/2} \int_{-h/2}^{+h/2} \left\{ y^2 \left(z^2 - \frac{b^2}{4} \right) + z^2 \left(y^2 - \frac{h^2}{4} \right) \right\} dy dz = \frac{AA^* b^3 h^3 (h^2 + b^2)}{90}$$

$$\iint_{\text{section}} 2\mathbf{y}^* dA = 2A^* \int_{-b/2}^{+b/2} \int_{-h/2}^{+h/2} \left(z^2 - \frac{b^2}{4} \right) \left(y^2 - \frac{h^2}{4} \right) dy dz = \frac{A^* b^3 h^3}{18}$$

$$\text{Après calculs} \rightarrow A = \frac{5}{b^2 + h^2} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{s}_{xy} = \frac{10\mathbf{mK}z}{b^2 + h^2} \left(y^2 - \frac{h^2}{4} \right) \\ \mathbf{s}_{xz} = \frac{10\mathbf{mK}y}{b^2 + h^2} \left(z^2 - \frac{b^2}{4} \right) \end{cases}$$

Q.21.8 Le calcul du moment de torsion se fait par :

$$\begin{aligned} \vec{M}_t &= \iint_{\text{section}} \left(\vec{OM} \wedge \underline{\underline{\mathbf{s}(M)}} \cdot \vec{x} \right) dA \\ &\Downarrow \\ M_t &= -\mathbf{mK} \iint_{\text{section}} \left(y \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} + z \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial z} \right) dA = 2\mathbf{mK} \iint_{\text{section}} \mathbf{y} dA \end{aligned}$$

Tronçon (2) :

$$M_t = \frac{5\mathbf{mK}b^3h^3}{18(b^2 + h^2)} \quad \text{avec} : \begin{cases} K = \frac{\mathbf{q}_2}{L_2} \text{ pour le tronçon (2)} \\ \mathbf{m} = \frac{E}{1 + \mathbf{u}} \end{cases}$$

Tronçon (3) :

$$M_t = \frac{5\mathbf{mK}(b-2e)^3(h-2e)^3}{18((b-2e)^2 + (h-2e)^2)} \quad \text{avec} : K = \frac{\mathbf{q}_3}{L_3} \text{ pour le tronçon (3)}$$

→ rigidité en torsion de chaque tronçon :

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_2 &= \frac{18(1+\mathbf{u})L_2}{5E} \frac{b^2 + h^2}{b^3h^3} M_t = 0,324 \cdot 10^{-12} M_t \\ \mathbf{q}_3 &= \frac{18(1+\mathbf{u})L_3}{5E} \frac{(b-2e)^2 + (h-2e)^2}{(b-2e)^3(h-2e)^3} M_t = 28,3 \cdot 10^{-12} M_t \end{aligned}$$

Les θ_i sont exprimés en radian et M_t en Nmm. → $K_{Mt} = \frac{M_t}{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3} = 34 \cdot 10^9 \text{ Nmm} / \text{rd}$

Notons que le tronçon (3) conduit à une rigidité de $35,3 \cdot 10^9$ dans le même système d'unités. Les deux premiers tronçons contribuent très peu à la rigidité globale.

Q.21.9 Dans la base globale $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ le vecteur \vec{GM} (G centre d'inertie de la section $x=L_t$) et l'effort \vec{F} s'expriment :

$$\vec{GM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -F \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{GM} \wedge \vec{F} = dF \vec{X}$$

Le torseur des efforts extérieurs rapporté à l'extrémité de la poutre et projeté dans la base liée à la direction de la poutre, a pour composantes :

$$N = -F \cos 15^\circ ; \quad T = -F \sin 15^\circ ; \quad M_t = d F \sin 15^\circ$$

Nota : il y a aussi une composante de flexion suivant l'inertie la plus forte de la poutre. On négligera son effet. Compte tenu des rigidités associées à chaque sollicitation, les déplacements du point M correspondant valent :

$$\begin{aligned} U_N &= N/K_N = 2,9 \cdot 10^{-7} F \\ U_T &= T/K_T = 3,3 \cdot 10^{-5} F \\ U_{Mt} &= d M_t/K_{Mt} = 4,9 \cdot 10^{-6} F \end{aligned} \quad (U_i \text{ en mm avec } F \text{ en N})$$

On constate que, pour cette configuration, le déplacement provenant de la souplesse de la poutre est le plus élevé en flexion quel que soit l'effort de coupe F. C'est donc essentiellement cette raideur que l'on cherche à augmenter dans la conception de la machine.

Section 22 : Pulsations propres en traction, flexion d'un seul bras

Q22.1 On isole un tronçon de poutre de longueur "dx" sollicité en traction, le PFD en projection sur l'axe de la poutre donne :

$$N(x+dx) - N(x) = \rho S dx \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} \quad \text{avec : } N(x) = ES \frac{\partial U(x,t)}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = \frac{E}{r} \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}$$

avec :
$$U(x,t) = \underline{u}(x) \cdot \cos \omega t \rightarrow \frac{E}{r} u'' + \omega^2 u = 0$$

Solutions du type :
$$\underline{u}(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x \quad \text{avec : } \omega^2 = \lambda^2 \frac{E}{r}$$

La poutre est encastree en $x = 0$: $U(x=0) = 0 \rightarrow A=0$. La déformée est donc une sinusoïde et la longueur d'onde L_k associée à la k-ème pulsation propre ω_k est donnée par :

$$L_k = 2\pi/\lambda_k = \frac{2\pi}{\omega_k} \sqrt{\frac{E}{r}}$$

Q.22.2 Sans la masse M, l'extrémité $x = L_t$ est libre de charge :

$$N(L_t) = 0 \rightarrow \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=L_t} = 0 \rightarrow \cos \lambda L_t = 0 \rightarrow \lambda_{k+1} = (2k+1) \frac{\pi}{2L_t}$$

Ce qui donne :
$$\omega_{k+1} = (2k+1) \frac{\pi}{2L_t} \sqrt{\frac{E}{r}} \quad \text{avec : } \omega_1 = \frac{1,57}{L_t} \sqrt{\frac{E}{r}} = 4000 \text{ rd/s} \quad \text{ou } f_1 = 636 \text{ Hz}$$

Q.22.3 Avec la masse M à l'extrémité $x = L_t$, la condition limite s'écrit :

$$-N(L_t) = M \left. \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right|_{x=L_t} \rightarrow -ES \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=L_t} = M \left. \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right|_{x=L_t} \rightarrow ES \lambda \cos \lambda L_t = M \omega^2 \sin \lambda L_t$$

Ce qui conduit à :

$$\frac{rSL_t}{IL_tM} = \tan \lambda L_t \quad \text{ou} : \begin{cases} \frac{A}{X} - \tan X = 0 \\ A = \frac{M_{poutre}}{M}; X = \lambda L_t \end{cases}$$

Dans notre cas : $A = 2,56$ ce qui correspond au graphique en annexe 1 - courbe noire pour $X=1$ - la poutre est deux fois et demi plus lourde que la masse à son extrémité. D'après ce même graphique, la première pulsation propre correspond à $X = 1,1$ (première intersection des courbes rouge et noire). La masse M réduit assez fortement la valeur de la première pulsation propre qui passe de 4000 rd/s sans masse à :

$$\omega_1 = \frac{1,1}{L_t} \sqrt{\frac{E}{r}} = 2800 \text{ rd/s} \quad \text{ou} \quad f_1 = 446 \text{ Hz.}$$

Soit un écart de près de 30%. Ce résultat est assez logique puisque globalement, sur un système élastique, la pulsation propre est de l'ordre de la racine de la raideur sur la masse. Si on augmente la masse à raideur égale, on réduit la pulsation propre.

La plupart des candidats ayant abordé cette partie, n'a traité que le cas d'école de la poutre encastrée libre. Rares sont ceux qui ont exprimé correctement la condition limite avec la masse et parmi eux, encore plus rares sont ceux qui arrivent à l'exploitation de la courbe donnée en annexe. D'une manière générale, les candidats ne font pas les applications numériques ce qui est une aberration sachant que les calculs proposés doivent permettre de justifier des choix de solution.

Q.22.4 On isole un tronçon de poutre de longueur "dx" sollicité en traction, le PFD donne les 2 relations suivantes :

$$T(x+dx) - T(x) = \rho S dx \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} \quad \text{et} \quad M_f(x+dx) - M_f(x) + dx T(x+dx) = \rho I dx \frac{\partial^2 j(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\text{Avec dans le cadre de l'hypothèse de Bernoulli : } M_f(x) = EI \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2}$$

On montre que si la poutre est élançée il est légitime de négliger le terme d'inertie en rotation de la section devant le terme d'inertie en translation suivant Y. Ce qui conduit à l'équation différentielle du quatrième ordre :

$$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} + \frac{EI}{rS} \frac{\partial^4 V(x,t)}{\partial x^4} = 0$$

$$\text{Avec : } V(x,t) = \underline{v}(x) \cos \omega t \quad \text{cette relation devient : } \underline{w}^2 \underline{v}(x) = \frac{EI}{rS} \underline{v}^{(4)}(x)$$

La forme proposée dans l'énoncé vérifie la relation précédente pour toutes valeurs de λ telles que :

$$\underline{w}^2 = I^4 \frac{EI}{rS}$$

De plus, si la poutre est encastrée en $x=0$, les conditions limites en déplacement et rotation donnent :

$$\underline{v}(0) = 0 \rightarrow \alpha + \gamma = 0 \quad \text{et} \quad \underline{v}'(0) = 0 \rightarrow \beta + \delta = 0$$

Q.22.5 Si l'extrémité est libre (pas de masse) on aboutit aux conditions classiques :

$$M_f(L_t) = 0 \rightarrow \underline{v}''(L_t) = 0 \rightarrow \alpha(\cos \lambda L_t + \text{ch} \lambda L_t) + \beta(\sin \lambda L_t + \text{sh} \lambda L_t) = 0$$

$$T(L_t) = 0 \rightarrow \underline{v}'''(L_t) = 0 \rightarrow \alpha(\sin \lambda L_t - \text{sh} \lambda L_t) - \beta(\cos \lambda L_t + \text{ch} \lambda L_t) = 0$$

On doit avoir un déterminant nul pour ne pas tomber sur la solution triviale $\alpha = \beta = 0$. Ce qui

conduit à la relation définissant les valeurs de λ_k possibles :

$$\cos \lambda L_t = -\frac{1}{\operatorname{ch} \lambda L_t}$$

Graphiquement ou par itération, on obtient les valeurs suivantes :

$$\lambda_1 L_t = 0,597p ; \lambda_2 L_t = 1,491p ; \lambda_{k+1} L_t \sim (2k+1)p/2$$

On en déduit la première pulsation propre en flexion de la poutre :

$$\omega_1 = \frac{(0,597\pi)^2}{L_t^2} \sqrt{\frac{EI}{rS}} = 253 \text{rd/s} \quad \text{ou} \quad f_1 = 40,2 \text{ Hz (8x moins qu'en traction)}$$

Avec la masse M à l'extrémité, la condition sur le moment fléchissant ne change pas, mais la condition sur l'effort tranchant devient :

$$-T(L_t) = M \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} \Big|_{x=L_t} \rightarrow EI \frac{\partial^3 V(x,t)}{\partial x^3} \Big|_{x=L_t} = M \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} \Big|_{x=L_t}$$

$$\rightarrow EI \lambda^3 \{ \alpha(\sin \lambda L_t - \operatorname{sh} \lambda L_t) - \beta(\cos \lambda L_t + \operatorname{ch} \lambda L_t) \} = -M \omega^2 \{ \alpha(\cos \lambda L_t - \operatorname{ch} \lambda L_t) + \beta(\sin \lambda L_t - \operatorname{sh} \lambda L_t) \}$$

$$\rightarrow \alpha(\sin \lambda L_t - \operatorname{sh} \lambda L_t) - \beta(\cos \lambda L_t + \operatorname{ch} \lambda L_t) + \lambda L_t \frac{M}{M_{\text{poutre}}} \{ \alpha(\cos \lambda L_t - \operatorname{ch} \lambda L_t) + \beta(\sin \lambda L_t - \operatorname{sh} \lambda L_t) \} = 0$$

Cette dernière équation associée à la condition limite $M_f(L_t) = 0$ donne un système dont le déterminant doit être nul pour éviter la solution triviale $\alpha = \beta = 0$.

En posant, comme pour la question 22.3 : $A = M_{\text{poutre}}/M$ et $X = \lambda L_t$ le déterminant conduit à la relation suivante :

$$\frac{\sin X \operatorname{ch} X - \operatorname{sh} X \cos X}{1 + \cos X \operatorname{ch} X} - \frac{A}{X} = 0$$

Que l'on peut résoudre graphiquement grâce au graphique de l'annexe 2. Ce qui donne pour la première racine : $X_1 = 1,4$. D'où on tire la valeur de la première pulsation propre de flexion :

$$\omega_1 = \frac{1,4^2}{L_t^2} \sqrt{\frac{EI}{rS}} = 141 \text{rd/s} \quad \text{ou} \quad f_1 = 22,4 \text{ Hz (44% de différence avec le cas sans masse)}$$

Soit une fréquence propre 20 fois plus faible en flexion (22Hz) qu'en traction (446Hz).

Q.22.6 La première fréquence propre de flexion se trouve dans la plage d'excitation correspondant à l'usinage TGV (0,5 à 50Hz). Il y a donc risque de résonance. Nous allons voir dans la partie qui suit comment la structure parallèle de la machine présentée permet de réduire les risques de résonance.

Section 23 : Détermination approchée des pulsations et modes propres par la méthode des éléments finis

Q23.1 On isole un tronçon de poutre de longueur " dx " sollicité en traction, le PFD en projection sur l'axe de la poutre donne :

Partie 3: Mécanique des fluides

Section 31 : Mise en équation du vérin d'équilibrage. Etude de l'écoulement de l'huile entre le vérin et l'accumulateur en régime établi.

Q.31.1 - Lorsque le système est à l'arrêt, les forces en présence sont le poids que l'on équilibre et les efforts de pression de l'huile sur le piston du vérin. On peut négliger en première approche l'influence du frottement. On a donc $\sum F_{ext} = 0$ d'où :

$$/ x_1 \quad -(M+m)g.\sin(\phi_{10}) + p_1.S_1 = 0 \quad (\text{en pression relative})$$

La pression p_1 de l'huile sous le piston en fonction des différentes masses et des dimensions du vérin est :

$$p_1 = (M+m)g.\sin(\phi_{10}) / S_1$$

A.N. $p_1 = 19,43.10^5 \text{ Pa}$ (19,4 bar)

Q.31.2 - Lorsque la machine est en mouvement, la force F_m exercée par le bras de la machine sur la tige du vérin est décomposable en deux termes : le poids que l'on équilibre et l'action du moteur linéaire F_{ml} qui peut être motrice ou réceptrice. La force de frottement s'oppose toujours au déplacement. L'équation en dynamique du vérin s'écrit donc :

- pour un mouvement descendant

$$/ x_1 \quad (M+m).d^2 x_1/dt^2 = p_1.S_1 + F_f - (M+m)g.\sin(\phi_{10}) + F_{ml}$$

- pour un mouvement ascendant

$$/ x_1 \quad (M+m).d^2 x_1/dt^2 = p_1.S_1 - F_f - (M+m)g.\sin(\phi_{10}) + F_{ml}$$

Nota : Lorsque la vitesse est constante, l'accélération $d^2 x_1/dt^2$ est nulle.

Q.31.3 – Dans ce cas, de l'huile se trouve entre le piston et le cylindre du vérin. Le jeu étant faible par rapport au diamètre du piston, le problème est modélisable par un écoulement de type Poiseuille plan. Une paroi est fixe, l'autre est mobile, avec une vitesse égale à celle du piston. La force de frottement visqueux a la forme suivante :

$$F_{fv} = \tau.S_{latérale\ piston}$$

$$F_{fv} = \mu. \frac{\partial v}{\partial n} . S_{latérale\ piston}$$

On peut supposer une répartition linéaire des vitesses, le gradient des vitesses $\frac{\partial v}{\partial n}$ est proportionnel à la vitesse du vérin, d'où :

$$F_{fv} = f.dx_1/dt \quad (\text{proportionnalité entre la force de frottement et la vitesse du piston du vérin}).$$

$$\mathbf{F}_f = \mathbf{F}_{fv} + \mathbf{F}_{fsec}$$

Q.31.4 - Expression locale de la conservation de la masse pour un fluide incompressible.

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \text{div} \mathbf{r} \vec{u} = 0$$

Q.31.5 - Expression vectorielle des équations générales de la dynamique des fluides newtoniens (équations de Navier-Stokes)

$$\mathbf{r} \vec{f} - \text{grad} p + \mathbf{m} \Delta \vec{u} = \mathbf{r} \frac{D \vec{u}}{Dt}$$

Pour déterminer dans une section donnée de la conduite la répartition des vitesses, il faut simplifier le vecteur vitesse.

$$\text{On a } \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_k(r, z) \end{pmatrix}$$

L'équation de continuité donne : $\frac{\partial u_k}{\partial z} = 0$

$$/\vec{e}_k : 0 = \frac{-dp}{L} + \mathbf{m} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_k}{\partial r} \right)$$

$$u_k = \frac{dp}{L} \cdot \frac{r^2}{4\mathbf{m}} + A \ln r + B$$

$$\text{C.L.: } r = R \quad u_k = 0 \Rightarrow B = \frac{-dp}{L} \cdot \frac{R^2}{4\mathbf{m}}$$

$$r = 0 \quad \frac{du_k}{dr} = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$\text{d'où } \boxed{u_k = \frac{-dp}{L} \frac{1}{4\mathbf{m}} (R^2 - r^2)}$$

Q.31.6 - Pour relier le débit volumique d'huile Q_v , le gradient de pression $\frac{dp}{L}$, la viscosité dynamique μ de l'huile et le rayon R de la conduite, il faut effectuer une intégration.

$$\text{On a } Q_v = \int_S \vec{u} \cdot \vec{n} \cdot dS = \int_0^R u_k \cdot 2\pi r \cdot dr \quad \text{d'où } Q_v = \frac{-dp}{L} \frac{\pi R^4}{8\mathbf{m}}$$

Pour relier le gradient de pression et la vitesse débitante de l'huile u_m , il suffit de noter que $u_m = Q_v/S$.

$$\text{On a } u_m = \frac{Q_v}{S} = \frac{-dp}{L} \frac{pR^4}{8m} \cdot \frac{1}{pR^2} = \frac{dp}{L} \cdot \frac{R^2}{8m} \Rightarrow \boxed{\frac{dp}{L} = \frac{-8mu_m}{R^2}}$$

Puis on traduit la conservation du débit.

$$Q_v = v \cdot S_1 = u_m \cdot S \Rightarrow \boxed{u_m = v \cdot S_1 / S}$$

Q.31.7 - Expression de la contrainte de viscosité τ_p ,

$$\text{On a } t_p = m \left(\frac{\partial u_k}{\partial r} \right)_{r=R}$$

Relation entre τ_p et $\frac{dp}{L}$.

$$\left(\frac{\partial u_k}{\partial r} \right)_{r=R} = \frac{dp}{L} \cdot \frac{R}{2\mu} \quad \text{d'où} \quad \boxed{t_p = m \frac{dp}{L} \cdot \frac{R}{2\mu}}$$

La force de frottement exercée par l'huile sur la paroi de la conduite est :

$$F_f = \tau_p \cdot S_{\text{paroi}} = m \frac{dp}{L} \cdot \frac{R}{2\mu} \cdot 2pR \cdot L = \Delta p_{\text{conduite}} pR^2$$

$$\boxed{F_f = \Delta p_{\text{conduite}} \cdot \pi R^2}$$

La puissance perdue par frottement pour une vitesse débitante de l'huile u_m et une longueur de conduite L est :

$$P_f = F_f \cdot u_m = \Delta p_{\text{conduite}} \cdot \pi R^2 \cdot u_m \Rightarrow \boxed{P_f = \Delta p_{\text{conduite}} \cdot Q_v}$$

Q.31.8 - Relation entre le coefficient de perte de charge et le nombre de Reynolds Re .

$$I = - \frac{\frac{dp}{L} \cdot D}{\frac{ru_m^2}{2}} = - \frac{\frac{-8\mu u_m}{R^2} \cdot D}{\frac{ru_m^2}{2}} = \frac{\frac{16\mu \cdot D}{D^2/4}}{ru_m} = \frac{64\mu}{r \cdot u_m \cdot D} = \frac{64}{Re}$$

$$\boxed{I = \frac{64}{Re}} \quad (\text{Résultat élémentaire de dynamique des fluides visqueux})$$

Q.31.9 - Le terme $u_m^2/2$ dans l'équation de Bernoulli représente l'énergie cinétique du fluide par unité de masse. Lorsqu'on utilise la vitesse débitante, il est normalement nécessaire de faire apparaître un coefficient correctif appelé coefficient d'énergie cinétique. Il est égal à 2 en régime laminaire. Lorsque le fluide débouche dans la chambre du vérin ou dans l'accumulateur, cette énergie cinétique est perdue.

Q.31.10 - Pour obtenir une relation entre la pression p_2 dans l'accumulateur, la pression p_1 dans le vérin, λ , les différents ζ , la vitesse v du vérin et les différentes variables géométriques

de l'installation, on applique le théorème de Bernoulli généralisé entre un point 1 dans la chambre du vérin et un point 2 de l'accumulateur (on néglige l'influence des forces de pesanteur).

$$p_1 + r \frac{v_1^2}{2} = p_2 + r \frac{v_2^2}{2} + \Delta p$$

$$\text{On a } v_1 = v \quad ; \quad v_2 \approx 0 \quad ; \quad \Delta p = \left(\left(1 \frac{L}{D} \right) + \sum z \right) \frac{r u_m^2}{2}$$

$$\text{D'où } p_1 - p_2 = \left(\left(1 \frac{L}{D} \right) + \sum z \right) \frac{r u_m^2}{2} - \frac{r v^2}{2}$$

$$p_1 - p_2 = \left(\left(1 \frac{L}{D} \right) + \sum z \right) \frac{r v^2}{2} \frac{S_1^2}{S^2} - \frac{r v^2}{2}$$

$$p_1 - p_2 = \left(\left(1 \frac{L}{D} + \sum z \right) \frac{S_1^2}{S^2} - 1 \right) \frac{r v^2}{2}$$

Cette relation peut être ramenée à la forme suivante : $p_1 - p_2 = A \cdot v + B \cdot v^2$

$$\text{On a pour les pertes de charge linéaires : } \Delta P_{\text{linéaires}} = \frac{8 \mu u_m L}{R^2} = \frac{8 \mu u_m L}{R^2} \frac{S_1}{S} v = A \cdot v$$

$$p_1 - p_2 = A \cdot v + \left(\left(\sum z \right) \frac{S_1^2}{S^2} - 1 \right) \frac{r v^2}{2} = A \cdot v + B \cdot v^2$$

Lorsque le vérin monte, la section de la conduite étant constante, les pertes de charge linéaires sont inchangées. Les pertes de charge singulières à l'entrée et la sortie peuvent être différentes selon la configuration. En première approche, on peut supposer que seul le signe de $p_1 - p_2$ change.

Q.31.11 – A.N.

$$p_1 - p_2 = 2,068 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Puissance dissipée par frottement pour une vitesse v du vérin.

$$P_f = (p_1 - p_2) \cdot Q_v = (p_1 - p_2) \cdot v \cdot S_1$$

$$\text{A.N. } P_f = 524 \text{ W}$$

Pour justifier l'hypothèse sur l'écoulement, il faut calculer le nombre de Reynolds. Dans une conduite circulaire, on peut supposer l'écoulement laminaire si $Re < 2300$

$$Re = \rho \cdot u_m \cdot D / \mu = 1450$$

Section 32 : Etude de l'écoulement de l'huile entre le vérin et l'accumulateur en régime non établi.

Q.32.1 - Expression du théorème de Bernoulli en régime non permanent appliqué en deux points d'une ligne de courant.

Pour un écoulement unidimensionnel le long d'une ligne de courant, $\int \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \vec{v} \cdot dt$ est égal à $\int \frac{\partial v}{\partial t} dx$.

Si l'on néglige l'action de la pesanteur, le théorème de Bernoulli en régime non permanent s'écrit (pour l'unité de masse) :

$$\int \frac{\partial v}{\partial t} dx + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = C^{te}$$

Q.32.2 - Pour relier $p_1 - p_2$ à l'accélération du vérin et aux variables géométriques de l'installation, on applique successivement le théorème de Bernoulli

- entre un point 1 au niveau du piston et un point 1' proche de l'entrée dans la conduite
- entre un point 1'' à l'entrée de la conduite et un point 2 à la sortie de la conduite.

$$\text{On a } \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = \int_1^{1'} \frac{\partial v}{\partial t} dx + \frac{p_{1'}}{\rho} + \frac{v_{1'}^2}{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = C^{te} = a \text{ (l'accélération du vérin est retransmise au fluide) ; } \int_1^{1'} dx = C ; v_1 = v_{1'} = v$$

$$\text{d'où } \frac{p_1}{\rho} = a.C + \frac{p_{1'}}{\rho}$$

$$\frac{p_{1''}}{\rho} + \frac{v_{1''}^2}{2} = \int_{1''}^2 \frac{\partial u}{\partial t} dx + \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2}$$

$$v_{1''} = v_2 = u \text{ (vitesse de l'huile dans la conduite) ; } u = v.S_1/S ; \frac{\partial u}{\partial t} = C^{te} = a.S_1/S ;$$

$$\int_{1''}^2 dx = L$$

$$\text{d'où } \frac{p_{1''}}{\rho} = a.\frac{S_1}{S}.L + \frac{p_2}{\rho}$$

On néglige l'influence de la variation de la vitesse à l'entrée: $p_{1'} = p_{1''}$

d'où finalement
$$p_1 - p_2 = r.a.(C + \frac{S_1}{S}L)$$

Q.32.3 –L'expression de la puissance instantanée nécessaire à l'accélération de l'huile est :

$$P_{acc} = (p_1 - p_2).Q_v = (p_1 - p_2).v.S_1$$

$$P_{acc} = r.a.(C + \frac{S_1}{S}L).S_1.v$$

Il faut un temps t_1 pour passer de 0 à v . Pour une accélération constante, $t_1 = v/a$.
L'énergie que le piston du vérin doit fournir à l'huile lorsqu'il passe d'une vitesse nulle à une vitesse v est obtenue par intégration.

$$\text{On a : } E = \int_0^{t_1} P_{acc}.dt = r.a.(C + \frac{S_1}{S}L).S_1.\int_0^{t_1} v.dt = r.a.(C + \frac{S_1}{S}L).S_1.\int_0^{t_1} at.dt$$

$$E = r.a.(C + \frac{S_1}{S}L).S_1.\left[\frac{at^2}{2}\right]_0^{v/a}$$

$$E = \rho(C + L.S_1/S).S_1.v^2/2$$

Autre approche du problème qui permet de trouver le résultat.

$$\begin{aligned} E &= \rho S_1.C.v^2/2 + \rho S.L.(S_1/S)^2.v^2/2 \\ &= \rho S_1.C.v^2/2 + \rho S.L.u^2/2 \quad (u = v.S_1/S) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } M_{h1} &= \rho S_1.C \quad (\text{Masse de l'huile dans la chambre inférieure du vérin}) \\ M_{h2} &= \rho S.L \quad (\text{Masse de l'huile dans la conduite}). \end{aligned}$$

$$E = M_{h1}.v^2/2 + M_{h2}.u^2/2$$

E représente l'énergie nécessaire pour amener le fluide initialement au repos à une vitesse donnée. C'est l'énergie cinétique du fluide.

Applications numériques.

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 &= 4,5.10^5 \text{ Pa} \\ P_{acc} &= 1130 \text{ W} \\ E &= 37,6 \text{ J} \end{aligned}$$

Conclusion : Le régime transitoire peut influencer légèrement le fonctionnement de la machine.

Section 33 : Etude de l'accumulateur. Bilan des puissances.

Q.33.1 – On applique le PFD au niveau de la membrane de l'accumulateur. La force de frottement et les quantités d'accélération sont faibles. On peut supposer que $p_2 \approx p_2'$.

Q.33.2 – Pour établir l'expression du volume initial d'azote V_{20} dans l'accumulateur en fonction de la pression P_{20} , de $\Delta p_{\max i}$ et des caractéristiques géométriques du vérin, il faut traduire l'hypothèse sur la nature de la transformation. La compression est supposée isentropique. On a :

$$P_{20} \cdot V_{20}^\gamma = P_{21} \cdot V_{21}^\gamma$$

$$V_{21} = V_{20} - \Delta V \quad ; \quad \Delta V = C \cdot \pi D^2 / 4.$$

$$P_{21} = P_{20} \left(\frac{V_{20}}{V_{20} - \Delta V} \right)^\gamma$$

$$\Delta P_{\max i} = P_{21} - P_{20} = P_{20} \left(\left(\frac{V_{20}}{V_{20} - \Delta V} \right)^\gamma - 1 \right)$$

$$\frac{\Delta P_{\max i}}{P_{20}} + 1 = \left(\frac{V_{20}}{V_{20} - \Delta V} \right)^\gamma$$

$$\text{Posons } K_1 = \left(\frac{\Delta P_{\max i}}{P_{20}} + 1 \right)^{1/\gamma}$$

$$V_{20} = K_1 (V_{20} - \Delta V)$$

$$V_{20} = \frac{K_1}{K_1 - 1} \cdot \Delta V$$

Le volume minimum de l'accumulateur est : $V_1 = 1,1 \cdot V_{20}$

Application numérique:

$$K_1 = 1,1029 \quad ; \quad V_{20} = 7,53 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \quad ; \quad V_1 = 8,29 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

Q.33.3 - Travail de compression W lorsque le vérin se déplace sur la totalité de sa course.

$$W = \int_0^1 -P dV \quad \text{avec } P \cdot V^\gamma = P_{20} \cdot V_{20}^\gamma = P_{21} \cdot V_{21}^\gamma = C^{\text{te}} = K_2$$

$$\begin{aligned} W &= -K_2 \int_{V_{20}}^{V_{21}} V^{-\gamma} dV = \frac{-K_2}{-\gamma + 1} \left[V^{-\gamma+1} \right]_{V_{20}}^{V_{21}} \\ &= \frac{K_2}{\gamma - 1} \left[V_{21}^{-\gamma+1} - V_{20}^{-\gamma+1} \right] \end{aligned}$$

$$W = \frac{1}{g-1} (P_{21}V_{21} - P_{20}V_{20})$$

A.N. $W = 1537 \text{ J}$

Q.33.4 - La compression est isentropique. On utilise les relations de Poisson ou la loi des gaz parfaits pour calculer la température T_{21} .

$$\frac{T_{21}}{T_{20}} = \left(\frac{P_{21}}{P_{20}} \right)^{\frac{g-1}{g}} ; T_{21} = T_{20} \frac{P_{21}}{P_{20}} \frac{V_{21}}{V_{20}} \Rightarrow T_{21} = 312 \text{ K}$$

Validation de l'hypothèse d'une évolution isentropique.

La température étant proche de celle du milieu ambiant, la compression étant rapide, la transformation peut être supposée adiabatique. Le frottement peut être négligé en première approche, la compression est ainsi réversible. L'hypothèse d'une évolution isentropique est donc satisfaisante. Toutefois la variation de température est faible, on peut donc modéliser plus simplement la compression par une **évolution isothermique**.

Le travail de compression si l'évolution est supposée isothermique est :

$$\begin{aligned} W_2 &= \int_0^1 -P dV \text{ avec } P.V = C^{\text{te}} = K_2 \\ &= -K_2 \int_{V_{20}}^{V_{21}} \frac{dV}{V} = -K_2 [\ln V]_{V_{20}}^{V_{21}} \\ &= -P_{20} \cdot V_{20} \ln \frac{V_{21}}{V_{20}} \end{aligned}$$

A.N. $W_2 = 1507 \text{ J}$ (Proche de W_1)

Q.33.5 - Pour un déplacement x_p du piston, on envoie un volume $\Delta V = S_1 \cdot x_p$ d'huile de la chambre inférieure du piston vers l'accumulateur. Le volume d'azote dans l'accumulateur devient :

$$V = V_{20} - \Delta V$$

$$\text{On a : } W_2 = -P_{20} \cdot V_{20} \ln \frac{V_{20} - \Delta V}{V_{20}}$$

On effectue un développement limité du logarithme.

$$W_2 \approx -P_{20} \cdot V_{20} \frac{-\Delta V}{V_{20}} = P_{20} S_1 x_p$$

On peut vérifier pour $x_p = C$ la validité de la relation : $W_2 = 1435 \text{ J}$ ($\approx W_2$)

On peut donc en déduire la puissance de compression :

$$P_{\text{comp}} = P_{20} S_1 \frac{dx}{dt} = P_{20} \cdot S_1 \cdot v = 5127 \text{ W}$$

Q.33.6 - Lorsque la vitesse est constante, il faut vaincre les pertes de charge, le frottement du piston, comprimer l'azote. On récupère l'énergie potentielle de la masse qu'on équilibre. La puissance nécessaire à la descente du piston du vérin lorsque la vitesse v est constante est donc :

$$P_{\text{nécessaire}} = (p_1 - p_2) \cdot S_1 \cdot v + F_f \cdot v + P_{20} \cdot S_1 \cdot v - (M + m)g \cdot \sin(\phi_{10}) \cdot v$$

$$\text{A.N. } P_{\text{nécessaire}} = 524 + 40 + 5127 - 4885 = 806 \text{ W}$$

Conclusion: On constate que le système réalise bien une fonction d'équilibrage. En effet, lorsque le piston descend, la puissance de compression correspond sensiblement à celle qu'on récupère par gravité. Lors de la montée, la puissance récupérée par la détente de l'azote compense celle nécessaire pour vaincre la gravité.

La puissance transmise par le moteur au bras du piston du vérin sert principalement à compenser les frottements.