

AGRÉGATION

SESSION 2006

CONCOURS INTERNE

Section : GÉNIE ÉLECTRIQUE

Option A : ÉLECTRONIQUE ET INFORMATIQUE INDUSTRIELLE
Option B : ÉLECTROTECHNIQUE ET ÉLECTRONIQUE DE PUISSANCE

ÉTUDE D'UN PROBLÈME D'AUTOMATISATION

DURÉE : 6 HEURES, COEFFICIENT : 1

Aucun document n'est autorisé.

*Calculatrice autorisée (conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999)
Convertisseur en Euro autorisé*

LIGNE DE TRANSPORT D'ÉNERGIE

Ce sujet comporte 3 dossiers distincts :

📁 Dossier de présentation, texte du sujet avec le travail demandé	19 pages
📁 Documents annexes	4 pages
📁 Documents réponses N°1 à 15	9 pages

Ce sujet comporte six parties indépendantes :

- Partie **A** : contrôle de l'énergie.
- Partie **B** : modélisation du câble.
- Partie **C** : régulation simplifiée du courant de ligne.
- Partie **D** : modèle de la station 1
- Partie **E** : modèle d'état de la boucle de courant et régulation du courant de ligne.
- Partie **F** : régulation de la tension de sortie de la station 1.

Une lecture préalable et complète du sujet est indispensable.

Il sera tenu compte de la cohérence avec laquelle les candidats traiteront chaque partie, le jury préférant une réflexion d'ensemble de la partie abordée à un éparpillement des réponses.

Les candidats sont invités à numérotter chaque page de leur copie et à indiquer clairement le numéro de la question traitée.

Les candidats sont priés de rédiger les différentes parties du problème sur feuilles séparées et clairement repérées. Chaque question est identifiée par une police **gras** et repérées par un numéro.

Il leur est rappelé qu'ils doivent utiliser les notations propres au sujet, présenter clairement les calculs et dégager ou encadrer tous les résultats.

Tout résultat incorrectement exprimé ne sera pas pris en compte. En outre les correcteurs leur sauront gré d'écrire lisiblement et de soigner la qualité de leur copie.

Il sera tenu compte de la qualité de rédaction, en particulier pour les réponses aux questions ne nécessitant pas de calcul. Le correcteur attend des phrases complètes respectant la syntaxe de la langue française.

Pour la présentation des applications numériques, il est rappelé que lors du passage d'une forme littérale à son application numérique, il est recommandé aux candidats de procéder comme suit :

- après avoir rappelé la relation littérale, chaque grandeur est remplacée par sa valeur numérique en respectant la position qu'elle avait dans la relation puis le résultat numérique est donné sans calculs intermédiaires et sans omettre son unité.

Si le texte du sujet, de ses questions ou de ses annexes, vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement dans votre copie.

Liaison de transport d'énergie SVC HVDC sur l'île de Gotland (Suède)

L'île de Gotland en Suède est située au milieu de la mer Baltique. Jusqu'en 1999, la totalité de l'énergie électrique était apportée sur l'île, à partir de Suède par l'intermédiaire d'une liaison à courant continu.

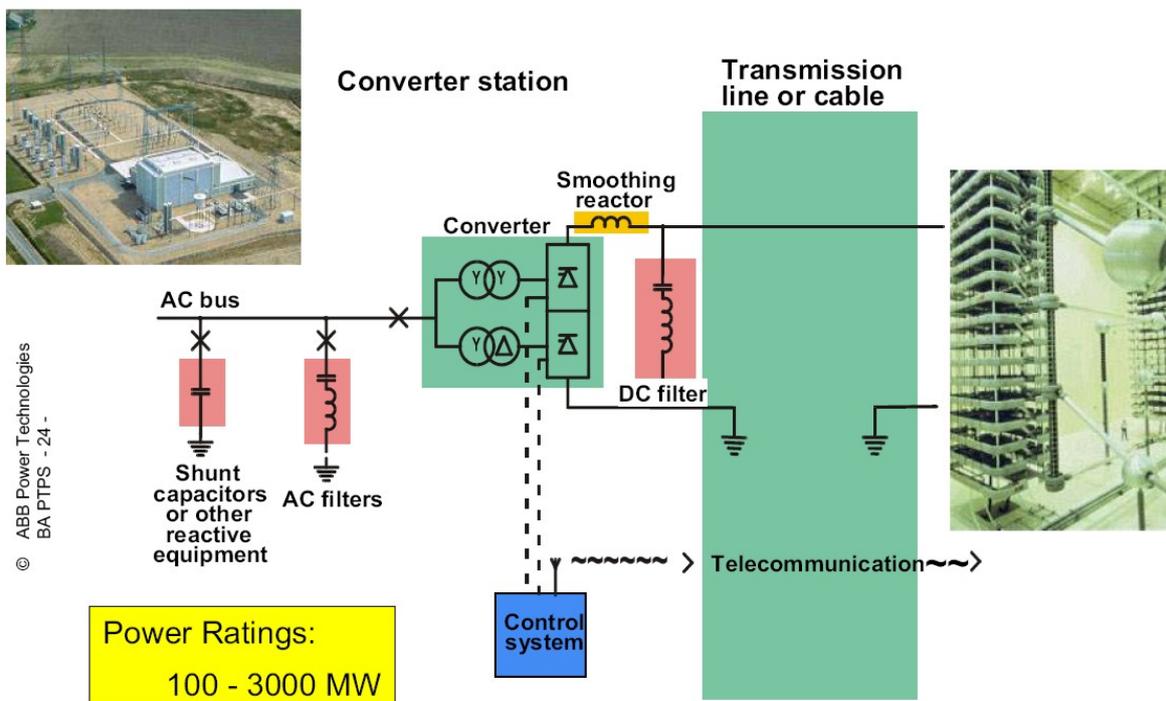
Cette liaison à courant continu (Gotland 1) fut la première ligne commerciale installée au monde (1954). D'une longueur de 90 km, elle reliait le continent à l'île par l'intermédiaire de deux câbles sous-marins. L'exploitation en 1954 a débuté avec une tension nominale de 100 kV (valves à vapeur de mercure) et une capacité de transport de 20 MW. L'ajout de valves à thyristor en 1970 (première mondiale à nouveau) a permis d'élever la tension continue à 150 kV, et d'augmenter la capacité de transport à 30 MW.

La liaison a été doublée par l'installation d'un nouveau câble entre les villes de Västervik (continent) et Ygne (île de Gotland) en 1983 (Gotland 2). La tension nominale était de 150 kV, et la capacité de transport de la ligne supplémentaire a été portée à 130 MW grâce à l'utilisation exclusive de valves à thyristors.

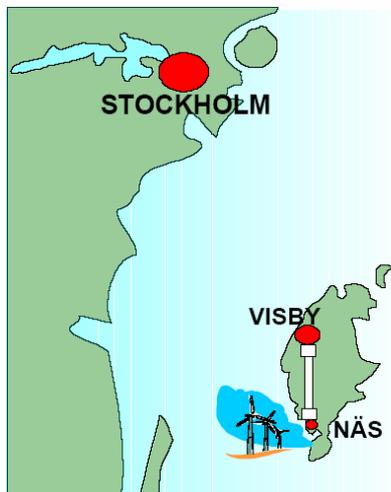
Les besoins en électricité de l'île augmentant, il a fallu, en 1985 mettre en place une troisième liaison de transport à courant continu haute tension (HVDC), Gotland 3. La capacité totale de transport atteint maintenant 260 MW. La première liaison, Gotland 1 a été mise hors service et démontée.



Le principe d'une liaison HVDC est décrit à la figure ci-dessous. La commutation des thyristors est assistée par le réseau alternatif à la fréquence de 50 Hz.



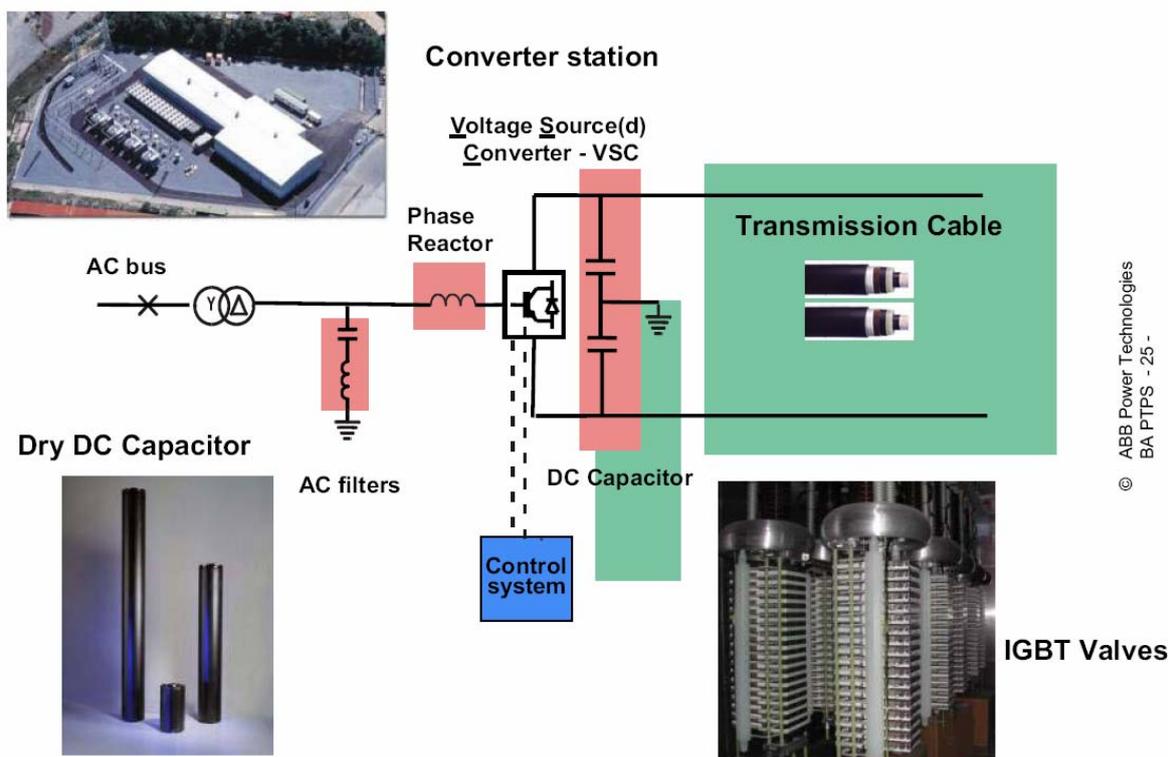
Le développement des énergies renouvelables a permis l'installation sur le sud de l'île de fermes éoliennes. Les infrastructures de transport d'énergie sur l'île ne pouvant absorber le surcroît de production, il a été nécessaire d'accroître la capacité de transport de l'énergie sur l'île, tout en acceptant les fluctuations importantes d'alimentation imposées par les conditions de fonctionnement variables des éoliennes. Un site naturel protégé sur l'île empêchait toute construction supplémentaire de lignes aériennes. Dans ces conditions, une ligne de transport d'énergie souterraine à courant continu a été installée entre les villes de Näs (à proximité des fermes éoliennes) et Visby (station de Bäcks).



Pour notamment améliorer la stabilité du réseau de l'île, et réduire la taille des stations de conversion d'énergie, une nouvelle forme de ligne de transport à courant continu a été développée : SVC (Static Voltage Converter) HVDC (High Voltage Direct Current).

Ce sont maintenant des IGBT qui sont utilisés à la place des valves à thyristors, et qui permettent par une fréquence de commutation plus élevée de réduire très significativement la taille des filtres habituellement installés sur les lignes classiques HVDC à thyristors.

La ligne a été inaugurée en 1999, elle a une capacité de 50 MW. Deux câbles sous-terrains de 80 kV relient les terminaux distants de 70 km. La figure ci-dessous montre le principe d'une liaison SVC HVDC utilisant des valves à IGBT.



Les photos ci-dessous montrent la station de Näs et les fermes éoliennes en arrière plan.

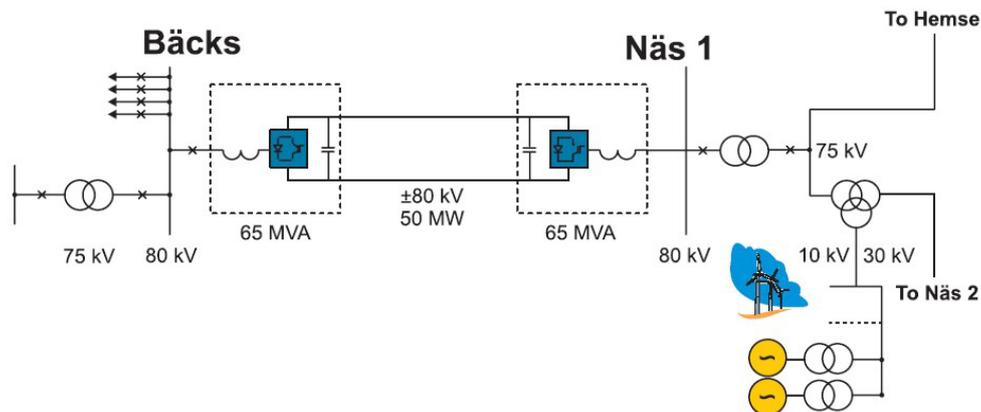


Les principaux intérêts d'une liaison SVC HVDC par rapport à une liaison HVDC utilisant des valves à thyristors peuvent être résumés ainsi :

- Réduction de la taille des filtres réseau
- Suppression des inductances de filtrage sur la ligne à courant continu
- Réduction des ondulations de tension et de courant sur la ligne à courant continu
- Contrôle indépendant des puissances actives et réactives, avec comme conséquence la possibilité de stabiliser le réseau alternatif
- Pas de besoin de synchronisation entre les stations

C'est sur une liaison de transport à courant continu de ce type que porte le sujet et principalement sur une des deux stations.

Les caractéristiques de la liaison SVC HVDC étudiée sont décrites dans la figure ci-dessous :



La fréquence des réseaux alternatifs est de 50 Hz.

Le sujet se décompose en 6 parties indépendantes :

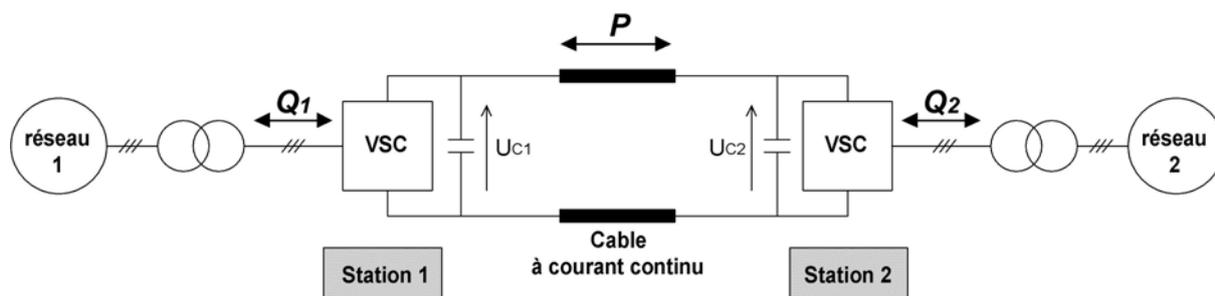
- L'objectif de la partie A est de définir les limites de fonctionnement en puissance et puissance réactive de la liaison de transport.
- La partie B est consacrée à la modélisation « haute fréquence » du câble.
- La partie C qui est à traiter impérativement, concerne l'étude d'une boucle de régulation de courant. Cette boucle de régulation permet indirectement de tenir compte des besoins en puissance active et réactive.
- La partie D est une modélisation de l'onduleur préparant à l'étude de la régulation par retour d'état (partie E). Ce travail ne nécessite aucune connaissance préalable de la transformation de Park pour être mené à son terme.
- La partie E concerne l'étude de l'asservissement de courant par retour d'état.
- La partie F porte sur la régulation de tension à la sortie de l'onduleur de la station 1.

Le candidat pourra aborder les six parties dans un ordre quelconque, néanmoins un effort de présentation est nécessaire pour la compréhension des réponses.

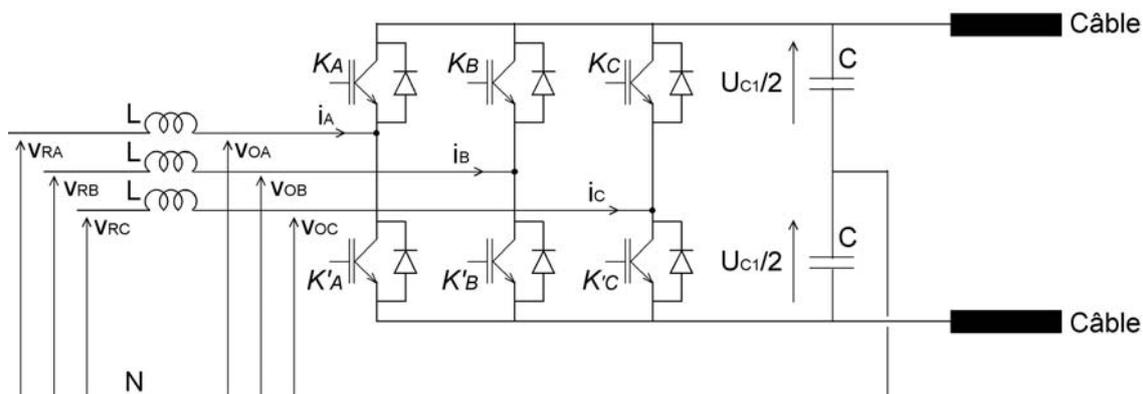
Partie A : contrôle de l'énergie

La structure générale d'une liaison SVC HVDC entre deux stations de conversion connectées à deux réseaux triphasés est indiquée à la figure suivante.

On note P la puissance transmise sur le câble, et Q_1 et Q_2 , les puissances réactives au niveau des stations 1 et 2.



Les onduleurs de tension commandés (VSC) assurant la conversion AC/DC sont totalement réversibles en puissance. Une structure simplifiée est représentée à la figure suivante. Le convertisseur nécessite trois inductances sur le réseau alternatif pour limiter les ondulations de courant réseau et des condensateurs sur le bus continu pour filtrer la tension de la liaison. Chaque IGBT représenté sur la figure est en réalité constitué de plusieurs IGBT connectés en série et éventuellement en parallèle pour supporter les contraintes en tension et en courant



Les tensions V_{RA} , V_{RB} , V_{RC} sont imposées par le réseau et forment un système de tensions triphasées directes, que nous supposons être équilibrées.

Notations temporelles :

$$v_{RA}(t) = V_R \sqrt{2} \cos(\theta)$$

$$v_{RB}(t) = V_R \sqrt{2} \cos(\theta - 2\pi/3)$$

$$v_{RC}(t) = V_R \sqrt{2} \cos(\theta + 2\pi/3)$$

Notations complexes :

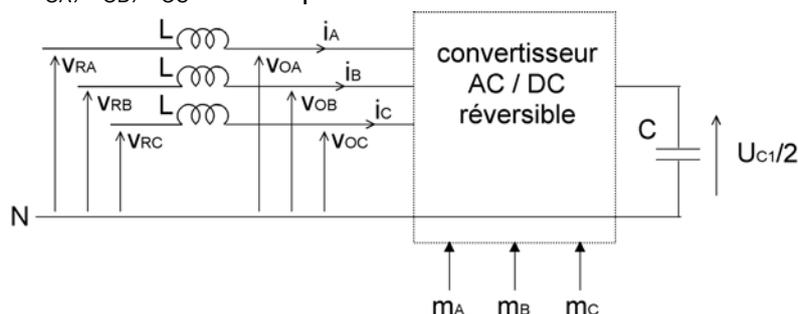
$$\underline{V}_{RA} = V_R$$

$$\underline{V}_{RB} = V_R \times e^{-j2\pi/3}$$

$$\underline{V}_{RC} = V_R \times e^{j2\pi/3}$$

avec $\theta = \omega t$, ω étant la pulsation du réseau alternatif

L'onduleur fonctionne en modulation de largeur d'impulsion et il ne sera pas étudié dans ce problème. Nous considérerons par la suite que la fréquence de découpage est suffisamment élevée pour pouvoir considérer les tensions v_{OA} , v_{OB} , v_{OC} comme parfaitement sinusoïdales.



Nous supposons donc que l'onduleur permet de générer, à partir d'une tension continue, les tensions V_{OA} , V_{OB} , V_{OC} qui seront assimilées à un réseau de tensions parfaitement sinusoïdales.

Les grandeurs de commande seront notées m_A , m_B et m_C .

En notant ψ le déphasage entre tensions simples réseau et tension simple d'une même phase de l'onduleur, on obtient :

Notations temporelles :

$$v_{OA}(t) = V_o \sqrt{2} \cos(\theta - \psi)$$

$$v_{OB}(t) = V_o \sqrt{2} \cos(\theta - 2\pi/3 - \psi)$$

$$v_{OC}(t) = V_o \sqrt{2} \cos(\theta + 2\pi/3 - \psi)$$

Notations complexes :

$$\underline{V_{OA}} = V_o \times e^{-j\psi}$$

$$\underline{V_{OB}} = V_o \times e^{-j2\pi/3} \times e^{-j\psi}$$

$$\underline{V_{OC}} = V_o \times e^{j2\pi/3} \times e^{-j\psi}$$

Les tensions v_{OA} , v_{OB} , v_{OC} à l'entrée de l'onduleur seront imposées par la tension continue U_{C1} de la liaison et les grandeurs de commande m_A , m_B et m_C , par les relations suivantes :

$$v_{OA}(t) = m_A(t) \frac{U_{C1}}{2}$$

$$v_{OB}(t) = m_B(t) \frac{U_{C1}}{2}$$

$$v_{OC}(t) = m_C(t) \frac{U_{C1}}{2}$$

Dans ces conditions, nous supposons également que les courants réseau i_{RA} , i_{RB} , i_{RC} sont parfaitement sinusoïdaux, et qu'ils forment un système de courant triphasés équilibrés. On note φ le déphasage entre courant de ligne et tension simple réseau, de sorte que les courants réseau s'écrivent :

Notations temporelles :

$$i_{RA}(t) = I_R \sqrt{2} \cos(\theta - \varphi)$$

$$i_{RB}(t) = I_R \sqrt{2} \cos(\theta - 2\pi/3 - \varphi)$$

$$i_{RC}(t) = I_R \sqrt{2} \cos(\theta + 2\pi/3 - \varphi)$$

Notations complexes :

$$\underline{I_{RA}} = I_R \times e^{-j\varphi}$$

$$\underline{I_{RB}} = I_R \times e^{-j2\pi/3} \times e^{-j\varphi}$$

$$\underline{I_{RC}} = I_R \times e^{j2\pi/3} \times e^{-j\varphi}$$

Avec les hypothèses formulées ci-dessus, les puissances actives et réactives délivrées par le réseau 1 s'écrivent :

$$P = 3V_R I_R \cos(\varphi)$$

$$Q = 3V_R I_R \sin(\varphi)$$

Nous supposons dans toute la suite que la valeur efficace V_R des tensions simples réseau est constante.

A.1 La station 1 assure le contrôle de la puissance réactive Q_1 et de la tension du bus continu U_{C1} . La station 2, identique en tous points à la station 1 contrôle également la puissance réactive Q_2 absorbée ou fourni au réseau 2. Quelle autre grandeur est nécessairement contrôlée par la station 2 ?

A.2 Donner l'expression temporelle des grandeurs de commande m_A , m_B et m_C en fonction de V_o , ψ , et U_{C1} .

A.3 Quelle est la différence de potentiel entre les deux câbles de la liaison de transport à courant continu ?

A.4 On note I_{RMAX} , le courant efficace réseau maximum limité par la capacité en courant des transistors de l'onduleur ; montrer que pour cette intensité maximale, le point de fonctionnement dans le plan P-Q est un cercle lorsque la tension réseau V_R est constante.

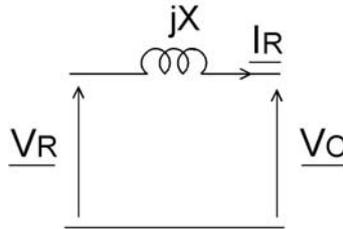
A.5 On donne $V_R = 46$ kV et $I_{RMAX} = 470$ A. Préciser sur le document réponse R1 les valeurs numériques de P_{MAX} et Q_{MAX} .

A.6 Le courant continu maximal dans le câble I_{DCMAX} est de 350 A. Calculer la puissance maximale pouvant transiter dans le câble.

A.7 Compléter alors dans ce cas la feuille de réponse R2 en indiquant les limites de fonctionnement dans le plan P-Q.

A.8 Tracer le diagramme de Fresnel des tensions \underline{V}_R , \underline{V}_O et du courant \underline{I}_R .

La tension \underline{V}_R est prise comme origine des phases, on note $X = L\omega$ la réactance du réseau.



Pour le tracé, on considèrera un courant \underline{I}_R en retard par rapport à \underline{V}_R avec un angle φ compris entre 0 et $\pi/2$.

A.9 À l'aide du diagramme de Fresnel, montrer que l'expression de la puissance réactive peut se mettre sous la forme suivante :

$$Q = 3 \frac{V_R^2}{X} \left(1 - \frac{V_O}{V_R} \cos(\Psi) \right)$$

A.10 Montrer que l'expression de la puissance active peut se mettre sous la forme suivante :

$$P = 3 \frac{V_O V_R}{X} \sin(\Psi)$$

A.11 La tension V_O est limitée à la valeur V_{OMAX} liée à la tension du bus continu. Montrer à partir des deux relations précédentes que dans ces conditions, les limites du point de fonctionnement dans le plan P-Q sont situées sur un cercle. Vous préciserez dans le plan P-Q l'expression des coordonnées du cercle ainsi que son rayon.

On rappelle que dans le plan x-y, l'équation d'un cercle de centre (x_0, y_0) et de rayon R est la suivante :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

A.12 Faire les applications numériques correspondantes, on prendra $L = 100$ mH, et $V_{OMAX} = 56$ kV.

A.13 Compléter alors la feuille de réponse R3 en indiquant toutes les limites du lieu des points de fonctionnement dans le plan P-Q.

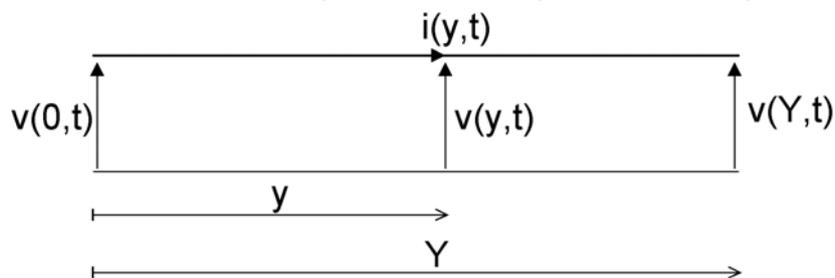
A.14 Indiquer les valeurs numériques des limites en puissance active et réactive.

A.15 Quel est l'intérêt de contrôler la tension du câble au voisinage de sa limite en tension ?

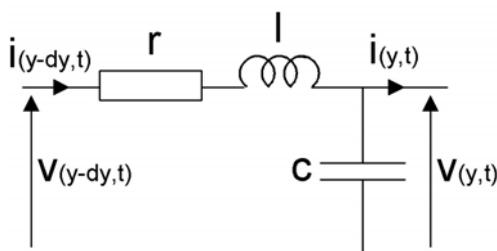
A.16 Quelle est la grandeur de consigne qui sera déduite des consignes en puissance active et réactive ?

Partie B : modélisation du câble

La ligne de transmission de puissance à courant continu de longueur totale notée Y est représentée par R_y , L_y et C_y respectivement résistance, inductance et capacité par unité de longueur. On considèrera par la suite les valeurs numériques suivantes : $R_y = 40 \text{ m}\Omega/\text{km}$, $C_y = 0,3 \text{ }\mu\text{F}/\text{km}$, $L_y = 0,2 \text{ mH}/\text{km}$



à la distance y de l'origine, le modèle d'un tronçon de ligne de longueur dy est indiqué ci-dessous :



B.1 Donner l'expression des éléments r , l et c du tronçon de câble de longueur dy .

B.2 Montrer que les courants et tensions le long de la ligne sont régis par les équations différentielles suivantes (équation des télégraphistes) :

$$\frac{\partial^2 v(y,t)}{\partial y^2} = R_y C_y \frac{\partial v(y,t)}{\partial t} + L_y C_y \frac{\partial^2 v(y,t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 i(y,t)}{\partial y^2} = R_y C_y \frac{\partial i(y,t)}{\partial t} + L_y C_y \frac{\partial^2 i(y,t)}{\partial t^2}$$

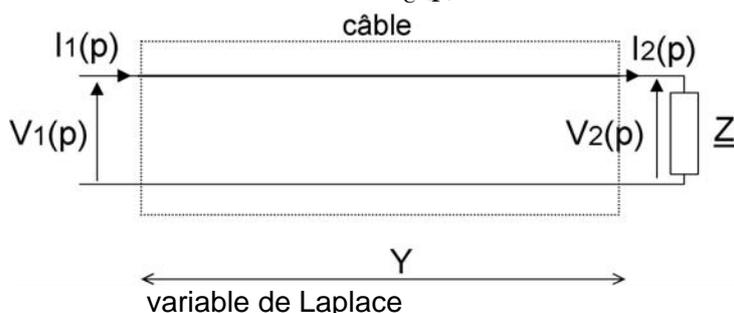
On rappelle que :

$$\frac{\partial v(y,t)}{\partial y} = \frac{v(y,t) - v(y-dy,t)}{dy}$$

Les solutions en régime harmonique de ces équations sont les suivantes pour une ligne de transmission de longueur Y . La ligne est chargée par une impédance $Z(p)$.

$$V_2(p) = V_1(p) \times \cosh(\lambda(p) \times Y) - Z_c(p) \times I_1(p) \times \sinh(\lambda(p) \times Y)$$

$$I_2(p) = I_1(p) \times \cosh(\lambda(p) \times Y) - \frac{V_1(p)}{Z_c(p)} \times \sinh(\lambda(p) \times Y)$$



Avec :

$$Z_c(p) = \sqrt{\frac{R_y + L_y p}{C_y p}}$$

variable de Laplace

l'impédance caractéristique de la ligne de transmission

$\lambda(p) = \sqrt{C_y p (R_y + L_y p)}$ la constante de propagation
 $\cosh(\)$ et $\sinh(\)$ les cosinus et sinus hyperboliques

B.3 On note $Z(p)$ la charge de la ligne, montrer que la fonction de transfert de la ligne de transmission s'écrit :

$$H(p) = \frac{V_2(p)}{V_1(p)} = \frac{\gamma(p)}{\gamma(p) \times \cosh(\lambda(p) \times Y) + \sinh(\lambda(p) \times Y)}$$

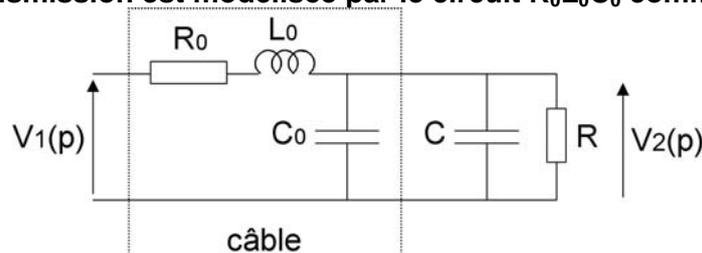
avec $\gamma(p) = \frac{Z(p)}{Z_C(p)}$ et on rappelle que : $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

B.4 La charge de la ligne est modélisée par une résistance R_L . Déterminer la valeur à donner à cette résistance lorsque la puissance de 50 MW s'écoule sur la ligne.

B.5 Le diagramme de Bode de la ligne de transmission est présenté en Annexe 1 dans le cas d'une charge résistive connectée à l'extrémité de la ligne, commenter ce diagramme et donner la valeur de l'amplification maximale (rapport V_2/V_1 max.).

B.6 En pratique, une capacité est placée aux deux extrémités de la ligne. Le diagramme de Bode de la ligne de transmission est indiqué en Annexe 2 dans le cas d'une charge RC connectée à l'extrémité de la ligne, commenter à nouveau ce diagramme en indiquant l'effet de la capacité, et préciser à nouveau la valeur de l'amplification maximale.

B.7 La ligne de transmission est modélisée par le circuit $R_0 L_0 C_0$ comme indiqué ci-dessous :



Calculer la fonction de transfert $V_2(p)/V_1(p)$ et la mettre sous la forme suivante :

$$\frac{V_2(p)}{V_1(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2m}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

B.8 En considérant les deux câbles de transport de longueur égale à 70 km chacun, soit 140 km au total, déterminer les valeurs de R_0 , L_0 et C_0 .

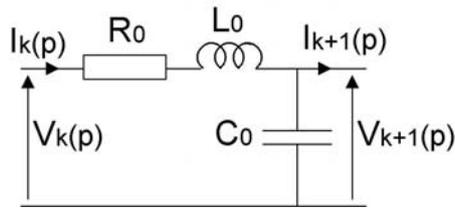
B.9 Donner les expressions du gain K , du facteur d'amortissement m et de la pulsation ω_0 , puis faire les applications numériques. On prendra $C = 50 \mu\text{F}$ et $R = 512 \Omega$.

B.10 Tracer sur la feuille de réponse R4 l'allure du gain (en dB), en précisant sur la feuille de réponse les quatre valeurs numériques suivantes : le gain à pulsation nulle, le gain maximal et la pulsation correspondante ainsi que la pente exprimée en dB par décade lorsque $\omega \gg \omega_0$.

On rappelle que pour la transmittance définie par, $G(p) = \frac{1}{1 + \frac{2m}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$

le facteur de résonance Q s'écrit : $Q = \frac{1}{2m\sqrt{1 - m^2}}$

B.11 On cherche maintenant à modéliser la ligne de transmission par un nombre fini de cellules RLC. Chaque cellule RLC représente une longueur L/N du câble, L étant la longueur totale du câble et N le nombre de cellules élémentaires. On notera R_0 , L_0 et C_0 les éléments de ces cellules élémentaires.

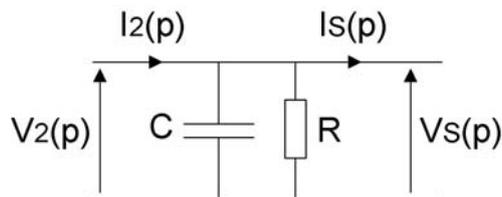


Écrire les éléments $A_{11}(p)$, $A_{12}(p)$, $A_{21}(p)$ et $A_{22}(p)$ de la matrice de transfert notée $[A]$ du quadri-pôle ainsi constitué telle que :

$$\begin{bmatrix} V_{k+1}(p) \\ I_{k+1}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}(p) & A_{12}(p) \\ A_{21}(p) & A_{22}(p) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_k(p) \\ I_k(p) \end{bmatrix}$$

avec $[A] = \begin{bmatrix} A_{11}(p) & A_{12}(p) \\ A_{21}(p) & A_{22}(p) \end{bmatrix}$

B.12 La charge à l'extrémité du câble est constituée d'un condensateur associé à une résistance en parallèle :



Écrire la matrice de transfert de la charge de la ligne, on notera $[B]$ cette matrice.

$$\begin{bmatrix} V_s(p) \\ I_s(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11}(p) & B_{12}(p) \\ B_{21}(p) & B_{22}(p) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_2(p) \\ I_2(p) \end{bmatrix}$$

avec $[B] = \begin{bmatrix} B_{11}(p) & B_{12}(p) \\ B_{21}(p) & B_{22}(p) \end{bmatrix}$

B.13 Écrire la matrice de transfert de la ligne notée $[L]$ à l'aide des matrices $[A]$ et $[B]$, telle que :

$$\begin{bmatrix} V_s(p) \\ I_s(p) \end{bmatrix} = [L] \times \begin{bmatrix} V_1(p) \\ I_1(p) \end{bmatrix}$$

B.14 En constatant que $I_s(p)$ est nul, écrire la fonction de transfert de la ligne notée $HL(p)$, à l'aide des éléments $L_{11}(p)$, $L_{12}(p)$, $L_{21}(p)$, $L_{22}(p)$ de la matrice de transfert totale $[L]$ avec :

$$HL(p) = \frac{V_s(p)}{V_1(p)}$$

On notera : $[L] = \begin{bmatrix} L_{11}(p) & L_{12}(p) \\ L_{21}(p) & L_{22}(p) \end{bmatrix}$

B.15 Les annexes 3 et 4 montrent les diagrammes de Bode de la fonction de transfert $HL(p)$ précédente (modèle de la ligne), pour 2 modèles différents, avec 2 et 10 cellules.

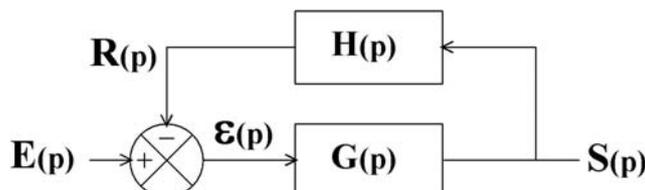
Déterminer les valeurs de R_0 , C_0 et L_0 pour ces deux modèles, comparer les résultats, et décrire quel pourrait être l'intérêt d'un tel modèle dans un enseignement.

Partie C : régulation simplifiée du courant de ligne

La puissance transmise sur le câble est le produit de la tension continue aux bornes du câble par le courant qui y circule. Cette puissance est conservée sur le réseau alternatif de la station 2 et correspond aux besoins énergétiques. Pour optimiser la distribution de l'énergie, on a intérêt à ce que le courant et la tension soient en phase. Il est donc nécessaire d'asservir le courant sur chacune des phases du réseau triphasé à une consigne liée à la puissance.

C.I Étude d'une boucle de régulation

La boucle de régulation présente une fonction de transfert $H(p)$ dans la boucle de retour :

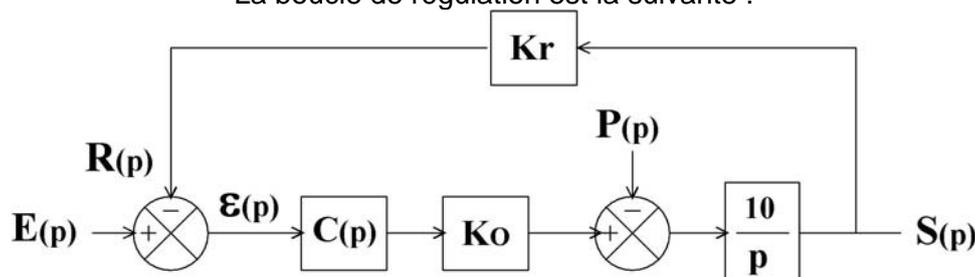


C.I.1 Donner l'expression de la fonction de transfert $T_{BO}(p)$ en boucle ouverte, avec

$$T_{BO}(p) = \frac{R(p)}{\varepsilon(p)}$$

C.I.2 Donner l'expression de la fonction de transfert $T(p)$ en boucle fermée.

La boucle de régulation est la suivante :



Les courants sont mesurés à partir de sondes à effet Hall de gain K_r . On considèrera les valeurs numériques suivantes :

$K_r = 0,01$ V/A Gain du capteur de courant

$K_o = 40\,000$ Gain de l'onduleur

L'entrée $P(p)$ est une perturbation et l'entrée $E(p)$ une consigne.

Correction proportionnelle : $C(p) = K_p$

C.I.3 L'entrée de perturbation est constante, on applique un échelon d'entrée $E(p) = E_0 / p$, donner la valeur de l'erreur en régime permanent en la justifiant, mais sans aucun calcul.

C.I.4 L'entrée de la boucle de régulation est constante, on applique un échelon de perturbation $P(p) = P_0 / p$, donner la valeur de l'erreur en régime permanent en la justifiant, mais sans aucun calcul.

C.I.5 Donner l'expression littérale de l'erreur $\varepsilon(p)$ en fonction de K_p , K_r , K_o , $E(p)$ et $P(p)$

C.I.6 Retrouver, à l'aide du théorème de la valeur finale cette fois, les résultats des questions C.I.3 et C.I.4

On s'intéresse au comportement dynamique de l'asservissement. L'entrée de perturbation est constante : $P(p) = 0$.

C.I.7 Donner l'expression temporelle de la sortie $s(t)$ en réponse à un échelon d'entrée d'amplitude E_0 .

- C.I.8 Donner l'expression du temps de réponse à 5%
- C.I.9 Déterminer la valeur numérique de K_p (gain du correcteur proportionnel) pour obtenir un temps de réponse à 5% de 20 ms

Correction proportionnelle et intégrale (PI) : $C(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right)$

- C.I.10 Tracer sur le document réponse R5 le diagramme asymptotique de Bode de ce correcteur en précisant les valeurs particulières (on prendra pour le tracé $T_i = 1\text{ms}$ et $K_p = 0,1$).

On désire améliorer la stabilité de la boucle de régulation.

- C.I.11 L'entrée de la boucle de régulation est constante, on applique un échelon de perturbation $P(p) = P_0 / p$, donner la valeur de l'erreur en régime permanent, justifier la réponse et justifier le rôle du correcteur PI.

Pour la suite de cette étude $P(p) = 0$ et on envisage une variation de la consigne $E(p)$.

- C.I.12 Donner l'expression de la fonction de transfert $T_{Bo}(p)$ en boucle ouverte en fonction de K_p , T_i , K_r , K_o .
- C.I.13 Tracer le diagramme de Bode asymptotique du système en boucle ouverte sur le document réponse R6
- C.I.14 On cherche à obtenir une marge de phase de 45° à la pulsation de 1000 rad/s . Calculer les constantes K_p et T_i (on demande de déterminer les valeurs par le calcul, et non graphiquement).

La fonction de transfert en boucle ouverte (sans correcteur inséré dans la boucle) est en pratique celle indiquée sur la feuille de réponse R7

- C.I.15 On cherche encore à obtenir une marge de phase de 45° à la pulsation de $1\ 000\text{ rad/s}$. Calculer la constante K_p du correcteur PI pour $T_i = 1\text{ms}$.

C.II Étude d'un asservissement numérique de courant

- C.II.1 Soit la fonction de transfert $R(p)$ définie ci-dessous :

$$R(p) = e^{-\tau p}$$

Indiquer ce que représente cette fonction de transfert

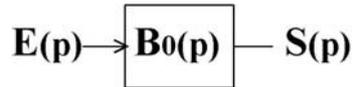
- C.II.2 Compléter le document réponse R8 en donnant les valeurs numériques du module et de la phase exprimée en degré pour les pulsations indiquées.

La fonction de transfert $R(p)$ est approchée par la fonction de transfert suivante $R_0(p)$: $R_0(p) = \frac{1 - \frac{\tau p}{2}}{1 + \frac{\tau p}{2}}$

- C.II.3 Compléter le document réponse R9 en donnant les valeurs numériques du module et de la phase de $R_0(p)$ pour les pulsations indiquées.

- C.II.4 Tracer le diagramme de Bode de $R(p)$ et $R_0(p)$ sur le document réponse R10 en vous aidant des valeurs numériques indiquées dans les deux tableaux précédents, on prendra $\tau = 10\ \mu\text{s}$ et donner les limites fréquentielles de l'approximation (la limite fréquentielle sera estimée lorsque l'écart entre les phases est supérieur à 45°).

Soit $B_0(p)$ le bloqueur d'ordre 0.



C.II.5 Rappeler la réponse d'un bloqueur d'ordre 0 à une impulsion de Dirac en entrée. On note T_e la période d'échantillonnage

C.II.6 En déduire à partir de la transformée de Laplace, la fonction de transfert d'un bloqueur d'ordre 0.

$$\text{On rappelle que } S(p) = \int_0^{\infty} s(t)e^{-pt} dt$$

C.II.7 Compléter le document réponse R11 en indiquant la fonction réalisée par le bloqueur d'ordre 0 en représentant l'évolution temporelle de $s(t)$.

C.II.8 Donner l'expression de la fonction de transfert $B(p)$ du bloqueur d'ordre zéro.

$$\text{On supposera pour cela (approximation de Padé) que : } e^{-pT_e} = \frac{1 - \frac{pT_e}{2}}{1 + \frac{pT_e}{2}}$$

C.II.9 Conclure sur la validité de l'approximation au regard des contraintes imposées sur la fréquence d'échantillonnage T_e .

C.II.10 Indiquer l'effet que peut avoir le bloqueur d'ordre 0 sur les performances de la régulation.

On cherche maintenant à décrire l'algorithme du correcteur proportionnel intégral implanté numériquement. On rappelle la fonction de transfert du correcteur PI ci dessous :

$$C(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right)$$

C.II.11 Écrire l'équation différentielle reliant $e(t)$, $\frac{de(t)}{dt}$ et $\frac{ds(t)}{dt}$

Les échantillons d'un signal $x(t)$ pris aux instant kT_e , $(k-1)T_e$, ... sont notés $x(k)$, $x(k-1)$, De plus, on calculera la dérivée du signal $x(t)$ aux instants kT_e par la relation suivante (Euler) :

$$\frac{dx(k)}{dt} = \frac{x(k) - x(k-1)}{T_e}$$

C.II.12 Écrire l'équation récurrente permettant de calculer l'échantillon $s(k)$.

C.II.13 En déduire la fonction de transfert en z du correcteur PI.

Le correcteur de la boucle de courant est implanté numériquement.

C.II.14 Compléter le document réponse R12 en précisant le contenu des blocs.

C.II.15 L'échantillonneur bloqueur est généralement précédé d'un filtre passe-bas. Préciser l'intérêt de ce filtre.

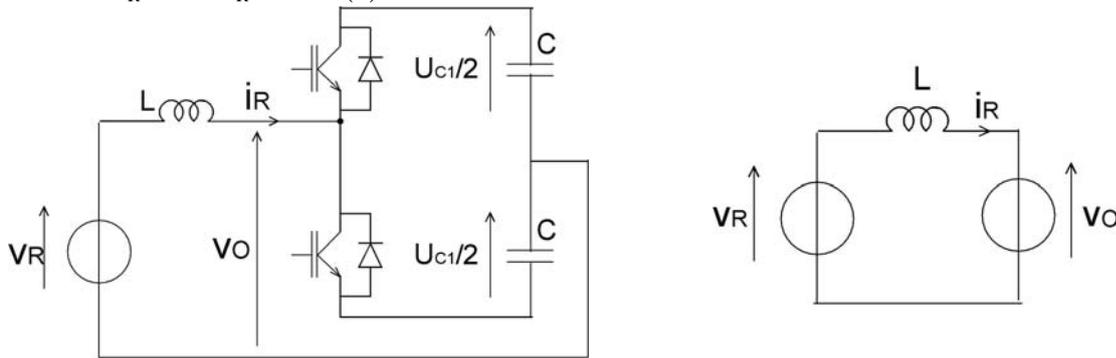
C.III Modélisation de la boucle de régulation en courant

Dans l'hypothèse simplificatrice où l'on néglige tout déséquilibre, les puissances actives et réactives consommées par l'onduleur de la station 1 s'écrivent :

$$P = 3V_R I_R \cos(\varphi)$$

$$Q = 3V_R I_R \sin(\varphi)$$

Dans ces mêmes hypothèses, l'étude de la régulation peut porter sur le schéma équivalent par phase suivant, avec $v_R(t) = V_R \sqrt{2} \cos(\theta)$ et $\theta = \omega t$, ω étant la pulsation du réseau alternatif.



En supposant une fréquence de découpage élevée, on suppose toujours que la tension v_O est parfaitement sinusoïdale pour le circuit v_R , L , v_O , et qu'elle s'écrit :

$$v_O(t) = V_O \sqrt{2} \cos(\theta - \psi)$$

Le courant réseau est mesuré par l'intermédiaire d'un capteur de courant de gain K_i . L'onduleur de tension se comporte vis-à-vis de sa commande comme un gain pur G_O .

- C.III.1 On cherche à mesurer une éventuelle composante continue sur le courant réseau, donner la technologie des capteurs à ne pas employer.**
- C.III.2 En utilisant les variables de Laplace, exprimer la relation entre $I_R(p)$, $V_R(p)$ et $V_O(p)$.**
- C.III.3 Compléter le document réponse R13 en faisant notamment apparaître sur la feuille de réponse, la tension réseau $V_R(p)$, la tension onduleur $V_O(p)$, le gain de la sonde de courant K_i , et en remplissant le bloc vide par sa fonction de transfert.**
- C.III.4 Donner l'expression numérique temporelle de la consigne en courant $i_{réf}(t)$ de sorte que le réseau triphasé fournisse une puissance de 50 MW, avec une puissance réactive nulle (on prendra $V_R = 46$ kV).**
- C.III.5 Donner dans ces mêmes conditions l'expression de $v_O(t)$, en précisant sa valeur efficace et son déphasage par rapport à $v_R(t)$, on prendra $L = 100$ mH**
- C.III.6 Préciser la principale différence entre l'étude qu'il faudrait porter au correcteur dans ce cas, et celle effectuée dans la partie C.I**

La commande de l'onduleur nécessite en pratique d'estimer très précisément la pulsation du réseau et plus particulièrement sa phase.

- C.III.7 Proposer un dispositif permettant de connaître et de suivre la phase des tensions réseau.**

Partie D : modèle de la station 1

Soit le système triphasé direct de tension suivant :

$$v_{OA}(t) = V_o \sqrt{2} \cos(\theta - \psi)$$

$$v_{OB}(t) = V_o \sqrt{2} \cos(\theta - 2\pi/3 - \psi)$$

$$v_{OC}(t) = V_o \sqrt{2} \cos(\theta + 2\pi/3 - \psi)$$

Ce réseau triphasé peut s'écrire sous forme matricielle de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} V_{OA} \\ V_{OB} \\ V_{OC} \end{bmatrix} = V_o \sqrt{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \times [T_{32}] \times [R(\theta - \psi)] \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[T_{32}] \text{ est la matrice de Concordia et s'écrit : } [T_{32}] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

$$[R(\theta)] \text{ est la matrice de rotation et s'écrit : } [R(\theta)] = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

D.1 Vérifier que la matrice $[T_{32}]$ est normée en démontrant la relation suivante :

$$[T_{32}^T] \times [T_{32}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On peut également montrer que la matrice inverse de $[R(\theta)]$ s'écrit :

$$[R(\theta)]^{-1} = [R(-\theta)]$$

Un système triphasé sans composante homopolaire peut être remplacé par un système diphasé de même pulsation (conservation des puissances actives et réactives). Ce passage est symbolisé par la transformation T_{32} . Une rotation de pulsation ω (pulsation réseau) appliquée au système diphasé permet de s'affranchir du temps. Par conséquent, après cette deuxième transformation les grandeurs V_d et V_q obtenues sont des tensions continues. La transformation peut être appliquée aux courants également et la puissance est conservée.

Un système triphasé sans composante homopolaire (système direct et inverse) peut alors se mettre sous la forme générale suivante :

$$\begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix} = [T_{32}] \times [R(\omega t + \varphi)] \times \begin{bmatrix} V_d \\ V_q \end{bmatrix}$$

V_d et V_q sont des grandeurs continues lorsque $\theta = \omega t$, avec ω la pulsation du réseau.

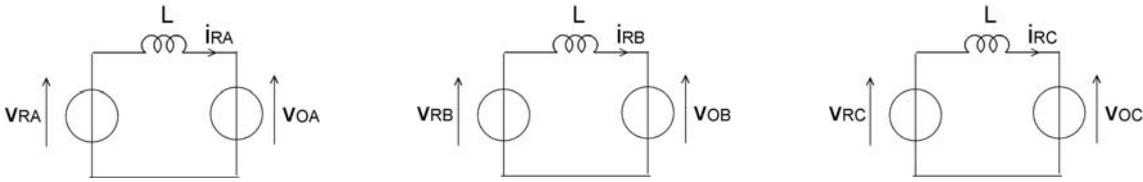
D.2 Montrer la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} V_d \\ V_q \end{bmatrix} = [R(-\omega t - \varphi)] \times [T_{32}^T] \times \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix}$$

D.3 En appliquant cette relation au système triphasé direct présenté en début de cette partie ($v_{OA}(t)$, $v_{OB}(t)$, $v_{OC}(t)$), en remarquant que $\theta = \omega t$ et pour $\varphi = 0$, exprimer V_{Od} et V_{Oq} .

D.4 À partir du résultat précédent, écrire les grandeurs continues, respectivement, V_{Rd} , V_{Rq} et I_{Rd} , I_{Rq} des grandeurs triphasées v_{RA} , v_{RB} , v_{RC} et i_{RA} , i_{RB} , i_{RC} .

D.5 On reprend maintenant la modélisation du courant réseau, mais de façon triphasée cette fois ; en décomposant le système triphasé en trois réseaux monophasés indépendants tels que présentés ci-dessous :



Écrire les trois équations instantanées indépendantes permettant de relier la dérivée temporelle des courants de ligne I_{RA} , I_{RB} , I_{RC} aux tensions V_{RA} , V_{RB} , V_{RC} et V_{OA} , V_{OB} , V_{OC} .

D.6 Montrer, qu'après application des matrices de Concordia et de rotation, ces trois équations peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$[R(\theta)] \times \begin{bmatrix} V_{Rd} \\ V_{Rq} \end{bmatrix} - [R(\theta)] \times \begin{bmatrix} V_{Od} \\ V_{Oq} \end{bmatrix} = L \times \frac{d}{dt} \left([R(\theta)] \times \begin{bmatrix} I_{Rd} \\ I_{Rq} \end{bmatrix} \right)$$

D.7 En utilisant la relation matricielle suivante :

$$\frac{d}{dt} \left([R(\theta)] \times \begin{bmatrix} I_{Rd} \\ I_{Rq} \end{bmatrix} \right) = \frac{d}{dt} [R(\theta)] \times \begin{bmatrix} I_{Rd} \\ I_{Rq} \end{bmatrix} + [R(\theta)] \times \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} I_{Rd} \\ I_{Rq} \end{bmatrix}$$

$$\text{et en constatant que : } \frac{d}{dt} [R(\theta)] = \omega [R(\theta + \frac{\pi}{2})]$$

Montrer que les grandeurs continues associées aux grandeurs triphasées des tensions et courants respectent la relation matricielle suivante :

$$[V_{RP}] - [V_{OP}] = L\omega \times [R(-\theta)] \times [R(\theta + \frac{\pi}{2})] \times \begin{bmatrix} I_{Rd} \\ I_{Rq} \end{bmatrix} + L \times \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} I_{Rd} \\ I_{Rq} \end{bmatrix}$$

D.8 Montrer alors que les grandeurs continues des tensions et courants peuvent s'écrire de la manière suivante :

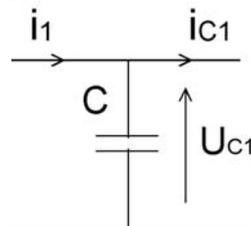
$$V_{Rd} - V_{Od} = L \frac{d(I_{Rd})}{dt} - L\omega I_{Rq}$$

$$V_{Rq} - V_{Oq} = L \frac{d(I_{Rq})}{dt} + L\omega I_{Rd}$$

que l'on peut écrire également sous la forme suivante :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} I_{Rd} \\ I_{Rq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{Rd} \\ I_{Rq} \end{bmatrix} + \frac{1}{L} \begin{bmatrix} V_{Rd} - V_{Od} \\ V_{Rq} - V_{Oq} \end{bmatrix}$$

On cherche maintenant un modèle pour le contrôle de la tension U_{C1} de sortie du convertisseur. On note i_1 , le courant de sortie du convertisseur et i_{C1} le courant dans le câble.



D'autre part, on considère les grandeurs de commande du convertisseur, notées m_d et m_q , telles que :

$$v_{Od} = m_d \frac{u_{C1}}{2}$$

$$v_{Oq} = m_q \frac{u_{C1}}{2}$$

On utilisera également la propriété de conservation de la puissance des transformations utilisées, propriété se traduisant par l'équation suivante :

$$u_{C1} \times i_1 = v_{Od} \times i_{Rd} + v_{Oq} \times i_{Rq}$$

D.9 En utilisant la conservation de la puissance instantanée entre entrée et sortie du convertisseur, écrire la relation reliant i_1 à i_{rd} , i_{rq} , m_d et m_q .

D.10 En appliquant la loi des nœuds à la figure précédente, montrer que l'évolution de la tension aux bornes de C peut se mettre sous la forme suivante :

$$\beta \frac{d(u_{C1})}{dt} = i_{Rd} + i_E$$

D.11 Donner les expressions de β et i_E .

On note : $i = i_{Rd} + i_E$

D.12 Le document réponse R14 représente le schéma bloc de la boucle de régulation intégrant également le modèle du système. Compléter le document réponse R14 en rajoutant dans la modélisation du système, l'entrée sur l'additionneur et la fonction de transfert du bloc vide.

Partie E : modèle d'état de la boucle de courant et régulation du courant de ligne au sens des variables d'état

Un système modélisé sous la forme d'une représentation d'état peut s'écrire de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \dot{[x(t)]} &= [A] \times [x(t)] + [B] \times [e(t)] \\ [s(t)] &= [C] \times [x(t)] + [D] \times [e(t)] \end{aligned}$$

Dans la première équation, la matrice d'état [A] garantit la stabilité du système. La matrice [C] de la seconde équation est la matrice d'observation (mesure).

$[x(t)]$ est le vecteur d'état
 $\dot{[x(t)]} = \left[\frac{dx(t)}{dt} \right]$ est la dérivée du vecteur d'état
 $[e(t)]$ est le vecteur de commande
 $[s(t)]$ est le vecteur de sortie
 $[B]$ est la matrice de commande

La modélisation de l'évolution des courants I_{Rd} et I_{Rq} , écrite à la question D.8 est rappelée et simplifiée ici dans le cas où la tension réseau est prise comme origine des phases ($V_{Rq} = 0$).

$$\begin{aligned} V_{Rd} - V_{Od} &= L \frac{d(I_{Rd})}{dt} - L\omega I_{Rq} \\ -V_{Oq} &= L \frac{d(I_{Rq})}{dt} + L\omega I_{Rd} \end{aligned}$$

Le vecteur d'état $[x(t)]$ s'écrit : $[x(t)] = \begin{bmatrix} I_{Rd} \\ I_{Rq} \end{bmatrix}$

Les grandeurs de commande de l'onduleur triphasées notées m_d et m_q contrôlent respectivement les composantes V_{Od} et V_{Oq} du réseau triphasé de tensions à l'entrée du convertisseur, V_{OA} , V_{OB} , V_{OC} . Il vient :

$$\begin{aligned} V_{Od} &= m_d \frac{U_{c1}}{2} \\ V_{Oq} &= m_q \frac{U_{c1}}{2} \end{aligned}$$

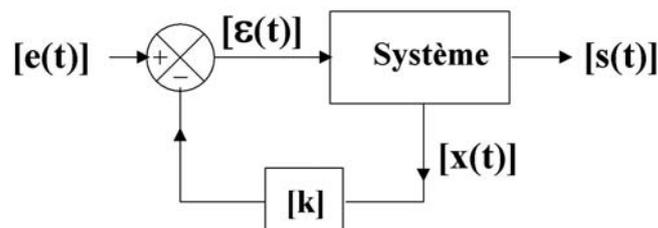
Le vecteur de commande $[e(t)]$ sera le vecteur suivant : $[e(t)] = \begin{bmatrix} m_d - \frac{2V_{Rd}}{U_{c1}} \\ m_q \end{bmatrix}$

On ne s'intéresse dans cette partie qu'à la stabilité de la boucle de courant et seule la première équation sera considérée par la suite.

$$\dot{[x(t)]} = [A] \times [x(t)] + [B] \times [e(t)]$$

E.1 À partir des vecteurs d'état et de commande, donner les expressions des composantes des matrices [A] et [B], qui sont toutes deux des matrices 2x2.

Le système est ensuite bouclé par une matrice de gain [k] 2x2, les vecteurs d'état et de commande étant de rang 2.



E.2 À partir de l'expression temporelle $[\dot{x}(t)] = [A] \times [x(t)] + [B] \times [\varepsilon(t)]$, montrer que la transformée de Laplace $[X(p)]$ de $[x(t)]$ peut s'écrire :

$$[X(p)] = (p \times [I] - [A])^{-1} \times [B] \times \varepsilon(p)$$

avec p la variable de Laplace et $[I]$ la matrice identité, $[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Soit $P^*(p)$ le polynôme caractéristique défini par :

$$P^*(p) = \det\{p \times [I] - [A] + [B] \times [k]\}$$

Les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée sont les racines de l'équation caractéristique précédente, valeurs de p (variable de Laplace) pour lesquelles le polynôme caractéristique est nul.

On prendra une matrice de gain $[k]$ de la forme suivante : $[k] = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ -k_2 & k_1 \end{bmatrix}$

E.3 Écrire le polynôme caractéristique $P^*(p)$ sous la forme suivante :

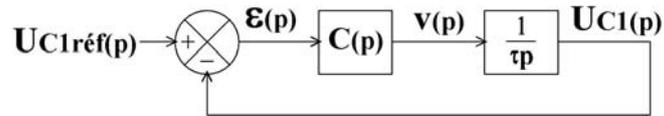
$$P^*(p) = p^2 + \alpha_1 p + \alpha_2$$

E.4 Donner les expressions de α_1 et α_2 .

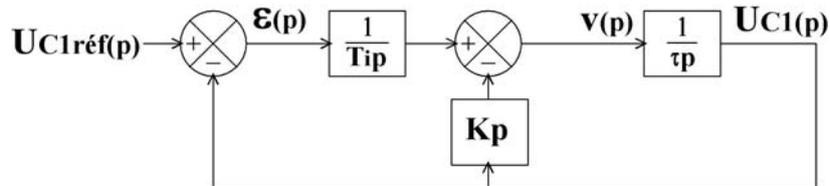
E.5 Conclure sur l'intérêt d'une commande par retour d'état.

Partie F : régulation de la tension de sortie de la station 1

La boucle de tension fait apparaître le schéma fonctionnel suivant :



Le correcteur retenu est de type proportionnel intégral sans zéro dont l'architecture est présentée ci-dessous :



F.1 Donner l'expression des coefficients T_i et K_p du correcteur permettant d'obtenir en boucle fermée une réponse du second ordre du type :

$$\frac{U_{C1}(p)}{U_{C1réf}(p)} = \frac{1}{1 + \frac{2mp}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

On choisit les constantes T_i et K_p afin d'obtenir $m = 1/\sqrt{2}$ et une bande passante à -3 dB valant 10 Hz.

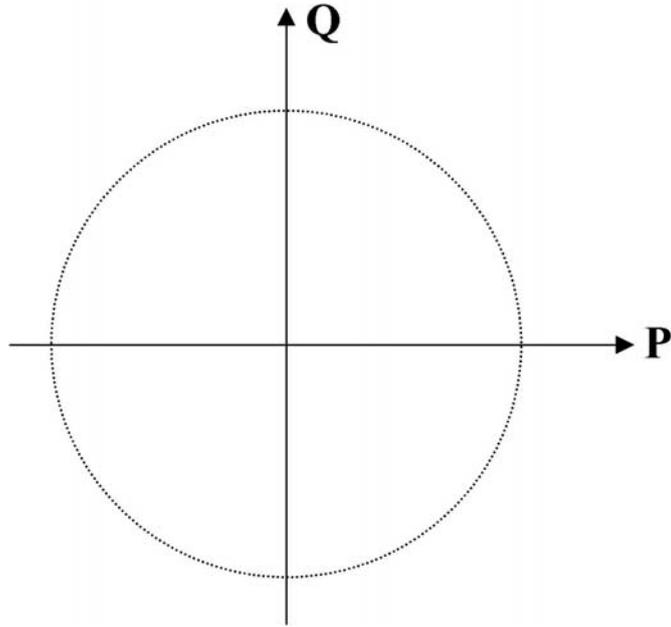
F.2 Donner l'expression de m et ω_0 en fonction de T_i , K_p et τ .

F.3 Tracer l'allure de la réponse à un échelon de consigne sur le document réponse R15, on ne demande pas d'indications numériques, simplement une allure.

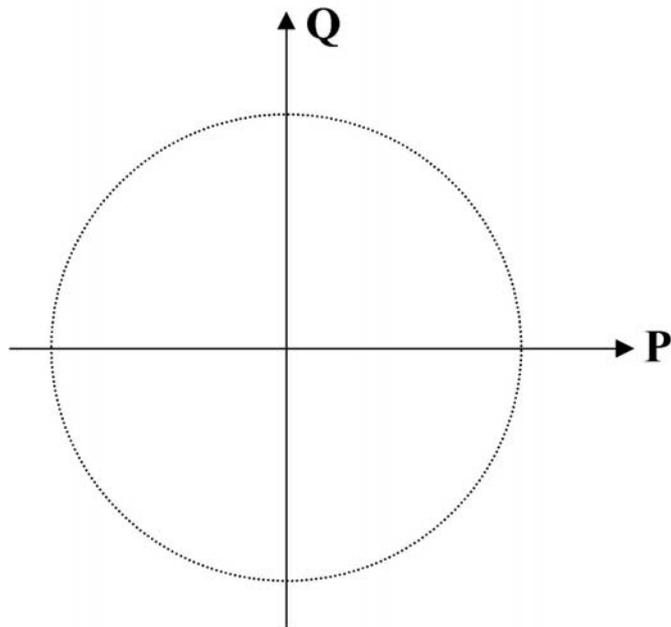
F.4 Calculer la pulsation ω_0 .

F.5 Donner le temps de réponse à 5% de la boucle de tension.

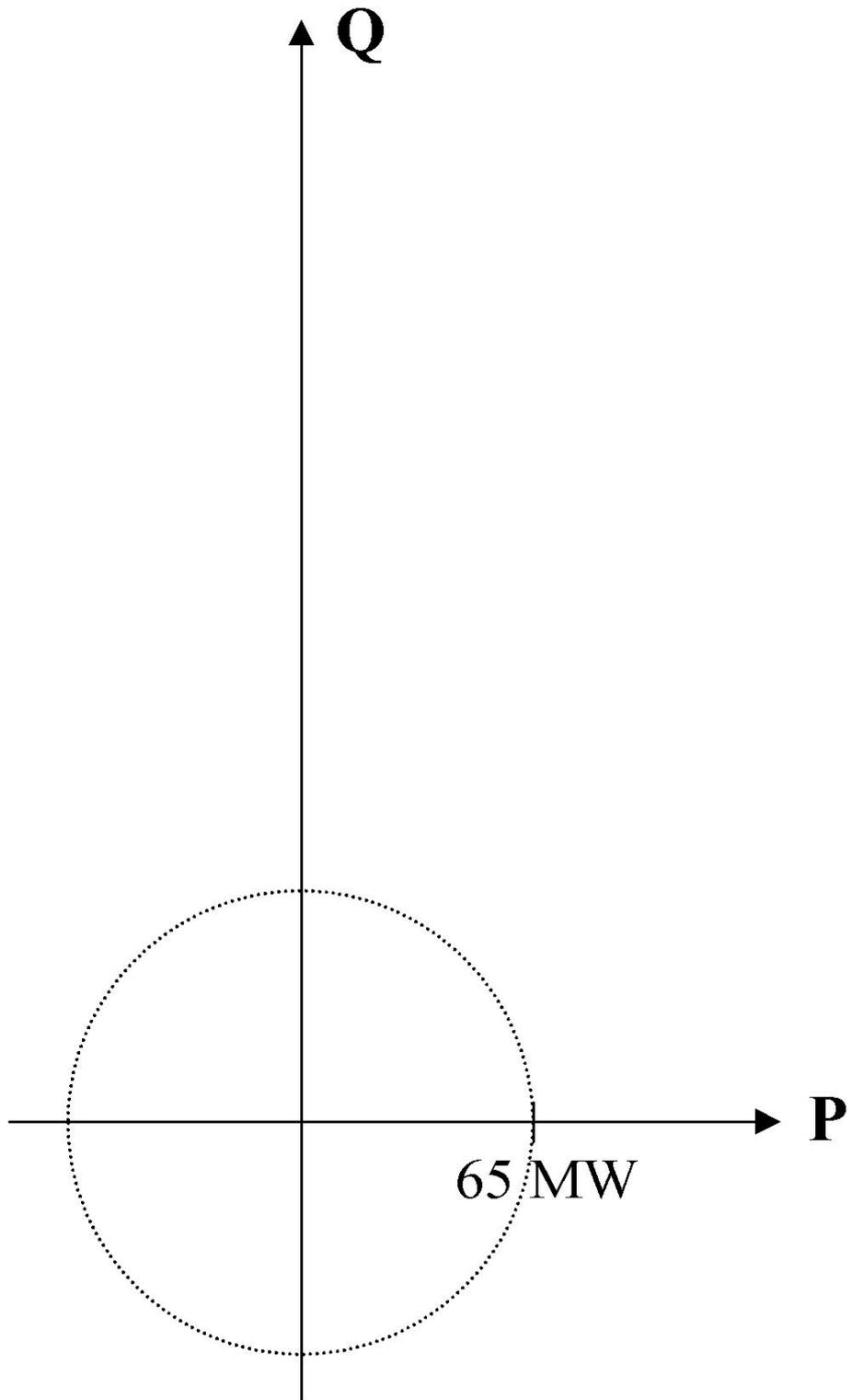
Document Réponse R1



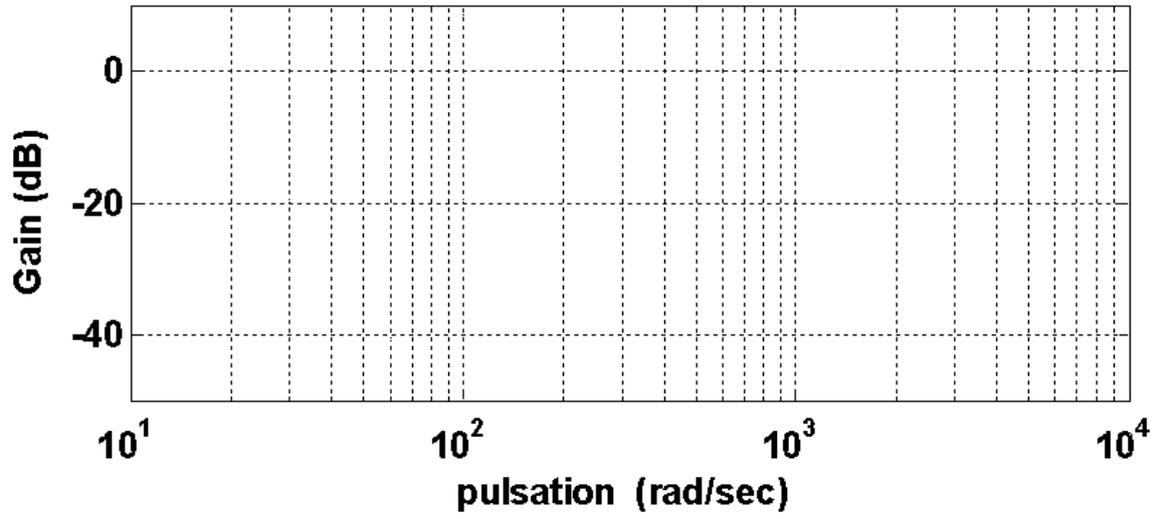
Document Réponse R2



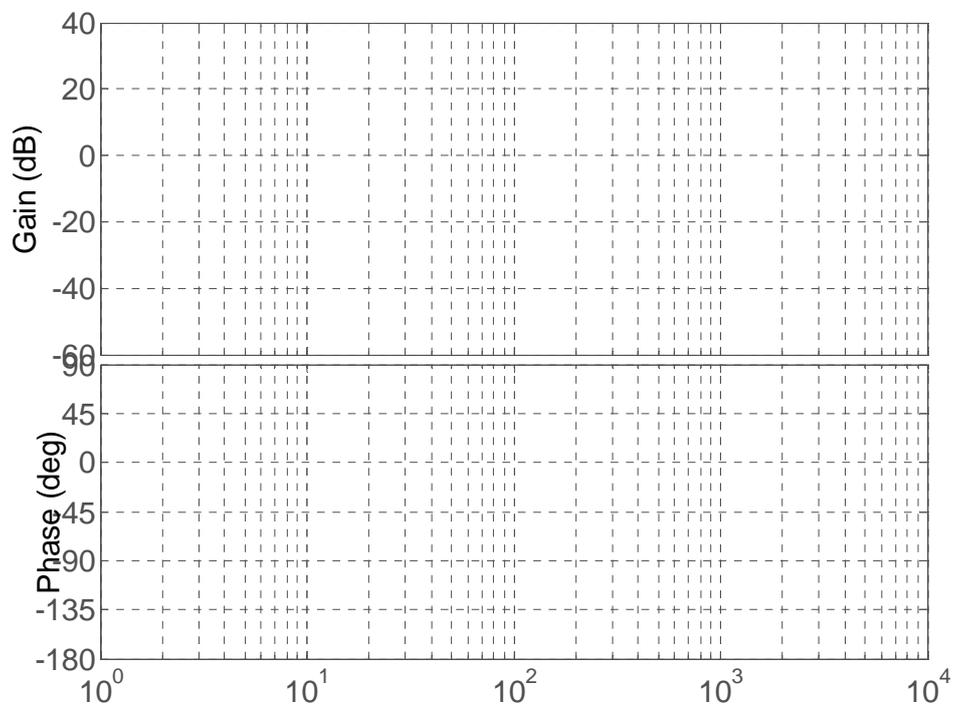
Document Réponse R3



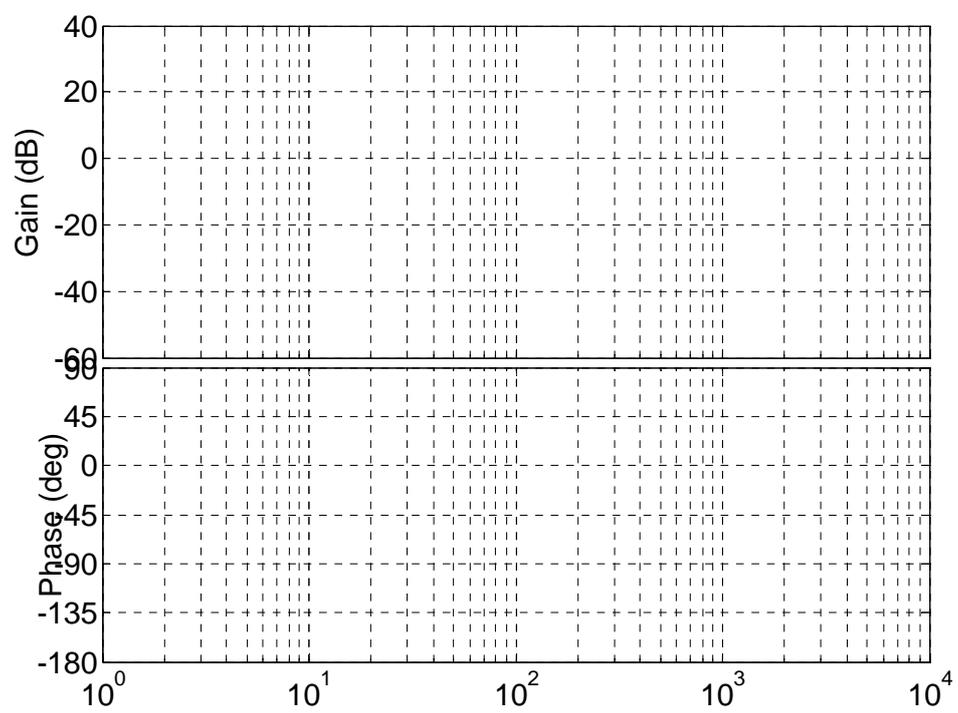
Document Réponse R4



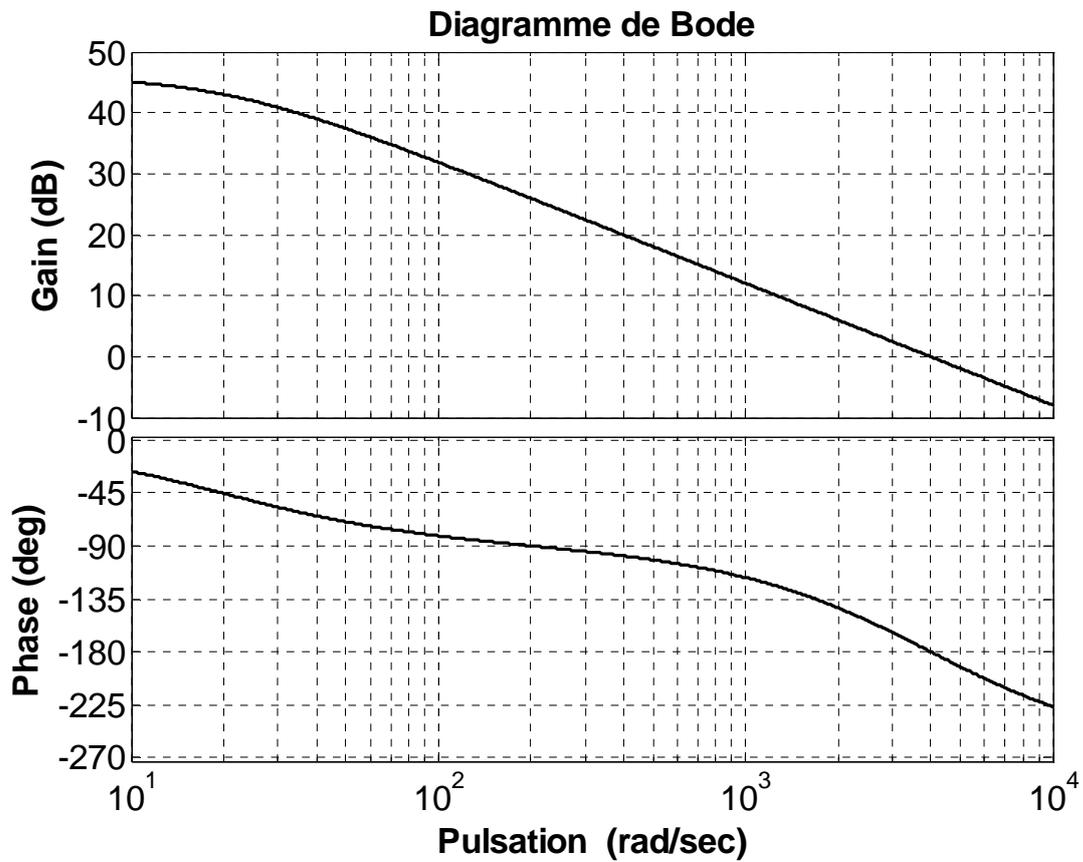
Document Réponse R5



Document Réponse R6



Document Réponse R7



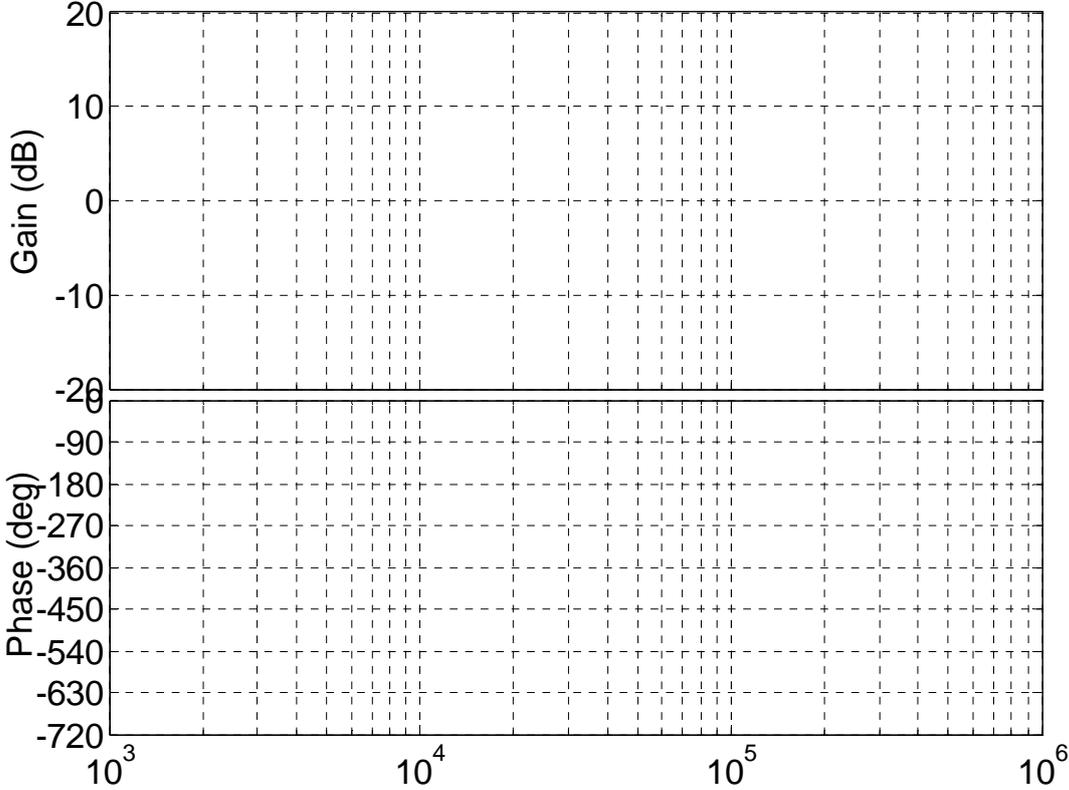
Document Réponse R8

ω	$1/(100\tau)$	$1/(10\tau)$	$1/(\tau)$	$10/(\tau)$
$ \underline{R}(j\omega) $				
$\text{Arg}(\underline{R}(j\omega))$				

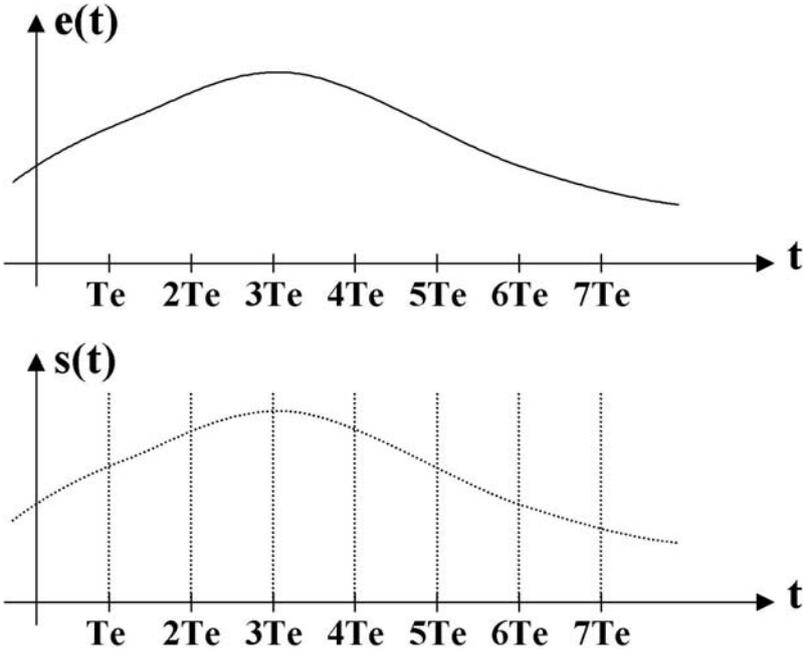
Document Réponse R9

ω	$1/(100\tau)$	$1/(10\tau)$	$1/(\tau)$	$10/(\tau)$
$ \underline{R}_0(j\omega) $				
$\text{Arg}(\underline{R}_0(j\omega))$				

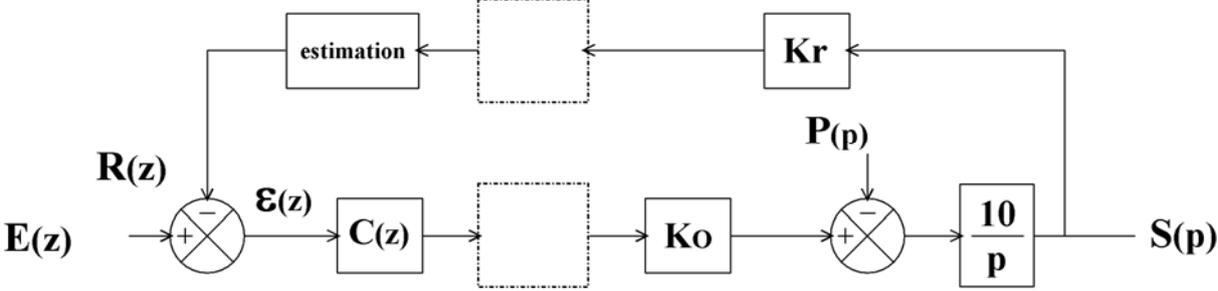
Document Réponse R10



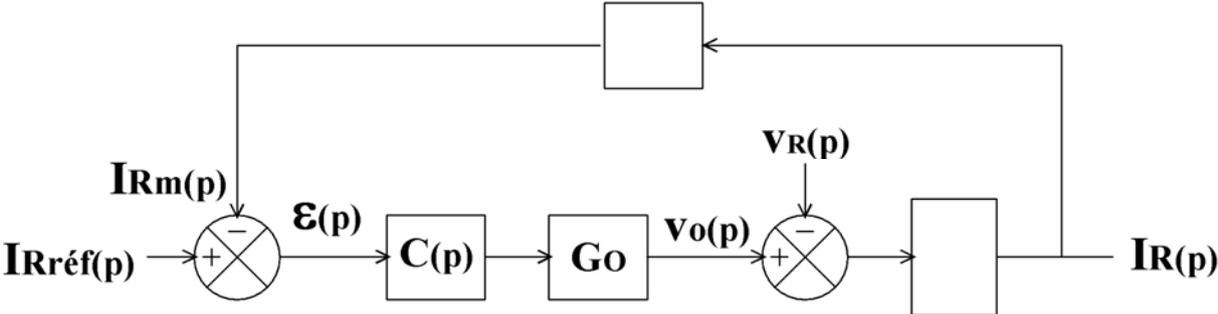
Document Réponse R11



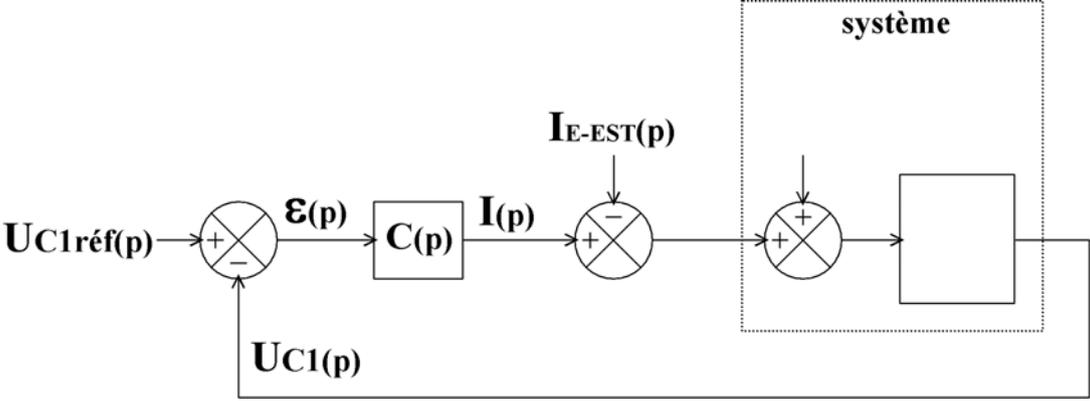
Document Réponse R12



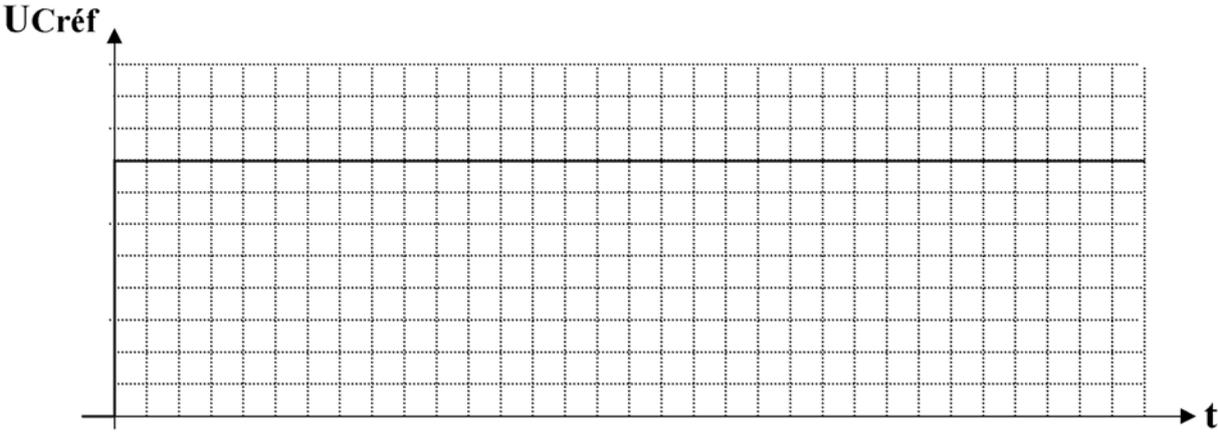
Document Réponse R13



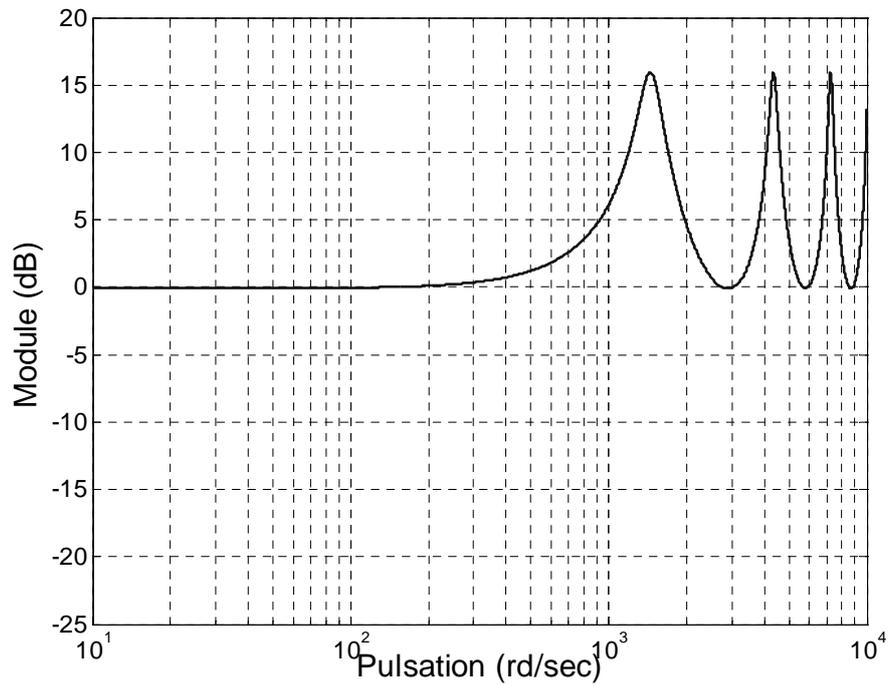
Document Réponse R14



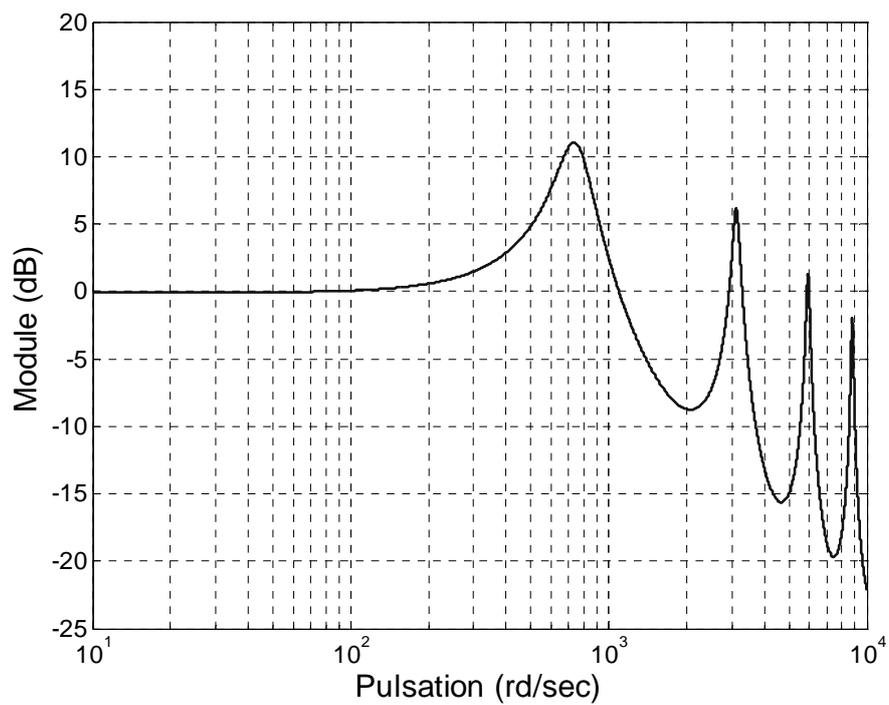
Document Réponse R15



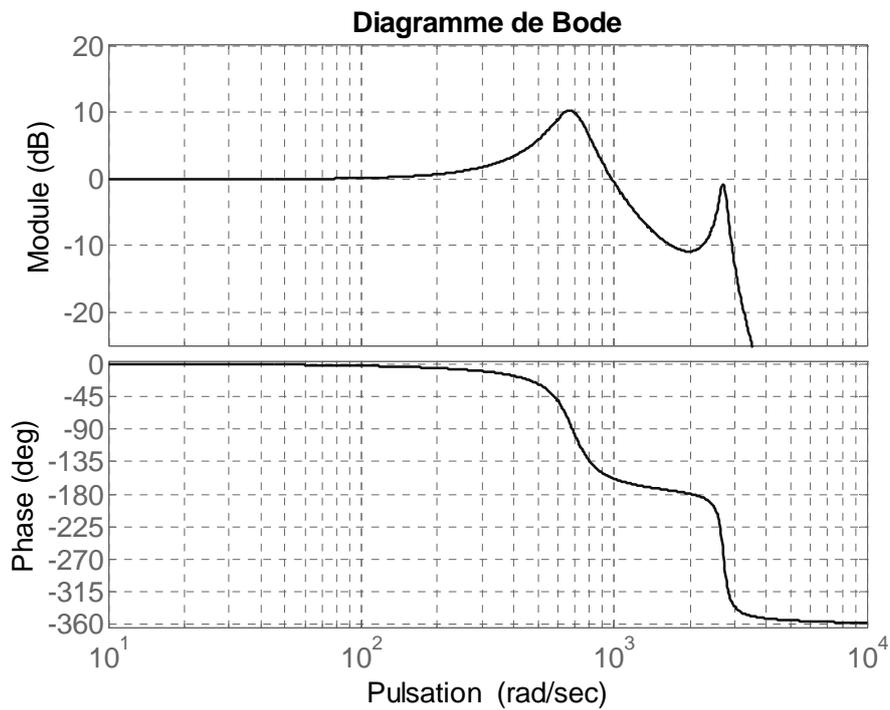
Document Annexe 1 :
Module de la fonction de transfert du câble, charge résistive



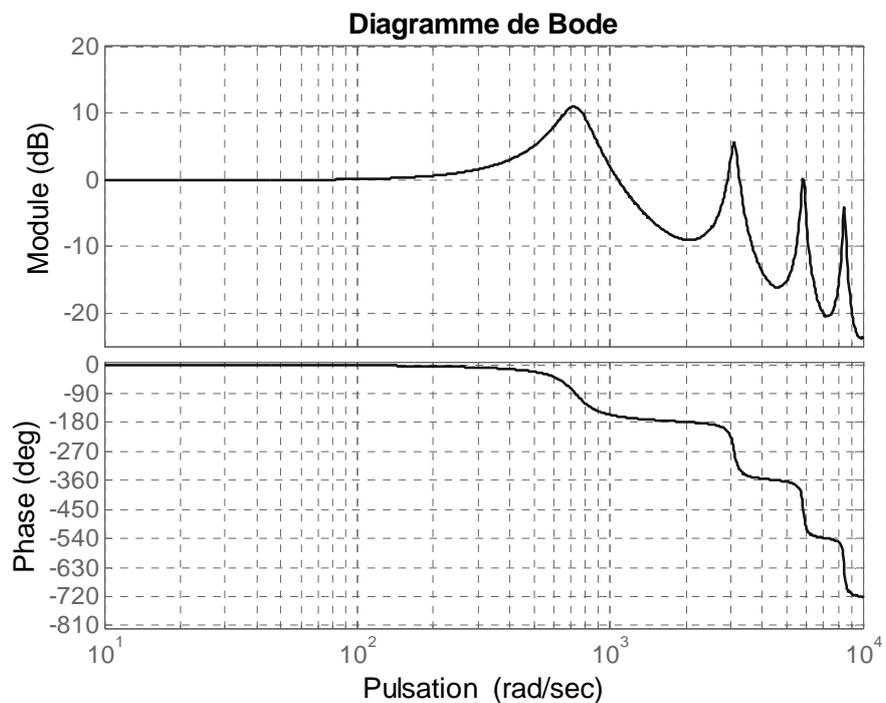
Document Annexe 2 :
Module de la fonction de transfert du câble, charge RC



Document Annexe 3 : Modèle du câble, charge RC, 2 cellules



Document Annexe 4 : Modèle du câble, charge RC, 10 cellules



Document Annexe 5 : Formules trigonométriques

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

$$\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$$

$$\cos(\theta) + \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = 0$$

$$\sin(\theta) + \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = 0$$

Document Annexe 6 : Éléments de calcul matriciel

Matrice identité I

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transposée d'une matrice :

si $[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ alors la matrice transposée de $[A]$ s'écrit $[A^T] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}$

Produit d'une matrice par un vecteur colonne :

$$[A] \times [V] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} \times V_1 + A_{12} \times V_2 \\ A_{21} \times V_1 + A_{22} \times V_2 \end{bmatrix}$$

Produit de deux matrices :

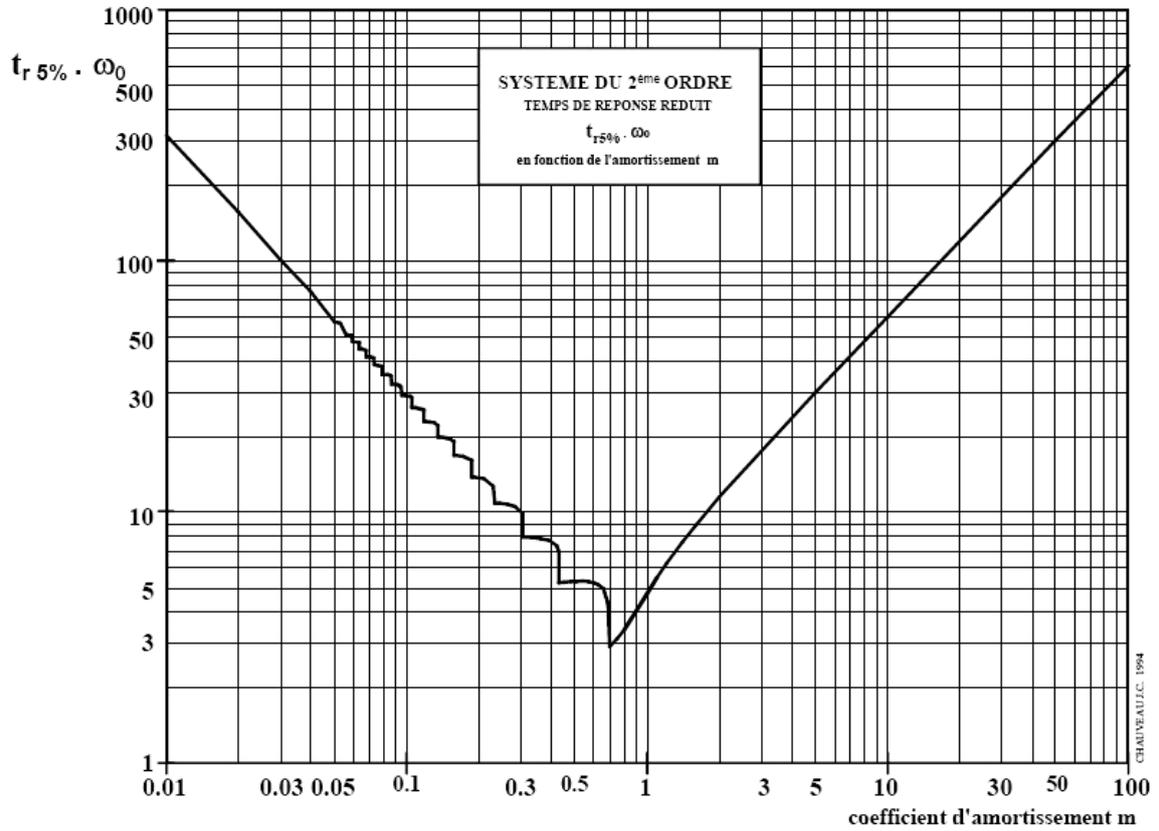
$$[A] \times [B] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} \times B_{11} + A_{12} \times B_{21} & A_{11} \times B_{12} + A_{12} \times B_{22} \\ A_{21} \times B_{11} + A_{22} \times B_{21} & A_{21} \times B_{12} + A_{22} \times B_{22} \end{bmatrix}$$

Soit la matrice 3×2 suivante : $[T] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \\ T_{31} & T_{32} \end{bmatrix}$,

Alors la transposée de cette matrice notée $[T^T]$ s'écrit : $[T^T] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \end{bmatrix}$

Document Annexe 7 :

ABaque du TEMPS de RÉPONSE RÉDUIT $t_r 5\% \cdot \omega_0$



(source : « Systèmes asservis linéaires » J-C et P CHAUCHEAU – Ed. CASTEILLA)