

épreuve de mécanique des systèmes et des milieux déformables

Durée : 8 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique - à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

Tout document et tout autre matériel électronique sont interdits.

Note préliminaire

Le sujet comporte trois parties complètement indépendantes. Il est recommandé de consacrer 1/3 de la durée totale de l'épreuve à chacune des parties.

Les réponses aux **trois parties** doivent être rédigées sur **trois ensembles de copies séparés**.

Ces trois ensembles de copies seront remis en fin d'épreuve dans une copie-chemise.

Contenu du sujet

Introduction et présentation du mécanisme pages 2 et 3

Première partie : **Mécanique des solides indéformables** pages 4 à 10

Section 11 : Détermination du modèle géométrique direct

Section 12 : Etude des efforts dans les moteurs linéaires

Ces deux sections sont partiellement indépendantes.

Deuxième partie : **Mécanique des solides déformables** pages 11 à 19

Section 21 : Calcul des raideurs en traction, flexion et torsion d'un bras

Section 22 : Pulsations propres en traction flexion d'un seul bras

Section 23 : Détermination approchée des pulsations et modes propres par la méthode des éléments finis

Ces trois sections sont partiellement indépendantes.

Troisième partie : **Mécanique des fluides** pages 20 à 26

Section 31: Mise en équations du vérin d'équilibrage. Etude de l'écoulement de l'huile entre le vérin et l'accumulateur en régime établi

Section 32 : Etude de l'écoulement de l'huile entre le vérin et l'accumulateur en régime non établi

Section 33 : Etude de l'accumulateur. Bilan des puissances

Ces trois sections sont partiellement indépendantes.

Annexes 1 & 2 : Graphes nécessaires aux réponses 22.3 et 22.5 page 27

Nomenclature page 28

Le texte du sujet comporte 28 pages numérotées de 1 à 28.

Machine à structure parallèle pour usinage et travail à grande vitesse (UTGV)

Introduction

L'usinage et le travail « grande vitesse » (UTGV) représentent un enjeu économique important pour des industries telles que l'automobile, l'aéronautique, etc.... Si l'usinage à grande vitesse concerne plus particulièrement l'opération de coupe ou d'enlèvement de matière, le travail à grande vitesse englobe toutes les opérations relatives à un cycle de production : positionnement, montage, changement d'outils.... Ces deux aspects, usinage et travail, se retrouvent étroitement liés dans un contexte de machine-outil.

Les avantages de ce procédé résident dans la diminution des temps d'usinage associée à une amélioration de l'état de surface des pièces par rapport à l'usinage conventionnel. Cette dernière qualité est directement liée aux caractéristiques dimensionnelles et mécaniques de la machine (précision, rigidité, jeux dans les liaisons) ainsi qu'aux paramètres de coupe. Ainsi les structures de machines UTGV doivent être très rigides afin d'assurer une bonne précision et un bon état de surface. D'autre part, les masses à mouvoir doivent être réduites afin d'atteindre des accélérations et des vitesses élevées tout en conservant des actionneurs de taille raisonnable. Rigidité élevée et masse faible, ces deux exigences sont contradictoires. La recherche d'un compromis représente le problème principal de la conception de ces machines.

Classiquement, les machines-outils présentent des structures série ou cartésienne, formées d'une chaîne cinématique ouverte (succession d'éléments reliés par des liaisons glissières). Elles sont bien connues et maîtrisées par les constructeurs. Cependant, pour atteindre les valeurs de rigidités souhaitées, il est nécessaire de concevoir des structures massives afin que les performances dynamiques (vitesses et accélérations) soient réduites.

Depuis quelques années, des études sont en cours sur l'utilisation d'architectures à cinématique parallèle qui sont formées de chaînes cinématiques fermées. La mise en parallèle des éléments permet d'avoir une rigidité plus élevée et des masses plus faibles, ce qui donne accès à des performances dynamiques plus importantes. En contrepartie, elles présentent un fort couplage entre les paramètres du mouvement de l'organe terminal (outil) et ceux des articulations motorisées. De plus, les performances sont variables à l'intérieur de l'espace de travail. Des études approfondies sont donc nécessaires pour bien maîtriser le comportement de ces machines ; les points clés de ces études seront abordés de manière simplifiée dans ce sujet.

Présentation du mécanisme

La perspective de la nomenclature (page 28) présente la machine à structure parallèle. Elle est issue d'un brevet déposé par la société Process Conception Ingénierie en 1999 sous le numéro 99.13920.

Les principales pièces constituant la machine sont :

- Deux caissons 1 guidés en rotation par rapport au bâti et assurant le guidage en translation des bras ;
- Deux bras 8 et 10, guidés en translation par rapport aux caissons ;
- La broche 16 tournant dans un coulant. Ce coulant en deux parties est constitué des pièces 14 et 15. Il est fixé aux bras 8 et 10 ;
- Un massif-bâti 0 sur lequel sont rigidement ancrées les liaisons pivots assurant le guidage en rotation des caissons.

Aux quatre éléments précédents s'ajoutent les équipements complémentaires suivants :

- Deux moteurs linéaires dont les primaires sont fixés aux caissons et les secondaires aux bras, ils assurent le positionnement de la broche dans le plan (X, Y) ;
- Deux moteurs linéaires dont les primaires sont fixés au coulant et les secondaires aux bras, ils assurent le positionnement suivant Z de la broche.

Première partie : Mécanique des solides indéformables

Afin de permettre d'aborder cette première partie, les deux paragraphes suivants décrivent respectivement la modélisation cinématique et le paramétrage associé d'une part et la géométrie et la distribution des masses des solides d'autre part.

Modélisation cinématique et paramétrage :

La figure 1.1 présente la modélisation cinématique et le paramétrage de la machine dans le plan. Afin de simplifier les notations, une numérotation différente de celle de la nomenclature est adoptée dans cette partie.

Le repère $R_0 (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est lié au massif-bâti 0 et assimilé à un repère galiléen. Le champ de pesanteur est défini par $\vec{g} = -g.\vec{y}_0$.

Le repère $R_1 (A_0, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ est lié au caisson 1 (de gauche). La liaison 1/0 est assimilée à une liaison pivot parfaite, d'axe (A_0, \vec{z}_0) . L'angle $\phi_{10}(t)$ désigne le paramètre associé au mouvement du caisson par rapport au bâti 0, $\phi_{10}(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$.

Le repère $R_4 (A_4, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_0)$ est lié au caisson 4 (de droite). La liaison 4/0 est assimilée à une liaison pivot parfaite, d'axe (A_4, \vec{z}_0) . L'angle $\phi_{40}(t)$ désigne le paramètre associé au mouvement du caisson par rapport au bâti 0, $\phi_{40}(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_4)$.

La distance entre les points A_0 et A_4 vaut : $\overrightarrow{A_0 A_4} = L.\vec{x}_0$ avec $L = 1\,010$ mm.

Le repère $R_2 (A_2, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ est lié au bras 2. La liaison 2/1 est assimilée à une liaison glissière parfaite de direction (\vec{x}_1) .

Le repère $R_3 (A_2, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_0)$ est lié au bras 3. La liaison 4/3 est assimilée à une liaison glissière parfaite de direction (\vec{x}_4) .

La liaison 3/2 est assimilée à une liaison pivot parfaite d'axe (A_2, \vec{z}_0) . L'angle $\phi_{32}(t)$ désigne le paramètre associé au mouvement du bras 3 par rapport au bras 2 : $\phi_{32}(t) = (\vec{x}_1, \vec{x}_4)$. Notons que cet angle est lié aux deux précédents et vaut $\phi_{32}(t) = \phi_{40}(t) - \phi_{10}(t)$

La position du point A_2 est définie par le vecteur $\overrightarrow{A_0 A_2} = s_{21}(t).\vec{x}_1$ avec $s_{21}(t)$ paramètre de la liaison glissière 2/1. La position du point A_2 est aussi définie par le vecteur $\overrightarrow{A_4 A_2} = s_{34}(t).\vec{x}_4$ avec $s_{34}(t)$ paramètre de la liaison glissière 3/4.

Les bases $(\vec{x}_j, \vec{y}_j, \vec{z}_0)$ - $j = 0, 1$ et 4 - sont orthonormées directes.

La position de la broche est définie dans le plan par le point A_2 de coordonnées (x, y) . L'espace de travail est un carré de 630 mm de côté dans le plan dont les bornes vont de -315 à +315 mm pour x et de 1200 à 1830 mm pour y . La vitesse maximum en translation est de 120 m/mn et l'accélération de 20 m/s².

Les moteurs linéaires qui pilotent la translation des bras ont les caractéristiques suivantes :

- vitesse maximum : 151 m/mn ;
- effort nominal : 6 600 N ;
- effort maximum : 14 500 N.

Chaque liaison glissière est pilotée par deux moteurs linéaires qui assurent la translation.

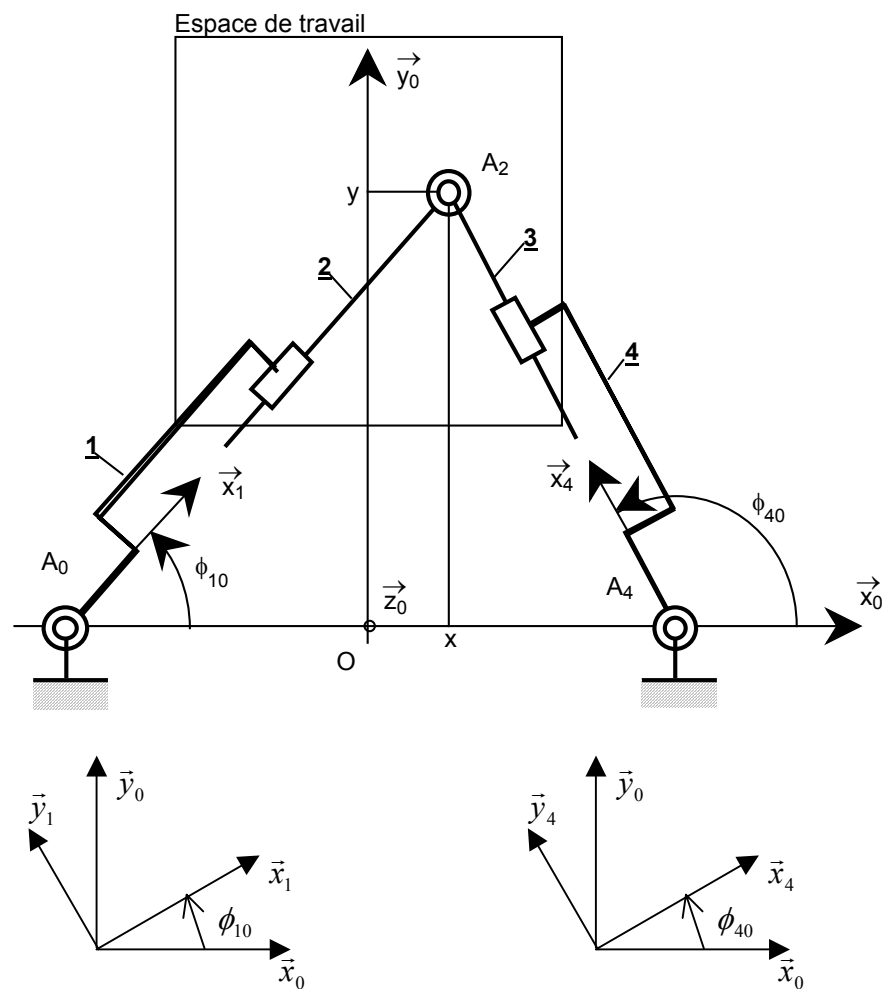


Figure 1.1 : Modélisation cinématique et paramétrage

Géométrie et distribution des masses pour les solides :

Caisson 1

Masse $m_1 = 230$ kg (comprenant le patin caisson, rail caisson, primaire caisson, etc ...). Le centre de gravité G_1 est défini par $\overrightarrow{A_0 G_1} = x_1 \vec{x}_1 + y_1 \vec{y}_1$ avec : $x_1 = 0,3$ m et $y_1 = 0,11$ m

$$\text{Matrice d'inertie, } \bar{I}(\text{caisson1}) = \begin{bmatrix} A_1 & -F_1 & 0 \\ -F_1 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{(A_0, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_0)} \quad \text{avec } C_1 = 10,5 \text{ kg.m}^2.$$

Bras 2

Masse $m_2 = 320 \text{ kg}$ (comprenant le bras, le demi coulant et la moitié de la masse de la broche). Le centre de gravité G_2 est défini par $\overrightarrow{A_2 G_2} = x_2 \vec{x}_1 + y_2 \vec{y}_1$ avec : $x_2 = -0,78 \text{ m}$ et $y_2 = 0,1 \text{ m}$.

$$\text{Matrice d'inertie, } \bar{I}(\text{bras2}) = \begin{bmatrix} A_2 & -F_2 & 0 \\ -F_2 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}_{(G_2, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_0)} \quad \text{avec } C_2 = 28 \text{ kg.m}^2.$$

Bras 3

Masse $m_3 = 320 \text{ kg}$ (idem bras 2). Le centre de gravité G_3 est défini par $\overrightarrow{A_2 G_3} = x_3 \vec{x}_4 + y_3 \vec{y}_4$ avec : $x_3 = -0,78 \text{ m}$ et $y_3 = 0,1 \text{ m}$

$$\text{Matrice d'inertie, } \bar{I}(\text{bras3}) = \begin{bmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ -F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}_{(G_3, \bar{x}_4, \bar{y}_4, \bar{z}_0)} \quad \text{avec } C_3 = 28 \text{ kg.m}^2.$$

Caisson 4

Masse $m_4 = 230 \text{ kg}$ (idem caisson 1). Le centre de gravité G_4 est défini par $\overrightarrow{A_4 G_4} = x_4 \vec{x}_4 + y_4 \vec{y}_4$ avec : $x_4 = 0,30 \text{ m}$ et $y_4 = 0,11 \text{ m}$

$$\text{Matrice d'inertie, } \bar{I}(\text{caisson4}) = \begin{bmatrix} A_4 & -F_4 & 0 \\ -F_4 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{bmatrix}_{(A_4, \bar{x}_4, \bar{y}_4, \bar{z}_0)} \quad \text{avec } C_4 = 10,5 \text{ kg.m}^2.$$

Section 11 : Détermination du modèle géométrique direct

La machine est un mécanisme à chaîne cinématique fermée simple et de mobilité cinématique égale à 2. Elle possède 2 liaisons glissières commandées par des moteurs linéaires et 3 liaisons pivots. Les modèles géométrique et cinématique de la machine permettent d'établir les relations entre les paramètres de l'espace articulaire (positions, vitesses et accélérations) du mécanisme en fonction de ceux de l'espace opérationnel (position, vitesse et accélération de la broche). Le problème à traiter est considéré comme plan : la position suivant l'axe \bar{z} de la broche, immédiate à déterminer, n'est pas étudiée ici.

L'objectif de cette section est d'exprimer les paramètres articulaires s_{21} et s_{34} en fonction de la position du point $A_2(x,y)$, afin de vérifier le dimensionnement des moteurs retenus pour la conception en terme de vitesse et d'accélération.

Q.11.1 - Déterminer les relations entre les paramètres articulaires et les paramètres de rotation en écrivant une fermeture géométrique.

Q.11.2 - Exprimer les coordonnées x et y de la position du point A_2 en fonction des paramètres articulaires s_{21} et ϕ_{10} .

Q.11.3 - Pour positionner la broche dans son espace de travail, il est nécessaire de connaître les coordonnées x et y en fonction des paramètres de la commande qui sont s_{21} et s_{34} . Déterminer la relation liant ϕ_{10} et ϕ_{40} aux paramètres de la commande en écrivant deux relations de la forme :

$$\cos(\phi_{10}) = f(L, s_{21}, s_{34}) \text{ et } \cos(\phi_{40}) = g(L, s_{21}, s_{34}).$$

Q.11.4 - Exprimer les relations qui lient la vitesse du point $A_2(x,y)$ aux vitesses des moteurs \dot{s}_{21} et \dot{s}_{34} en les mettant sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \dot{s}_{21} \\ \dot{s}_{34} \end{Bmatrix} \text{ avec } [J] = \begin{bmatrix} \cos(\phi_{10}) - K_1 y & -K_2 y \\ \sin(\phi_{10}) + K_1 x & K_2 x \end{bmatrix}$$

$[J]$ est la matrice jacobienne de la transformation $(\dot{s}_{21}, \dot{s}_{34}) \rightarrow (\dot{x}, \dot{y})$. Déterminer les expressions de K_1 et de K_2 en fonction de ϕ_{10} , L , x , y , ϕ_{40} .

Q.11.5 - Afin de vérifier le dimensionnement cinématique des moteurs de déplacement des glissières, la broche est positionnée au point de coordonnées (85, 1200) en mm. Le déplacement s'effectue suivant l'axe x à une vitesse de 120 m/mn par rapport au bâti. Calculer la vitesse des moteurs et conclure vis à vis de leur dimensionnement.

Q.11.6 - A partir de la mise en équations établie aux questions de Q.11.1 à Q.11.4, des calculs supplémentaires ont été réalisés en simulant un déplacement suivant un contour de l'espace de travail qui représente un carré de 630 mm de coté avec une loi de vitesse de consigne en trapèze (accélération 20 m/s², vitesse constante et décélération 20 m/s²). Les résultats sont présentés sur la figure 11.2. Conclure sur le choix des moteurs linéaires.

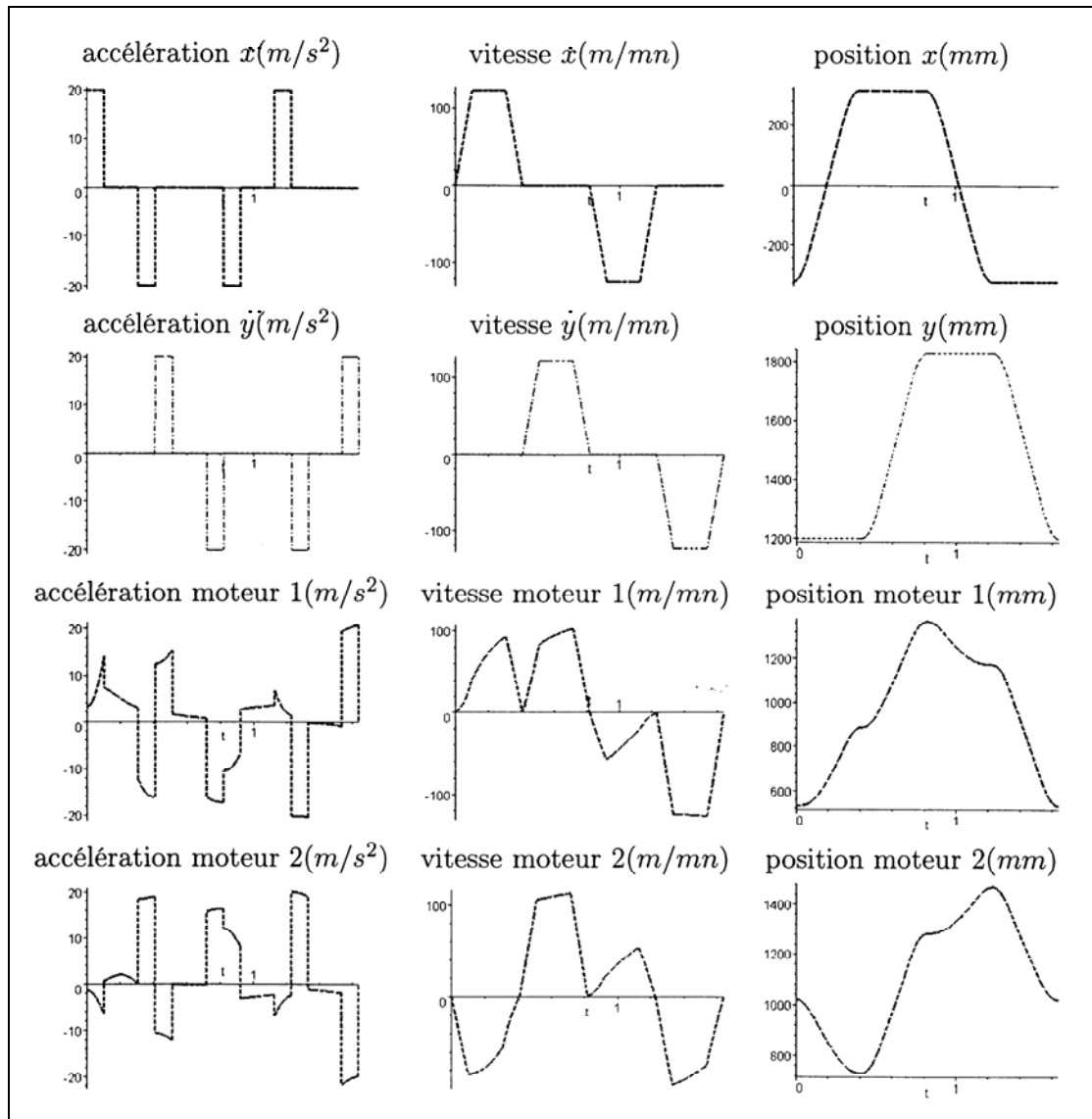


Figure 11.2 : Simulation de la cinématique

Section 12 : Etude des efforts dans les moteurs linéaires

Afin de pouvoir dimensionner les moteurs linéaires, nous allons établir le modèle dynamique de la machine dans le plan. Dans la mesure où elle présente une chaîne cinématique fermée, il est plus simple d'exprimer les termes d'énergie cinétique et potentielle en fonction de coordonnées généralisées. Dans cette phase d'avant-projet, nous considérons que les liaisons sont parfaites.

Notons T l'énergie cinétique et V l'énergie potentielle du système constitué des deux caissons et des deux bras ainsi que de l'ensemble des actionneurs assurant les différents déplacements. Le vecteur des coordonnées généralisées a pour expression $^T\{q\} = \{s_{21}, s_{34}, \phi_{10}, \phi_{40}\}$. $\{Q\}$ est le vecteur des forces généralisées. De plus, les paramètres cinématiques de ce système sont soumis à 2 équations de liaisons (fermeture géométrique de la question Q.11.1) que l'on peut exprimer

sous la forme $\{\Phi(q)\} = \{0\}$. A chacune, on associe un multiplicateur de Lagrange λ_i . Les équations décrivant le mouvement sont alors données par :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} + \frac{\partial}{\partial q_j} (\Phi_i \lambda_i) = Q_j \text{ pour } j = 1 \text{ à } 4 \text{ et } \Phi_i = 0 \text{ pour } i = 1 \text{ à } 2$$

Q.12.1 - Exprimer l'énergie cinétique T du système en la décomposant sur chacun des éléments du mécanisme.

Q.12.2 - Exprimer l'énergie potentielle V du système en la décomposant sur chacun des éléments du mécanisme.

L'effort d'usinage exercé par la pièce sur l'outil est rapporté au point A₂. Il est modélisé par deux composantes comme suit :

$$\{F_{ext \rightarrow bras}\} = \begin{Bmatrix} F_x \cdot \vec{x}_0 + F_y \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{A_2}.$$

Les forces de commande S_{ij} sont exercées par les moteurs entre les solides i et j. Elles sont de la forme :

$$\{S_{moteur \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} S_{21} \cdot \vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{A_2} \quad \{S_{moteur \rightarrow 3}\} = \begin{Bmatrix} S_{43} \cdot \vec{x}_3 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{A_2}.$$

Q.12.3 - Exprimer le vecteur des forces généralisées.

Q.12.4 - Exprimer les équations du mouvement et montrer qu'elles peuvent se mettre sous la forme :

$$[M(q)]\{\ddot{q}\} + [C(q, \dot{q})]\{\dot{q}\} + \{g(q)\} + [h(q)]\{\lambda\} = \{Q\}$$

où [M(q)] est la matrice de masse, [C(q, \dot{q})] la matrice de Coriolis, {g(q)} le vecteur des forces de gravité et [h(q)] la matrice relative aux coefficients des multiplicateurs de Lagrange.

Q.12.5 – A quoi correspondent les multiplicateurs de Lagrange λ_i ?

Q.12.6 - Dans un premier temps, pour dimensionner les moteurs, nous faisons l'hypothèse que seule la matrice de masse est prépondérante devant la matrice de Coriolis, les forces de gravité et la matrice [h(q)]. Ecrire le système d'équations correspondant.

Q.12.7 - Calculer les efforts dans les moteurs au point de coordonnées (85, 1200) en mm pour une accélération maximum suivant x et conclure sur l'hypothèse formulée.

Q.12.8 – La résolution des équations permet d'obtenir les efforts dans les moteurs. Les résultats d'un calcul correspondant au cycle de la question Q.11.6 sont donnés dans la figure 12.1. Conclure sur le dimensionnement des moteurs.

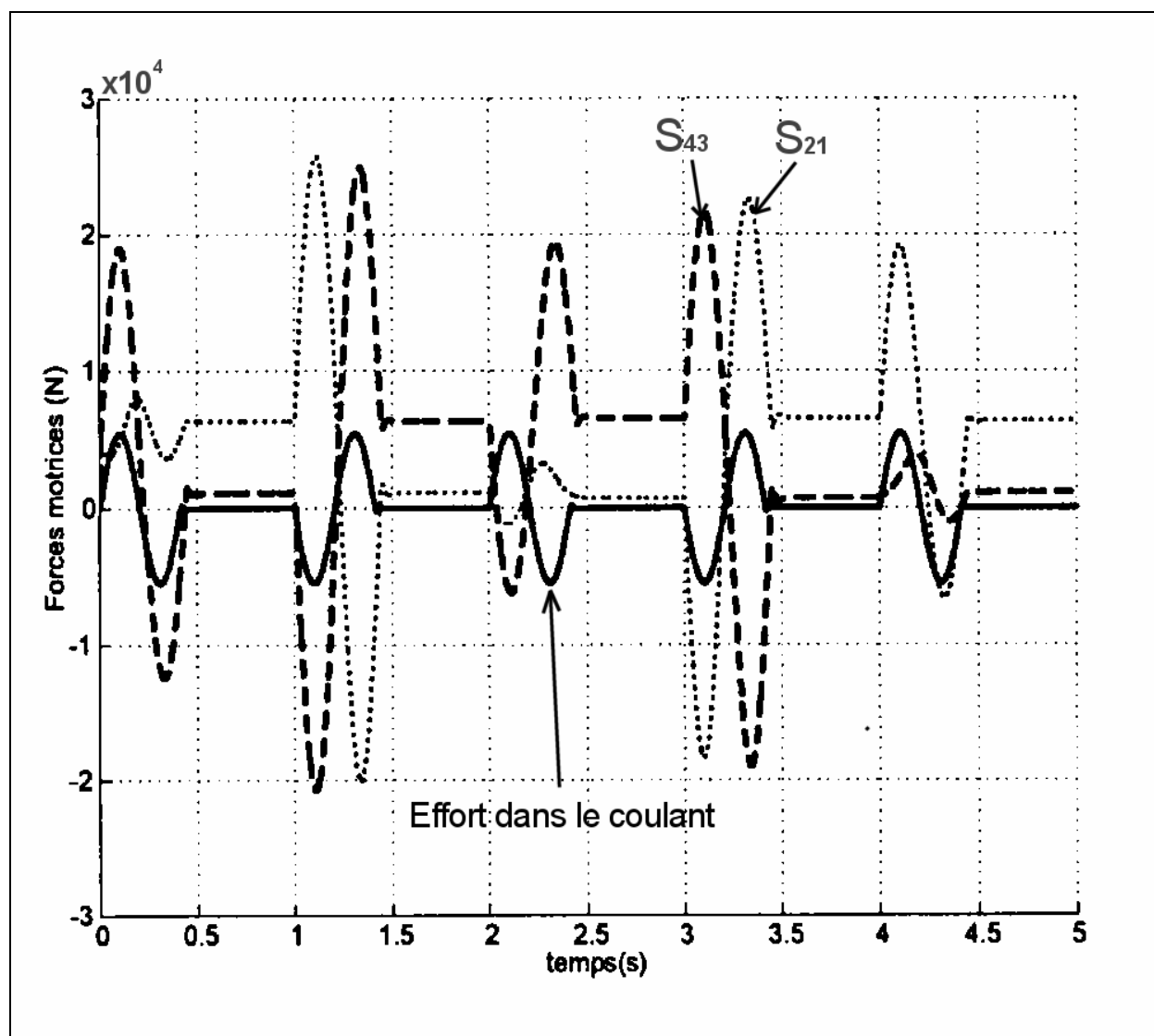


Figure 12.1 : Simulation de la dynamique

Deuxième partie : Mécanique des solides déformables

La stabilité du positionnement de la broche d'usinage dépend fortement de la rigidité de la structure de mise en position d'une part et des modes de vibration de cette même structure d'autre part. Dans cette partie, nous allons quantifier les raideurs en traction, flexion et torsion d'un des deux bras modélisé par une poutre à section variable. Cette modélisation nous permettra de définir un moment quadratique et une section équivalente pour la détermination simplifiée des modes propres. La comparaison de la pulsation critique d'un bras simple par rapport à l'association en parallèle des deux bras, solution effectivement retenue, montrera l'intérêt des systèmes à structure parallèle.

Section 21 : Calcul des raideurs en traction, flexion et torsion d'un bras

La figure 21.1 montre la schématisation retenue (poutre P) pour un ensemble : bras + caisson. Le caisson de longueur l est schématisé par une poutre de section en U, le bras de longueur L qui coulisse à l'intérieur du caisson est schématisé par une poutre à section rectangulaire. On distingue 3 zones : (1) caisson seul, (2) caisson + bras, (3) bras seul. La longueur de ces trois zones dépend de la position du bras par rapport au caisson. Le bras et le caisson sont en alliage d'aluminium afin de réduire au maximum les masses et inerties. Pour une position donnée, on supposera que l'ensemble bras + caisson est suffisamment ajusté pour être considéré comme un matériau homogène (on néglige la discontinuité au niveau de la liaison). Par voie de conséquence, la section du tronçon (2) est aussi un rectangle.

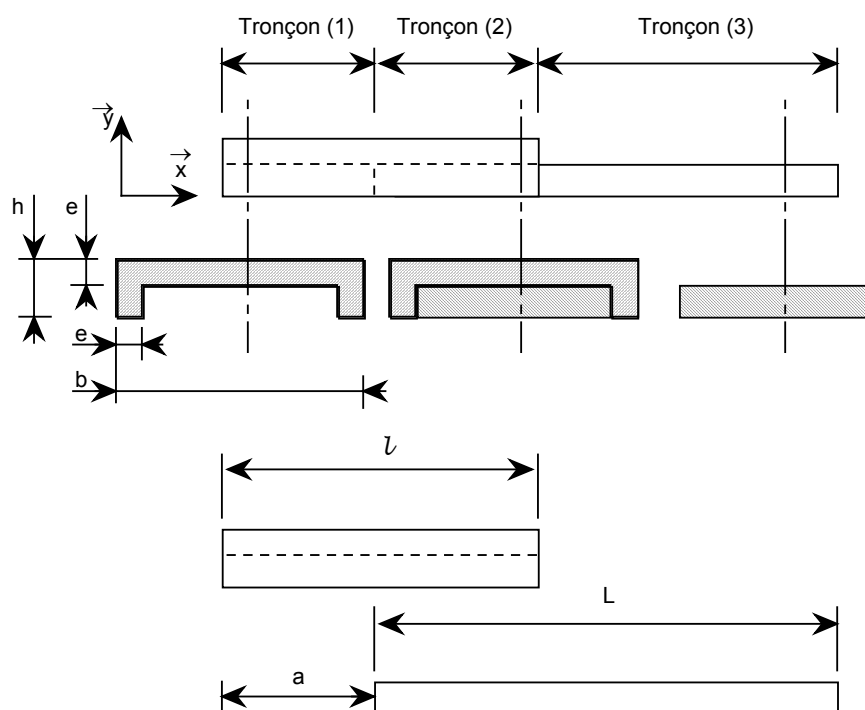


Figure 21.1 : Modélisation d'un bras par une poutre à section variable

Remarque : considérer le tronçon (2) comme une poutre unique est une modélisation légitime en flexion, plus discutable en traction compression. Nous travaillerons néanmoins sur cette modélisation dans la suite du problème.

Q.21.1 – Déterminer les aires des sections S_1 , S_2 et S_3 ainsi que les moments quadratiques I_1 , I_2 et I_3 par rapport à l'axe \bar{z} pour chacun des trois tronçons de la poutre (P). Le tableau 21 précise les valeurs des dimensions pour les différents éléments.

h	300 mm
b	1000 mm
e	200 mm
l	950 mm
L	1560 mm

Tableau 21 : Valeurs numériques des caractéristiques géométriques de la poutre (P)

Dans les questions qui suivent on négligera l'effet de flexion induit par le décalage des lignes moyennes entre les trois tronçons. Les matériaux du caisson et du bras sont identiques, de module élastique $E = 70000 \text{ MPa}$ et de coefficient de Poisson $\nu = 0,25$. On se place dans le cas extrême pour lequel : $a = 440 \text{ mm}$ (figures 21.2 et 21.3).

Q.21.2 – On considère que la poutre (P) est encastree à son extrémité gauche et soumise à une charge normale N (figure 21.2). Déterminer l'allongement de chaque tronçon et en déduire la raideur longitudinale K_L de la poutre (P). K_L est définie comme le rapport entre la charge N et l'allongement total de la poutre (P).

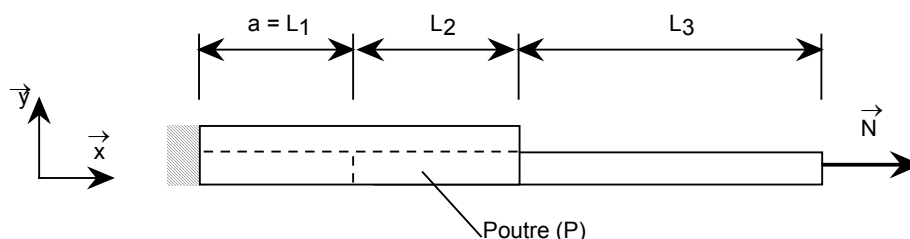


Figure 21.2 : Poutre à section variable soumise à de la traction ou de la compression

Q.21.3 – On considère que la poutre (P) est encastree à son extrémité gauche et soumise à une charge tranchante T (figure 21.3). Déterminer la déformée de chaque tronçon et en déduire la raideur transversale K_T de la poutre (P). K_T est définie comme le rapport entre la charge T et la flèche à l'extrémité chargée. On ne considérera pas l'effet de l'effort tranchant sur la flèche, ce dernier étant négligeable devant l'effet du moment fléchissant.

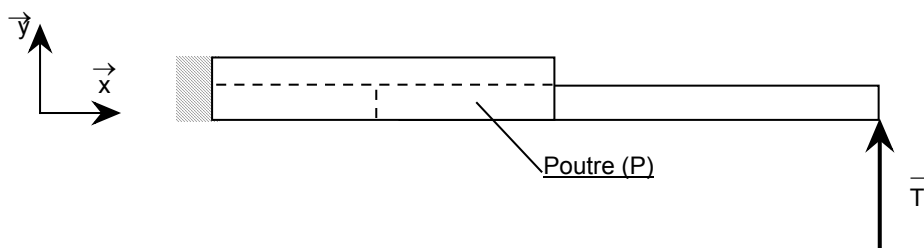


Figure 21.3 : Poutre à section variable soumise à de la flexion

Q.21.4 – Par comparaison avec le cas d’une poutre de même longueur totale L_t (i.e., $L_t = L_1 + L_2 + L_3$) et de section uniforme proposer une section équivalente S_e et un moment quadratique équivalent I_e au sens de la rigidité. En déduire le rapport λ défini par la relation :

$$\lambda = \frac{I_e}{L_t^2 S_e}$$

Q.21.5 – On considère que la poutre (P) est encastree à son extrémité gauche et soumise à un couple de torsion M_t . Nous allons mettre en place une méthode permettant de déterminer la raideur en torsion de manière approchée pour chacun des trois tronçons. μ est le coefficient de Lamé, module élastique en cisaillement et K est l’angle unitaire de torsion. On rappelle que les contraintes sont définies par la fonction de torsion $\phi(y,z)$ sur une section droite de la poutre :

$$\sigma_{xy} = \mu K \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad \text{et} \quad \sigma_{xz} = -\mu K \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

Avec :

$$\Delta \phi(y,z) + 2 = 0 \text{ en tous points de la section } \Sigma$$

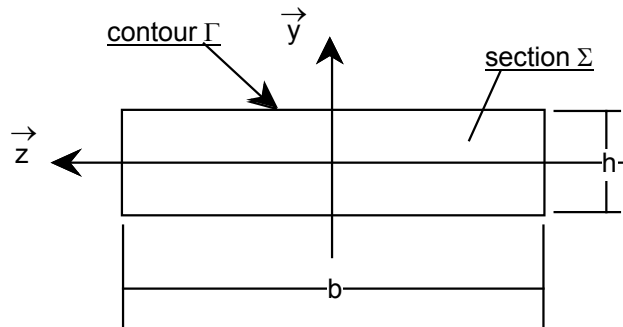


Figure 21.4 : Section droite de la poutre (P) dans les tronçons (2) ou (3)

Montrer que les contraintes vérifient les conditions limites sur les faces latérales (contour Γ) de la poutre si : $\phi(y,z) = 0$ en tous points du contour extérieur Γ .

Q.21.6 – Fourier a établi que pour une section rectangulaire (figure 21.4), la fonction de torsion solution est un développement en série. L’analyse de la solution montre qu’une approximation par la fonction ψ définie ci-dessous donne une excellente estimation de la raideur.

$$\psi(y,z) = A(y^2 - h^2/4)(z^2 - b^2/4)$$

On vérifie aisément que la fonction ψ est nulle sur le contour Γ de la section, mais son Laplacien n’est pas égal à « -2 ». Montrer l’équivalence entre la formulation variationnelle ci-dessous vérifiée pour toute fonction test ψ^* et le problème défini à la question Q.21.5.

$$\iint_{\Sigma} \overrightarrow{\text{grad}} \psi \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \psi^* dS = 2 \iint_{\Sigma} \psi \psi^* dS \quad \text{avec : } \psi = \psi^* = 0 \text{ sur le contour } \Gamma$$

Q.21.7 – La fonction test ψ^* choisie est de la même forme que la fonction de torsion approchée ψ (i.e., $\psi^*(y,z) = A^*(y^2 - h^2/4)(z^2 - b^2/4)$ avec A^* quelconque). Déterminer l’expression de A qui

vérifie la relation établie à la question Q.21.6. En déduire l'expression des composantes σ_{xy} et σ_{xz} de la matrice des contraintes.

Q.21.8 – Sous l'effet du moment de torsion M_t , le premier tronçon se tord d'un angle θ_1 qui vaut : $\theta_1 = 0,63 \cdot 10^{-12} \times M_t$ (avec M_t en N.mm). Calculer θ_2 et θ_3 à partir de la fonction de torsion définie à la question précédente. En déduire la rigidité à la torsion K_{Mt} définie par le rapport entre le moment M_t et l'angle total entre la section encastree et la section d'abscisse $x = L_1 + L_2 + L_3$.

Q.21.9 – On se place dans la configuration décrite sur la figure 21.5. Commenter le poids relatif des raideurs à la traction ou compression, flexion et torsion sur la précision de la position du point M où s'appliquent les efforts de coupe F. On pourra considérer le cas d'un effort de coupe F vertical (dirigé suivant -Y). Dans le cas le plus défavorable le bras de levier d peut atteindre 800 mm.

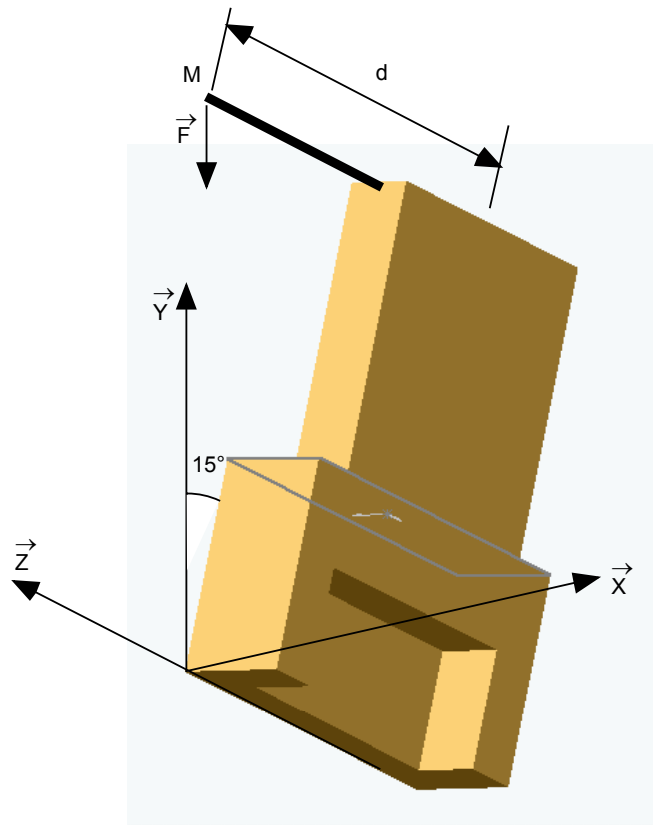


Figure 21.5 : Définition de la configuration retenue pour la comparaison entre les sollicitations de traction-compression, flexion et torsion

Section 22 : Pulsations propres en traction flexion d'un seul bras

Dans cette section, on simplifie encore un peu la modélisation adoptée pour la poutre (P). Celle-ci est illustrée sur les figures 22.1 et 22.2. La torsion est volontairement négligée pour ramener le problème à un problème plan. On considère une poutre de longueur L_t et section uniforme

caractérisée par les aire et moment quadratique S_e et I_e définis à la section précédente. On étudie la réponse dynamique d'un système constitué d'une seule poutre sous des sollicitations de traction-compression et de flexion. Pour cela on suppose la poutre encastree à une extrémité et la broche porte-outil est assimilée à une masse ponctuelle M située à l'autre extrémité ($M = 200 \text{ kg}$). La masse volumique du matériau constitutif de la poutre est notée ρ et vaut 2700 kg/m^3 . Les caractéristiques géométriques de la section droite sont définies dans le tableau 22.

L_t	2000 mm
S_e	$9,5 \cdot 10^4 \text{ mm}^2$
I_e	$3,0 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$

Tableau 22 : Valeurs numériques des caractéristiques géométriques de la poutre (P)

Q.22.1 – Dans cette série de questions, on ne considère que les déplacements longitudinaux (suivant l'axe \vec{x}) des points de la poutre (P) de la figure 22.1. En isolant une tranche de longueur « dx » de la poutre (P), établir une relation différentielle du second ordre vérifiée par la fonction « $u(x,t)$ ». Montrer que les fonctions « $u(x,t)$ » de la forme :

$$u(x,t) = \underline{u}(x) \cdot \cos \omega t$$

peuvent être solution de cette équation différentielle. En déduire la forme de la fonction « $\underline{u}(x)$ » vérifiant cette relation différentielle. Quelle relation lie la k -ième pulsation propre ω_k avec la longueur d'onde de la forme propre associée ?

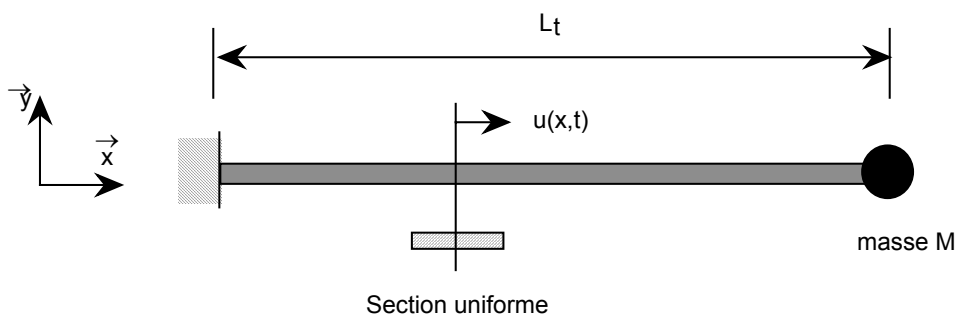


Figure 22.1 : Définition du problème de vibrations longitudinales

Q.22.2 – Montrer que, sans la masse M à l'extrémité, les pulsations propres sont de la forme :

$$\omega_{k+1} = \frac{(2k+1)\pi}{2L_t} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \text{de : } k = 0 \text{ à } \infty$$

Q.22.3 – Montrer qu'avec la masse M à l'extrémité, les pulsations propres peuvent être déterminées en résolvant :

$$\tan x - \frac{A}{x} = 0 \quad \text{avec : } A = cte$$

On précisera la valeur de la constante A et on pourra utiliser le graphique du document en annexe 1 pour résoudre graphiquement cette équation. Que vaut la première pulsation propre de traction-compression de ce système ? Commenter l'influence de la masse M sur la valeur de cette pulsation.

Q.22.4 – Dans cette série de questions, on ne considère que les déplacements transversaux (suivant l'axe \vec{y}) des points de la poutre (P) (figure 22.2). De plus, on néglige les termes d'inertie dus aux rotations des sections droites devant ceux dus aux déplacements transversaux. En isolant à nouveau une tranche de longueur « dx » de la poutre (P), établir la relation différentielle du quatrième ordre vérifiée par la fonction « v(x,t) ». Ici encore on cherche la solution sous forme découplée d'un produit d'une fonction de x et d'une fonction de t :

$$v(x,t) = \underline{v}(x) \cos \omega t$$

En déduire que la fonction « $\underline{v}(x)$ » est de la forme :

$$\underline{v}(x) = \alpha \cos \lambda x + \beta \sin \lambda x + \gamma \operatorname{ch} \lambda x + \delta \operatorname{sh} \lambda x$$

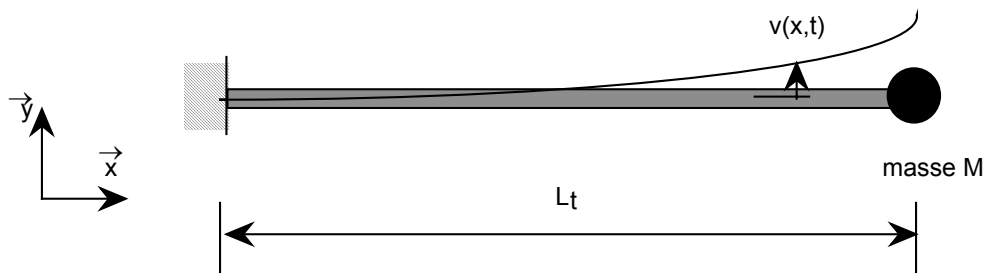


Figure 22.2 : Définition du problème de vibrations transversales

Q.22.5 – A partir des résultats précédents, déterminer, avec et sans la masse M à l'extrémité, les pulsations propres associées aux modes transversaux de la poutre. On pourra utiliser avec profit l'annexe 2 qui propose le graphe de la fonction f(x) :

$$f(x) = \frac{\sin x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \cos x}{1 + \operatorname{ch} x \cos x} \quad \text{dans la relation : } f(x) - \frac{A}{x} = 0$$

La constante A a la même signification que dans la question 22.3. Comparer la première pulsation propre de flexion de ce système avec la première pulsation propre de traction-compression.

Q.22.6 - La plage des fréquences d'excitations qui correspondent à l'usinage TGV varie de 0,5 à 55 Hz. Conclure sur les valeurs obtenues.

Section 23 : Détermination approchée des pulsations et modes propres par la méthode des éléments finis

Dans cette section, on se propose de déterminer les pulsations propres du système par la méthode des éléments finis. Pour les modes de traction-compression, les fonctions de forme sur l'élément de longueur L sont définies ci-dessous :

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^2 N_i(x) U_i(t) \quad \text{avec :} \quad \begin{aligned} N_1(x) &= 1 - \frac{x}{L} \\ N_2(x) &= \frac{x}{L} \end{aligned}$$

Q.23.1 – Donner une signification aux termes inconnus $U_i(t)$. Expliciter les matrices $[N]$, $[B]$ et $[K]$ intervenant dans l'expression des énergies potentielle élastique $V_{(P)}$ et cinétique $T_{(P)}$ de la poutre (P). On se placera dans le cas d'une discrétisation élémentaire de la poutre (P) par un seul élément de longueur L_t :

$$\left. \begin{aligned} 2V_{(P)} &= \int_0^{L_t} [U(t)]^T [B][K][B][U(t)] dx \\ 2T_{(P)} &= \int_0^{L_t} [\dot{U}(t)]^T [N][N][\dot{U}(t)] \rho S_e dx \end{aligned} \right\} \quad \text{avec :} \quad [U(t)] = \begin{bmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \end{bmatrix}$$

Q.23.2 – Calculer les énergies potentielle V et cinétique T de l'ensemble poutre (P) + masse (M) et en déduire les matrices de masse et de raideur de ce système. Ces matrices sont définies par les expressions suivantes :

$$2T = \dot{U}^T [M] \dot{U} \quad \text{et} \quad 2V = U^T [K] U$$

En déduire une approximation de la première pulsation propre du système en traction-compression et comparer avec les pulsations déterminées aux questions 22.3 avec ou sans la masse M .

Pour les modes de flexion, les fonctions de forme plus complexes sont définies ci-dessous :

$$v(x,t) = \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) & N_3(x) & N_4(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(t) \\ \varphi_1(t) \\ V_2(t) \\ \varphi_2(t) \end{bmatrix} \quad \text{avec :} \quad \begin{aligned} N_1(x) &= 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} & N_3(x) &= \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \\ N_2(x) &= x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} & N_4(x) &= -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{aligned}$$

Q.23.3 – Donner une signification aux termes inconnus $V_i(t)$ et $\varphi_i(t)$. Expliquer pourquoi les fonctions de forme sont plus complexes que dans le cas de la traction-compression. Calculer les énergies potentielle V et cinétique T de l'ensemble poutre (P) + masse (M) et en déduire les matrices de masse et de raideur de ce système. En déduire une approximation de la première pulsation propre du système en flexion et comparer avec les pulsations déterminées aux questions 22.5 avec ou sans la masse M .

Pour cette question, on donne les matrices $[K_{(P)}]$ et $[M_{(P)}]$ relatives à la poutre (P) seule :

$$[\mathbf{M}_{(P)}] = \rho S_e L \begin{bmatrix} \frac{13}{35} & \frac{11L}{210} & \frac{9}{70} & -\frac{13L}{420} \\ \frac{11L}{210} & \frac{L^2}{105} & \frac{13L}{420} & -\frac{L^2}{140} \\ \frac{9}{70} & \frac{13L}{420} & \frac{13}{35} & -\frac{11L}{210} \\ -\frac{13L}{420} & -\frac{L^2}{140} & -\frac{11L}{210} & \frac{L^2}{105} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\mathbf{K}_{(P)}] = \frac{EI_e}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Dans cette dernière série de questions de la partie 2, on se propose de comparer les modes obtenus précédemment avec le cas de la structure parallèle UTGV. Pour cela, on considère la disposition critique donnée par la figure 23.1 et on souhaite calculer les pulsations propres de cette structure. On ne cherchera pas à faire tous les calculs, on se limitera à la mise en place de ces derniers ainsi qu'à l'interprétation des résultats fournis.

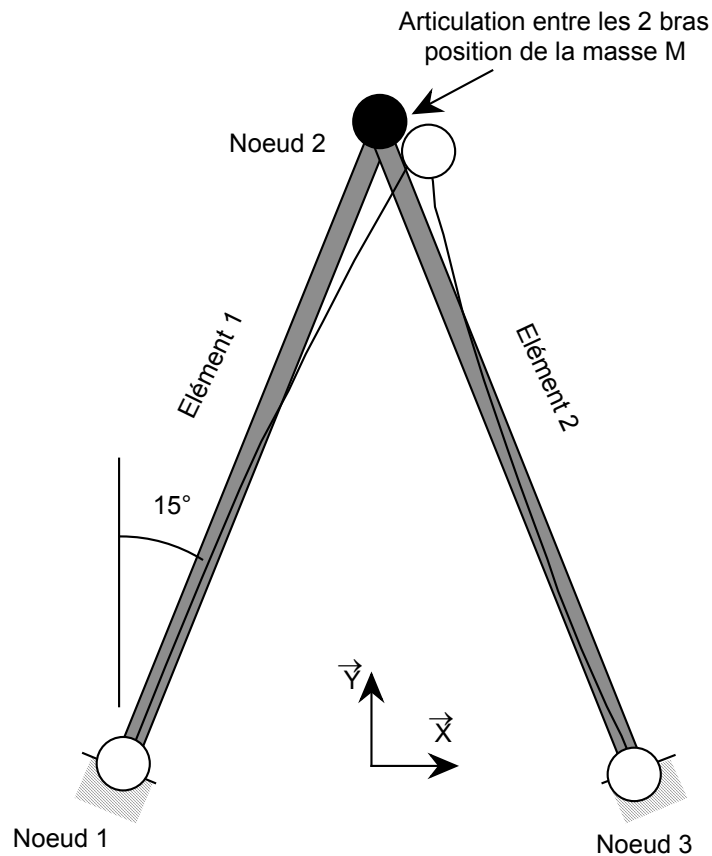


Figure 23.1 : Définition du problème de vibrations sur structure parallèle

Q.23.4 – Soient deux poutres articulées entre elles et à chacune de leur autre extrémité, avec le bâti fixe. Les longueurs, aires et inerties sont identiques à la poutre (P) de la section 22. Les matrices de masse et de raideur sont donc identiques dans le repère local de chaque poutre. Comment passe-t-on à l'expression de ces matrices dans le repère global de la structure ?

Q.23.5 – Exprimer la colonne des déplacements de la structure sans prendre en compte les conditions limites en déplacement. Assembler la matrice de masse et de raideur toujours sans

prendre en compte les conditions limites. Que devient le système après prise en compte des conditions limites ?

Q.23.6 – La masse M est disposée au niveau de l'articulation entre les deux poutres. Que devient la matrice de masse de la structure ?

Q.23.7 – On donne, ci-dessous, les résultats d'un calcul effectué par la méthode des éléments finis sur une structure identique modélisée par deux éléments (1 élément par poutre, le nœud (2) est le nœud de jonction entre les deux poutres).

Rotation de la section au nœud (1) due à la déformation de la poutre gauche	φ_1	-0,45 rad
Déplacement suivant X du nœud (2)	U_2	0,003 mm
Déplacement suivant Y du nœud (2)	V_2	$4,1 \cdot 10^{-13}$ mm
Rotation de la section au nœud (3) due à la déformation de la poutre gauche	φ_3	-0,45 rad

Mode propre

Pulsation propre : $\omega_1 = 67$ rad/s

Tracer l'allure du mode propre correspondant à la première pulsation propre ω_1 . Comparer la valeur de cette dernière avec les résultats pour une poutre encastree seule. Compte tenu de la plage d'utilisation de la machine UTGV (voir question Q.22.6), conclure sur l'intérêt d'une structure parallèle.

Troisième partie : Mécanique des fluides

On se propose dans cette troisième partie de mieux comprendre le maintien en position et la mise en mouvement du coulant et des bras de la machine. La mise en mouvement est assurée par deux moteurs linéaires. Pour un déplacement dans le plan vertical, la machine est soumise à la gravité. On se propose d'étudier une solution technologique permettant de compenser le poids du coulant et des bras en utilisant un système d'équilibrage. Il se compose de deux vérins identiques, chacun étant relié par une conduite de liaison à un accumulateur à membrane.

L'étude porte sur le vérin dont le corps est fixé au caisson 1 (de gauche). La tige du vérin est ancrée sur le bras 8. On suppose dans toute cette partie que l'angle ϕ_{10} est **constant**, que la masse M équilibrée est celle du bras 8 plus la moitié de celle du coulant.

Cette étude nécessite des éléments de mécanique des fluides et de thermodynamique. La présente étude aborde d'abord séparément ces aspects pour arriver à une vision globale du fonctionnement de l'installation du point de vue énergétique.

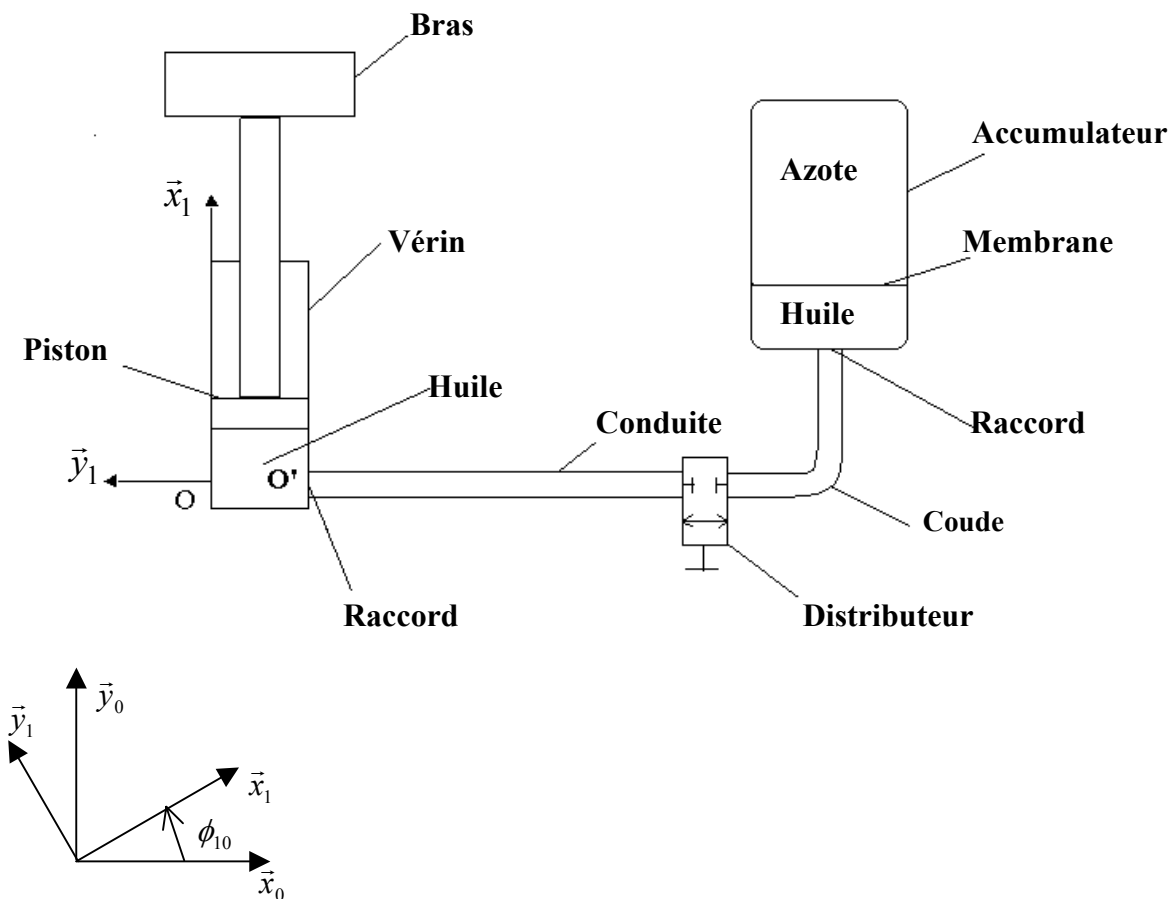


Figure 3.1 : Schéma de l'installation et repérage

La chambre inférieure du vérin contient de l'huile, la chambre supérieure est remplie d'air à la pression atmosphérique. Lorsque la machine est en mouvement, le distributeur est ouvert et le vérin est relié à un accumulateur. Lorsque le piston du vérin descend, l'huile chassée de la chambre du vérin remplit l'accumulateur. Lorsque le piston du vérin remonte, l'huile est expulsée de l'accumulateur et retourne au vérin. À l'arrêt, le distributeur est fermé et la pression de l'huile supporte le poids du coulant. La conduite de liaison comporte 3 coudes dont un seul est représenté sur la figure 3.1.

L'accumulateur est un réservoir comportant une membrane étanche séparant un volume d'azote de l'huile. La figure 3.3 à la fin de l'énoncé montre pour information un exemple d'accumulateur. L'huile se situe dans la chambre inférieure de l'accumulateur, l'azote dans la chambre supérieure. La membrane a une forme de type ellipsoïde de révolution. Pour simplifier, on assimile la membrane à un piston se déplaçant dans l'accumulateur de forme cylindrique. On notera S_{membrane} la surface projetée de la membrane.

Dans toute cette troisième partie, l'huile sera supposée incompressible. Les mises en équation se feront en coordonnées cartésiennes avec un repère orthonormé direct $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ lié au cylindre du vérin, sauf pour l'écoulement dans la conduite où l'on utilisera les coordonnées cylindriques avec un repère local cylindrique $(O', \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_k)$. On notera v le module de la vitesse du piston du vérin et u le module de la vitesse d'écoulement de l'huile par rapport à la conduite. On rappelle que le champ de pesanteur est défini par $\vec{g} = -g \cdot \vec{y}_0$. Les notations utilisées et les valeurs numériques sont résumées à la fin de l'énoncé. Un formulaire succinct est disponible en annexe.

Section 31 : Mise en équations du vérin d'équilibrage. Etude de l'écoulement de l'huile entre le vérin et l'accumulateur en régime établi.

Q.31.1 - Faire le bilan des forces en présence et exprimer la pression p_1 de l'huile sous le piston du vérin en fonction des différentes masses et des dimensions du vérin.

Le piston du vérin se déplace à l'intérieur du corps du vérin. Des joints élastomères assurent l'étanchéité entre les deux chambres du piston et induisent un frottement de type sec. En première approximation, on peut considérer que la force de frottement est constante au cours du déplacement. Soient F_f la résultante de toutes les actions de frottement sec et F_m la force exercée par le bras de la machine sur la tige du vérin.

Q.31.2 - Ecrire l'équation en dynamique du piston du vérin :

- pour un mouvement descendant
- pour un mouvement ascendant

Q.31.3 - Certains vérins ont un débit de fuite au niveau du piston. Exprimer dans ce cas, en justifiant rapidement votre réponse, la forme générale de l'expression des actions mécaniques de frottements (secs + visqueux).

On souhaite étudier l'écoulement de l'huile dans les conduites de liaison lors du déplacement du piston du vérin et calculer les différentes pertes de charge lorsque la vitesse v du piston est constante. L'étude sera effectuée pour **la descente** du piston du vérin.

On suppose que:

- l'écoulement de l'huile dans la conduite est permanent et laminaire ;
- les effets de la pesanteur sur l'huile sont négligés.

On note $\frac{\delta p}{L}$ le gradient de pression suivant la direction de l'écoulement.

Q.31.4 - Rappeler l'expression locale de la conservation de la masse pour un fluide incompressible.

Q.31.5 - Rappeler l'expression vectorielle des équations générales de la dynamique des fluides newtoniens (équations de Navier-Stokes) et indiquer les simplifications apparaissant du fait des diverses hypothèses.

Déterminer, dans une section donnée de la conduite, la répartition des vitesses.

Q.31.6 - Etablir une relation entre le débit volumique d'huile Q_v , le gradient de pression, la viscosité dynamique μ de l'huile et le rayon R de la conduite.

En déduire une relation entre le gradient de pression et la vitesse débitante de l'huile $u_m = Q_v/S$. Relier cette vitesse u_m à celle du piston du vérin.

Q.31.7 - Soit τ_p la contrainte de cisaillement à la paroi. Rappeler l'expression de la contrainte de viscosité, puis exprimer τ_p en fonction de $\frac{\delta p}{L}$. En déduire la force de frottement exercée par l'huile sur la paroi de la conduite, la puissance perdue par frottement pour une vitesse débitante de l'huile u_m et une longueur de conduite L .

On définit le coefficient de perte de charge linéaire λ par :
$$\lambda = - \frac{\frac{\delta p}{L} \cdot D}{\frac{\rho u_m^2}{2}}$$

Q.31.8 - Etablir la relation entre le coefficient de perte de charge et le nombre de Reynolds Re .

On définit le coefficient de perte de charge singulière ζ par :
$$\zeta = \frac{\Delta p}{\frac{\rho u_m^2}{2}}$$

Avec Δp : perte de charge singulière (Pa).

Q.31.9 - Comment peut-on expliquer la valeur du coefficient de perte de charge singulière $\zeta=2$ lorsqu'un fluide en écoulement laminaire dans une conduite débouche dans un réservoir ?

Q.31.10 - Etablir une relation entre la pression p_2 dans l'accumulateur, la pression p_1 dans le piston du vérin, λ , les différents ζ , la vitesse v du piston du vérin et les différentes variables géométriques de l'installation.

Montrer que cette relation peut être ramenée à la forme suivante : $p_1 - p_2 = A \cdot v + B \cdot v^2$.

Que devient cette expression de $p_1 - p_2$ lorsque le piston du vérin monte ?

Q.31.11 - Calculer $p_1 - p_2$ et la puissance dissipée par frottement pour une vitesse v du piston du vérin. L'hypothèse de l'écoulement laminaire est-elle justifiée ?

Section 32 : Etude de l'écoulement de l'huile entre le vérin et l'accumulateur en régime non établi.

Lors du fonctionnement de la machine, celle-ci subit de nombreuses accélérations et décélérations. On se propose d'en vérifier l'influence au niveau de l'écoulement de l'huile. Afin d'en dissocier l'influence sur la machine de celles des pertes de charge, on se place dans le cas d'un fluide incompressible **non visqueux** en régime instationnaire. L'étude sera effectuée dans une phase d'accélération de valeur a . Au temps t considéré, la vitesse du piston du vérin, dans une phase descendante, est v . Cette étude sera effectuée en utilisant le théorème de Bernoulli en écoulement non permanent. On rappelle qu'en se plaçant le long d'une ligne de courant, le terme dû à la non permanence de l'écoulement est $\int \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \vec{v} dt$ avec \vec{v} , vecteur vitesse tangent à la ligne de courant.

L'expérience montre que dans ce cas il est légitime de négliger l'influence de la gravité sur l'écoulement. Le problème peut être ramené au modèle unidimensionnel suivant :

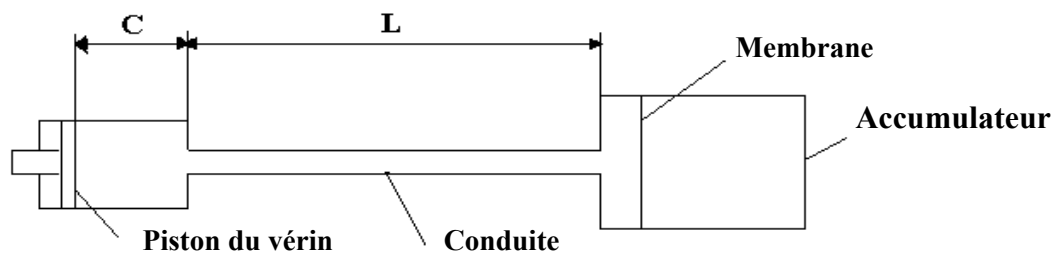


Figure 3.2 : Modèle d'écoulement en régime transitoire

Par ailleurs, on suppose qu'à un instant donné la pression de l'huile dans l'accumulateur est constante et on néglige l'influence de la variation de la vitesse au niveau de l'entrée dans la conduite.

Q.32.1 - Rappeler l'expression du théorème de Bernoulli en régime non permanent appliqué en deux points d'une ligne de courant (on veillera à l'homogénéité dimensionnelle de la relation).

Q.32.2 - Soit p_1 la pression de l'huile au niveau du piston, p_2 la pression de l'huile dans l'accumulateur. En appliquant judicieusement le théorème de Bernoulli, trouver une relation reliant p_1 - p_2 à l'accélération du piston du vérin et aux variables géométriques de l'installation.

Q.32.3 - En déduire l'expression de la puissance instantanée nécessaire à l'accélération de l'huile. Par intégration, calculer l'énergie que le piston du vérin doit fournir à l'huile lorsqu'il passe d'une vitesse nulle à une vitesse v . Vérifier que le résultat obtenu correspond à une relation simple de la mécanique. Faire l'application numérique.

Section 33 : Etude de l'accumulateur. Bilan des puissances.

L'azote est assimilable à un gaz parfait, la compression et la détente sont supposées, dans un premier temps, isentropiques ($\gamma = 1,4$). Lorsque le piston du vérin descend, le retour de l'huile vers l'accumulateur assure la compression de l'azote. Lorsque le piston du vérin monte, l'azote se détend. En position haute du piston du vérin, la pression de l'azote est P_{20} , le volume V_{20} , la température T_{20} . En position basse du piston du vérin, la pression de l'azote est P_{21} , le volume V_{21} , la température T_{21} . La course maximale du vérin est C . La température T_{20} résulte d'un processus antérieur (nombre de cycles de fonctionnement du piston du vérin, échange de chaleur entre l'accumulateur et le milieu ambiant...). Dans cette section, la valeur de la température T_{20} est fixée.

Q.33.1 - Justifier le fait que la pression de l'huile dans l'accumulateur est proche de celle de l'azote. On retiendra cette hypothèse pour la suite du problème.

On souhaite dans un premier temps relier la variation de la pression de l'azote lorsque le piston du vérin se déplace au volume V_1 de l'accumulateur. Pour éviter que la membrane de l'accumulateur ne vienne cogner contre la paroi, il faut respecter la condition $V_1 = 1,1 * V_{20}$. On souhaite que lors du déplacement du bras, la variation de la pression au niveau de l'accumulateur soit au maximum de Δp_{maxi} .

Q.33.2 - Exprimer le volume initial d'azote V_{20} dans l'accumulateur en fonction de la pression P_{20} , de Δp_{maxi} et des caractéristiques géométriques du vérin. En déduire l'expression du volume minimum de l'accumulateur à prévoir et sa valeur numérique.

Q.33.3 - Le vérin est en position haute. Le vérin se déplace sur la totalité de sa course, calculer le travail de compression W .

Q.33.4 - Le vérin est en position haute et la température de l'azote est T_{20} . Quelle est la température T_{21} de l'azote dans l'accumulateur lorsque le vérin est en position basse ? L'hypothèse d'une évolution isentropique est-elle satisfaisante ? Indiquer quel autre type d'évolution serait envisageable pour modéliser plus simplement cette compression. Justifier votre réponse et établir une expression plus simple du travail.

Q.33.5 - En effectuant un développement limité, établir une relation simple entre le travail de compression et le déplacement x_p du piston du vérin depuis sa position haute. On gagnera à utiliser les résultats de la question précédente.

Q.33.6 - Calculer la puissance nécessaire à la descente du piston du vérin lorsque la vitesse v est constante. Indiquer comment la puissance se décompose (pertes de charge, frottements, compression...).

Notations :

M : masse à équilibrer (bras + moitié du coulant)
 m : masse du piston + tige
 D_1 : diamètre du piston ; S_1 : section du piston
 D_2 : diamètre de la tige ; S_2 : section de la tige
 L : longueur droite de la conduite

R : rayon de la conduite ; S : section de la conduite
 S_{membrane} : surface projetée de la membrane
 V_1 : Volume de l'accumulateur
 V_2 : Volume de l'azote dans l'accumulateur
 μ : viscosité dynamique de l'huile
 ρ : masse volumique de l'huile
 p_1 : pression effective de l'huile dans le vérin
 p_2 : pression effective de l'huile dans l'accumulateur
 P_2 : pression absolue de l'azote dans l'accumulateur
 P_a : pression atmosphérique
 T_2 : température absolue de l'azote dans l'accumulateur
 v : vitesse de déplacement du piston du vérin
 $\vec{u}(u_r, u_\theta, u_k)$: vitesse locale de l'huile dans la conduite
 u_m : vitesse débitante de l'huile dans la conduite
 a : accélération du piston du vérin
 C : course maximale du piston du vérin
 F_f : force de frottement sec du piston du vérin
 F_m : force exercée par le bras de la machine sur la tige du vérin.

Valeurs numériques :

$\phi_{10} = 50^\circ$
 $M = 320 \text{ kg}$
 $m = 5 \text{ kg}$
 $D_1 = 0,040 \text{ m}$
 $D_2 = 0,022 \text{ m}$
 $L = 6 \text{ m}$
 $R = 0,012 \text{ m}$
 $S_{\text{membrane}} = 0,031 \text{ m}^2$
 $F_f = 20 \text{ N}$
 $\mu = 8 \cdot 10^{-2} \text{ Pa.s}$
 $\rho = 870 \text{ kg/m}^3$

Coefficients de pertes de charge singulières :

Coude : $\zeta = 0,4$

Distributeur ouvert : $\zeta = 0,8$

Entrée de l'huile dans la conduite : $\zeta = 0,5$

Sortie de l'huile dans l'accumulateur (régime laminaire) : $\zeta = 2$

$v = 2 \text{ m/s}$.

$\Delta p_{\text{maxi}} = 3 \text{ bar} = 3 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

$P_{20} = 20,4 \text{ bar} = 20,4 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

$P_a = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$

$T_{20} = 300^\circ \text{K}$

$C = 0,560 \text{ m}$

$g = 9,81 \text{ m/s}^2$

$a = 30 \text{ m/s}^2$

Formulaire :

Dérivée particulaire d'une fonction scalaire X

$$\frac{DX}{Dt} = \frac{\partial X}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{grad} X \quad \text{avec : } \vec{v} \text{ vecteur vitesse}$$

Opérateurs généraux en coordonnées cylindriques

$$\vec{\nabla} = \overrightarrow{grad} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

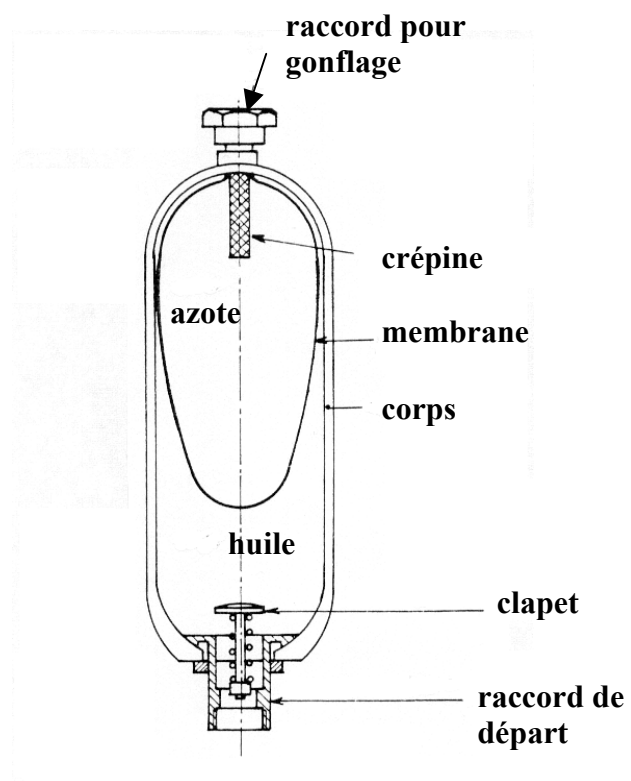
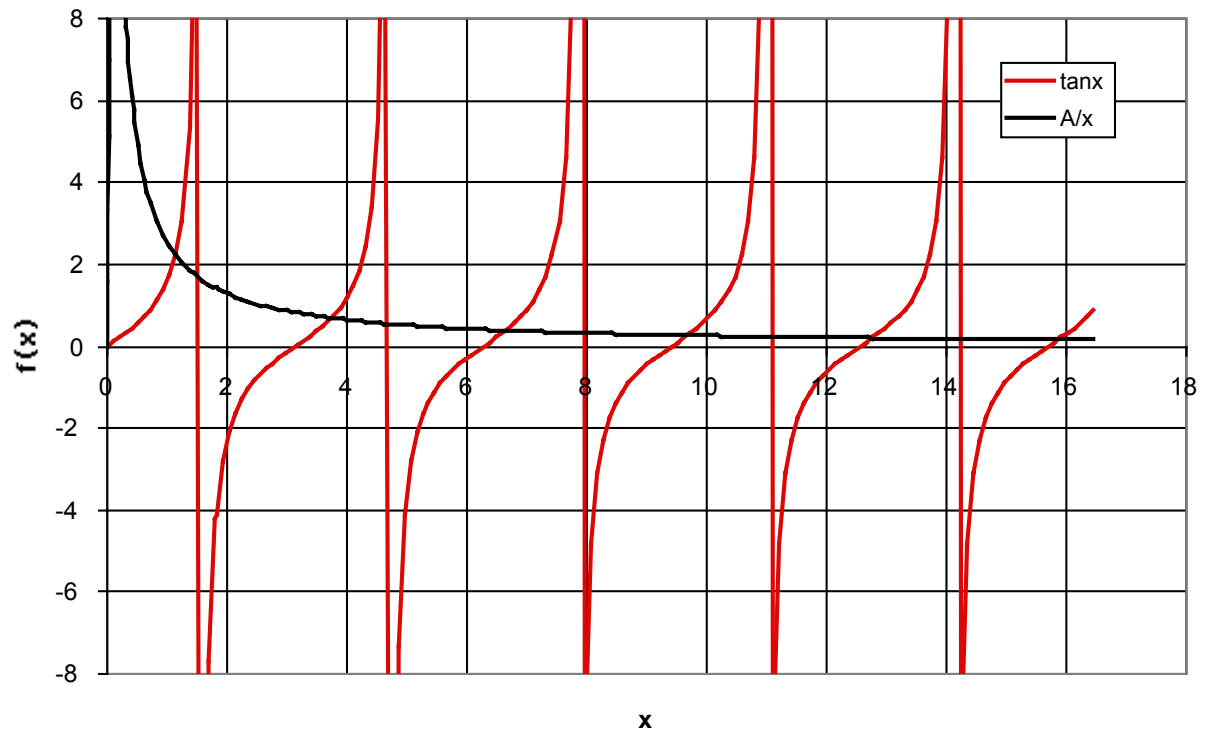
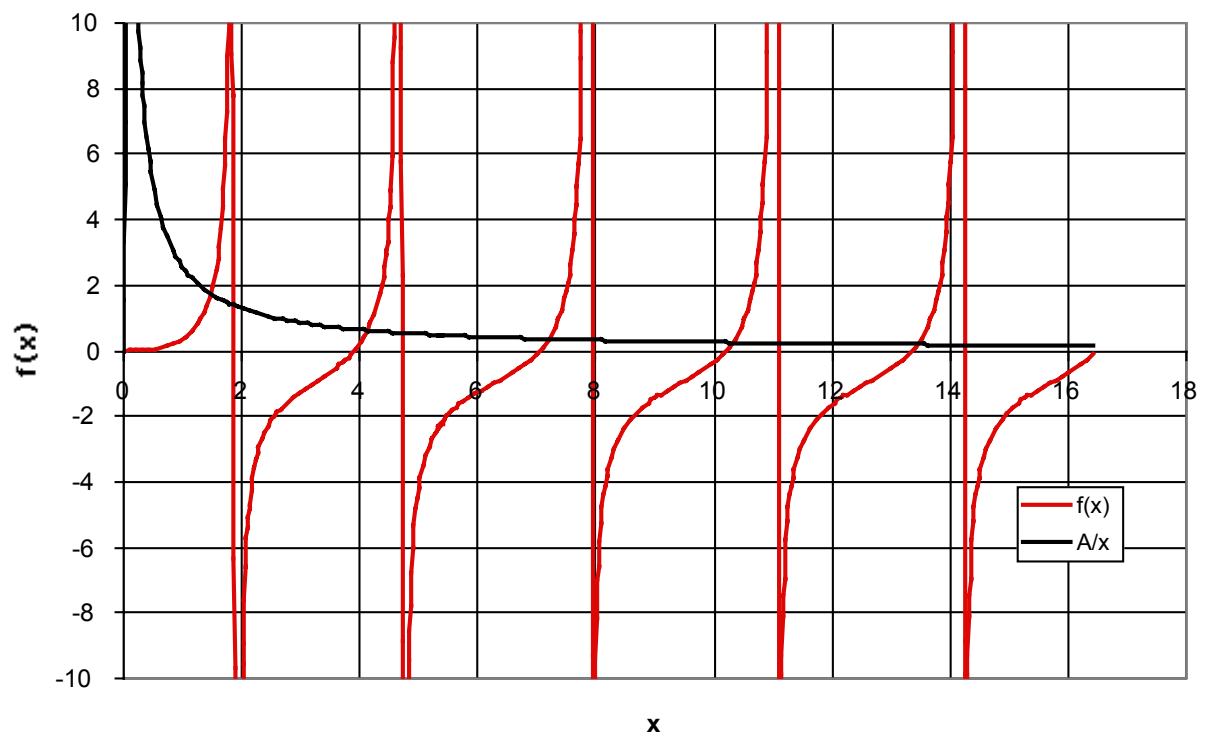


Figure 3.3 : Accumulateur à membrane.

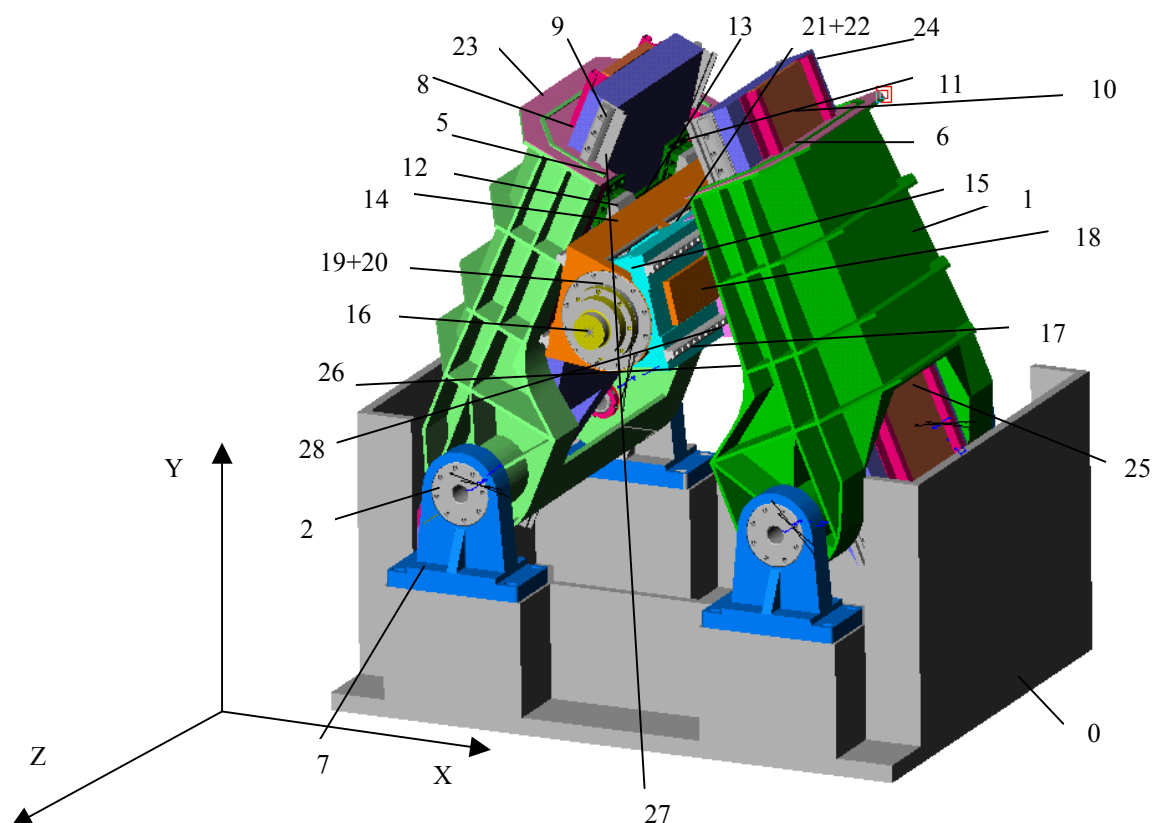
Annexe 1



Annexe 2



NOMENCLATURE



N°	DATE: 14/04/2000	Masse Unitaire	Matière	Nb	Masse Totale	Désignation
0	BATI	2700	Acier	1	2700	
1	CAISSON	99,6	Alu	2	199,2	
2	AXE RLT	13,2	Acier	4	52,8	
3	RLT CAISSON1	0,84		4	3,36	SKF 32014X
4	RLT CAISSON2	3		4	12	SKF 30219
5	PATINS CAISSON	3,3		8	26,4	INA RUE 45 D FE
6	PRIMAIRE CAISSON	76,5		2	153	Krauss Maffei Limes TS 800/240-P16
7	PALIER	81,6	Acier	4	326,4	
8	BRAS	100,35	Alu	2	200,7	
9	RAIL CAISSON	14,6		4	58,4	INA RUE 45 D FE
10	SECONDAIRE BRAS	84,6		2	169,2	Krauss Maffei Limes TS 800/240-S20-0505-Q1-1008-Q1
11	PLAQUE SUPPORT	6,5	Alu	2	13	
12	PATINS COULANT	2		8	16	INA RUE 35 D FE
13	PRIMAIRE COULANT	17,5		2	35	Krauss Maffei Limes TS 200/076-P16
14	DEMI COULANT fixe/broche	65,7	Alu	1	65,7	
15	DEMI COULANT mobile/broche	68,4	Alu	1	68,4	
16	BROCHE	65		1	65	
17	RAILS COULANT	7,08		4	28,32	INA RUE 35 D FE
18	SECONDAIRE COULANT	7,4		2	14,8	Krauss Maffei Limes TS 200/076-S20-564-Q1
19	CHAPEAU RLT AVANT	14	Acier	1	14	
20	ROULEMENT AVANT	1,65		2	3,3	SKF FPAF 800
21	ROULEMENT ARRIERE	0,68		4	2,72	SKF FPAD708
22	CHAPEAU RLT ARRIERE	5,3	Acier	2	10,6	
23	Protection 01	1,25	Alu	2	2,5	
24	Protection 02	1,85	Alu	4	7,4	
25	Protection 03	0,58	Alu	2	1,16	
26	Protection 04	0,7	Alu	4	2,8	
27	Protection 05	1,32	Alu	4	5,28	
28	Protection 06-07	1,6	Alu	2	3,2	