

SESSION 2023

**AGREGATION
CONCOURS EXTERNE**

Section : SCIENCES INDUSTRIELLES DE L'INGÉNIEUR

**Option : SCIENCES INDUSTRIELLES DE L'INGÉNIEUR
ET INGÉNIERIE DES CONSTRUCTIONS**

**MODÉLISATION D'UN SYSTÈME, D'UN PROCÉDÉ
OU D'UNE ORGANISATION**

Durée : 6 heures

Calculatrice autorisée selon les modalités de la circulaire du 17 juin 2021 publiée au BOEN du 29 juillet 2021.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Il appartient au candidat de vérifier qu'il a reçu un sujet complet et correspondant à l'épreuve à laquelle il se présente.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier.

Le fait de rendre une copie blanche est éliminatoire

Tournez la page S.V.P.

A

INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie

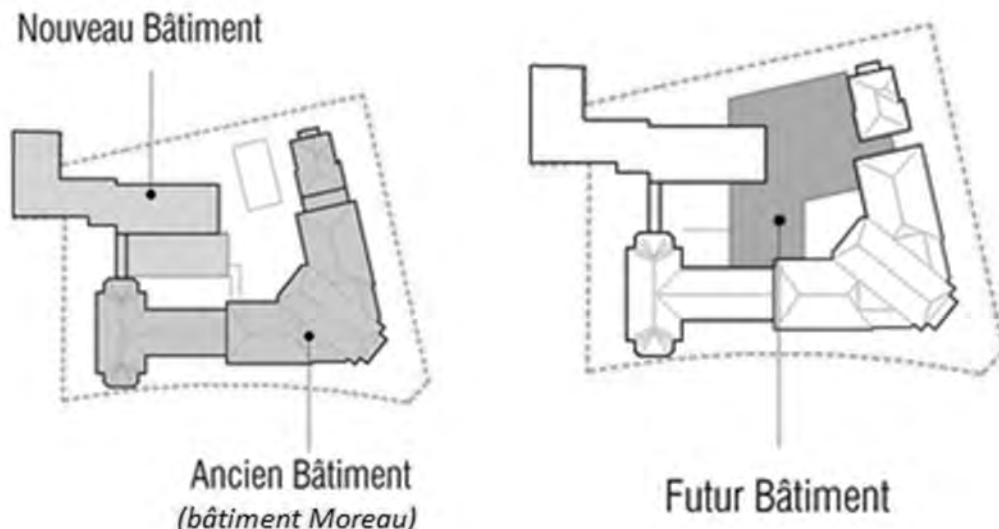
Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EAE	1416A	102	2680

Toutes les parties sont indépendantes les unes des autres. En outre, au sein d'une même partie, un grand nombre de questions peuvent être traitées de manière indépendante. Pour chaque question, en complément des résultats de calculs proprement dits, il convient de justifier les choix effectués et les calculs réalisés ainsi que de commenter les résultats obtenus. Une attention particulière doit être portée à la présentation et à la clarté des explications.

Extension et restructuration de l'Hôpital Fondation Rothschild à Paris.

Le projet concerne la construction d'une extension qui viendra connecter « ancien » et « nouveau » bâtiments.



Le projet concerne également la restructuration ponctuelle des bâtiments existants. Le bâtiment projeté aura le même usage que les bâtiments existants en superstructure et au premier niveau de sous-sol. Un niveau supplémentaire de sous-sol va être réalisé au niveau du « Futur Bâtiment » autour du bâtiment Moreau.

Afin de maintenir l'activité pendant les travaux de restructuration et de construction du « Futur bâtiment », un hôpital temporaire sera construit. Les études proposées dans ce sujet portent essentiellement sur la construction de celui-ci.

L'hôpital temporaire de consultation et de bureaux sera réalisé par une construction industrialisée. Des liaisons seront aménagées au niveau RDC et R+2. Cet hôpital temporaire viendra se positionner face au bâtiment rue Mathurin Moreau (voir figures 1 et 2).

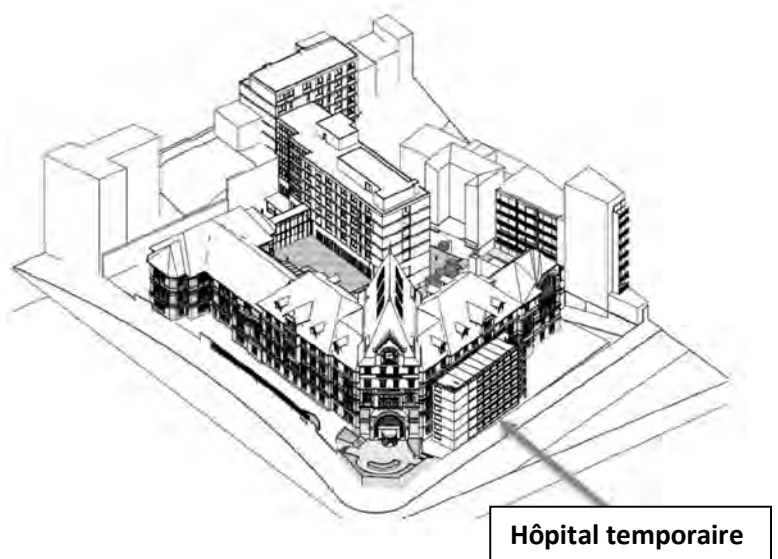


Figure 1 : Hôpital temporaire

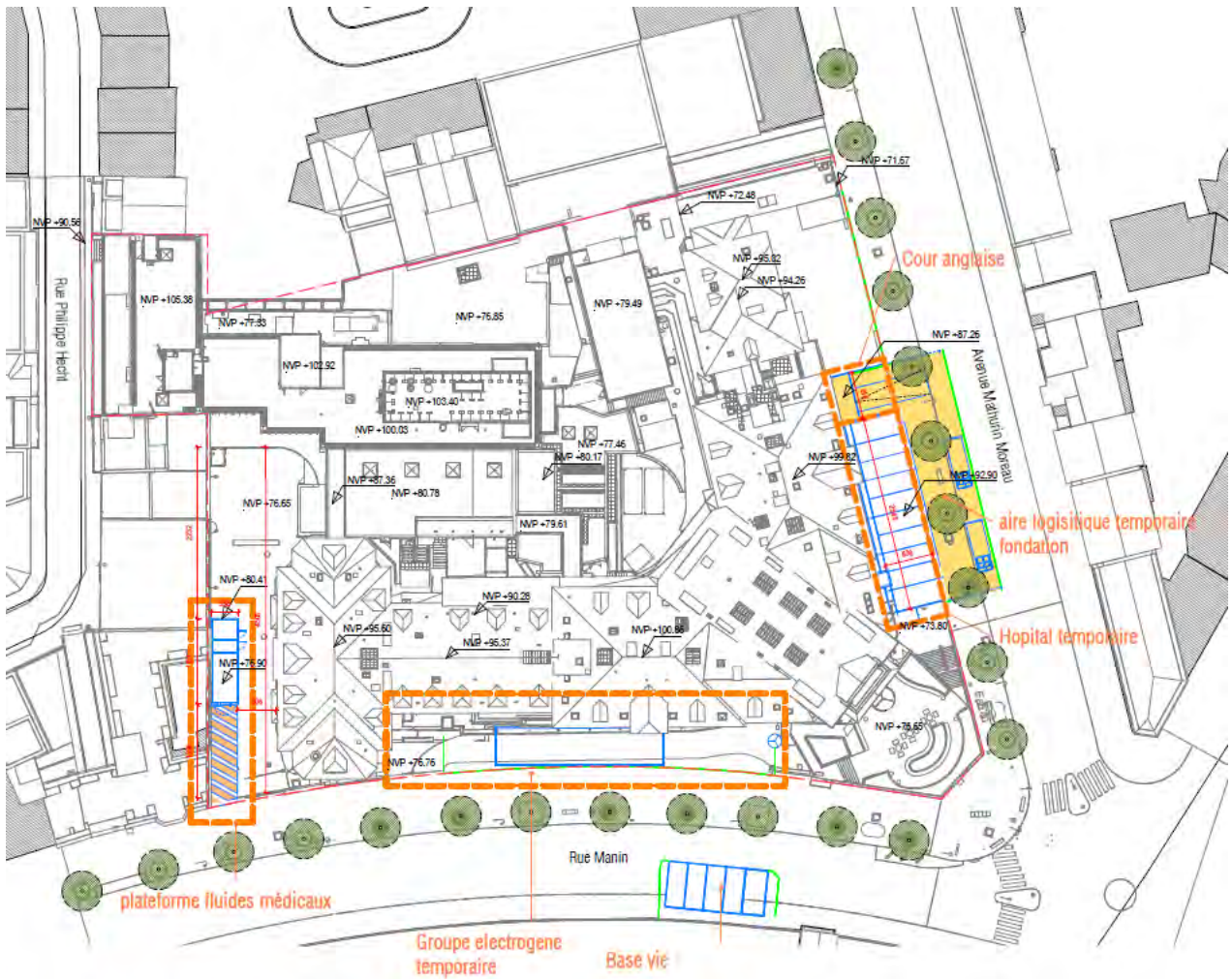


Figure 2 : Extrait du plan de masse

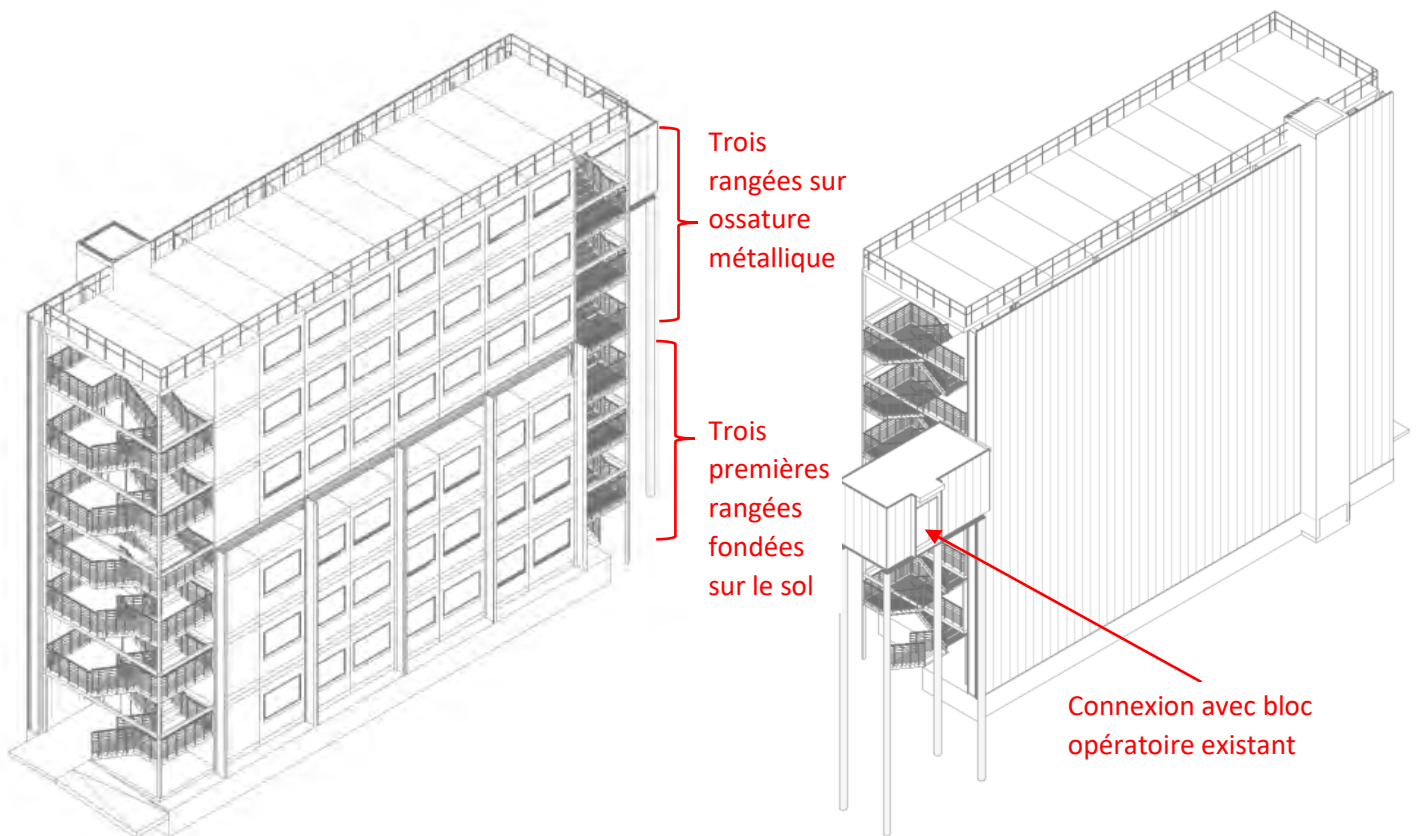


Figure 3 : Vue façade Nord

Figure 4 : Vue Façade Sud

Le chantier se situe dans un site en activité. L'activité de la Fondation consiste notamment en la réalisation d'opérations ophtalmologiques et de neurochirurgie. De ce fait, des études vibratoires et acoustiques spécifiques sont nécessaires. Cela permettra de connaître les niveaux de vibration et bruits attendus dans les zones sensibles et d'objectiver les niveaux rencontrés et ressentis par les utilisateurs. Les structures réalisées devront respecter les critères de confort liés à la non mise en résonance des planchers du bâtiment sous exploitation totale ou partiel de ceux-ci, c'est-à-dire que les structures réalisées devront avoir des fréquences propres toujours supérieures à 3 Hz.

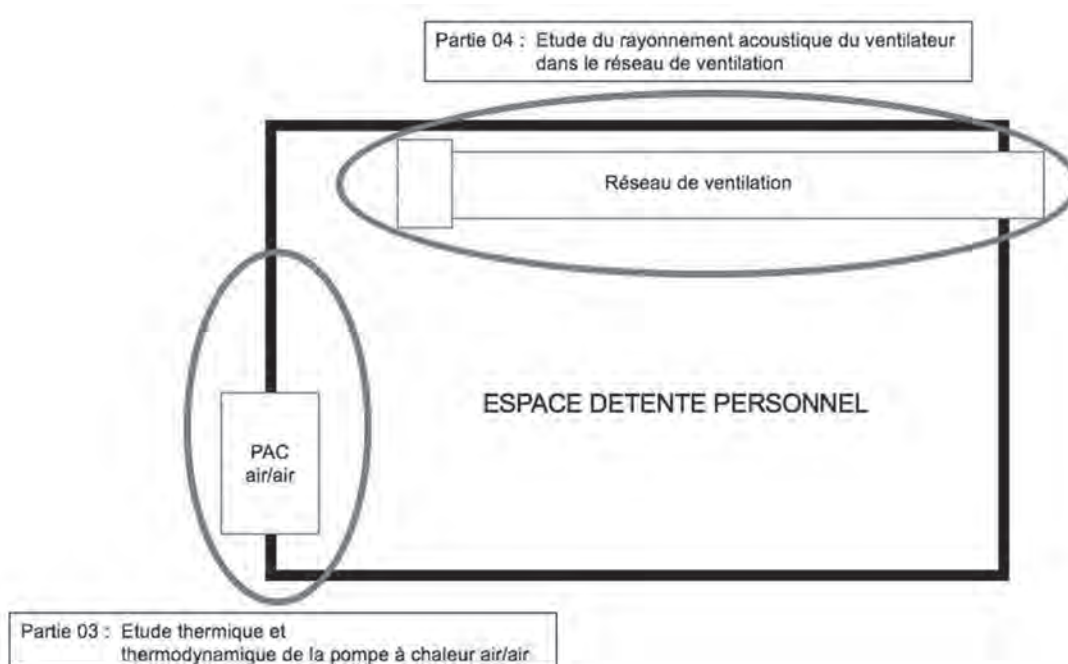
Les études proposées en parties 1 et 2 visent à vérifier si les conditions de stabilité et de confort vibratoires sont assurées.

Les parties 3 et 4 s'intéressent plus spécifiquement à l'étude du local « détente personnel » situé dans un des espaces modulaires du troisième étage dont le confort des occupants est assuré par :

- une pompe à chaleur (modèle « window » monobloc) de type air/air pour le maintien de la température de consigne (voir figure 5) ;
- une amenée d'air neuf hygiénique dans une gaine en acier galvanisé.



Figure 5 : Photo d'une PAC air/air type window monobloc



Partie 1 : Étude de la structure porteuse de l'hôpital temporaire (7 points)

Pour mener cette étude, il faut connaître les charges reprises par les poteaux. Les trois premières rangées de modules industrialisés sont fondées directement sur le sol. Les trois rangées suivantes reposent sur l'ossature métallique (figure 3).

Toutes les études sont menées en considérant le problème plan en $(\vec{X}; \vec{Y})$.

1.1. Étude de la poutre continue

On s'intéresse aux poutres de rive. Pour simplifier l'étude, on néglige les parties en console et l'on suppose que chaque poutre reprend exactement le même chargement. La modélisation utilisée pour chacune des poutres est illustrée figure 6.

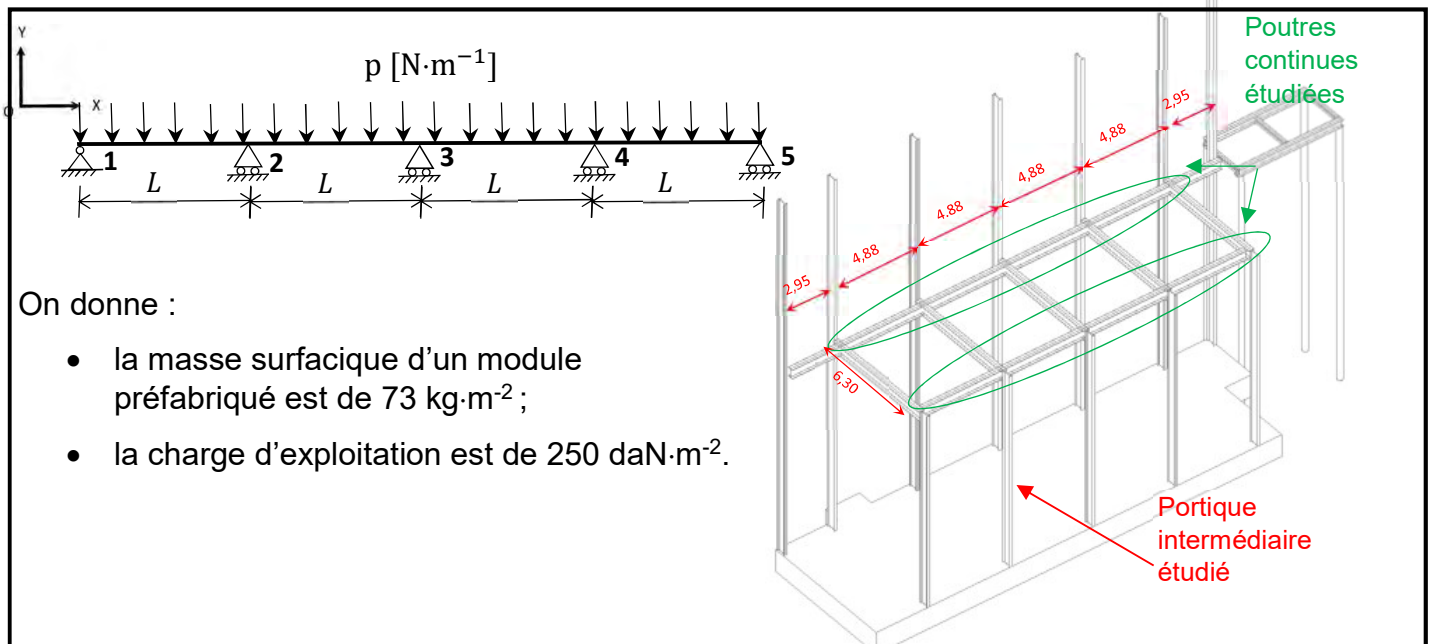


Figure 6 : Structure porteuse étudiée et modélisation

Question 1.1 : À l'aide du document technique DT1, **estimer** la charge p supportée par la poutre.

Question 1.2 : **Calculer** le degré d'hyperstatisme de la poutre.

La figure 7 illustre le diagramme d'effort tranchant subi par la poutre.

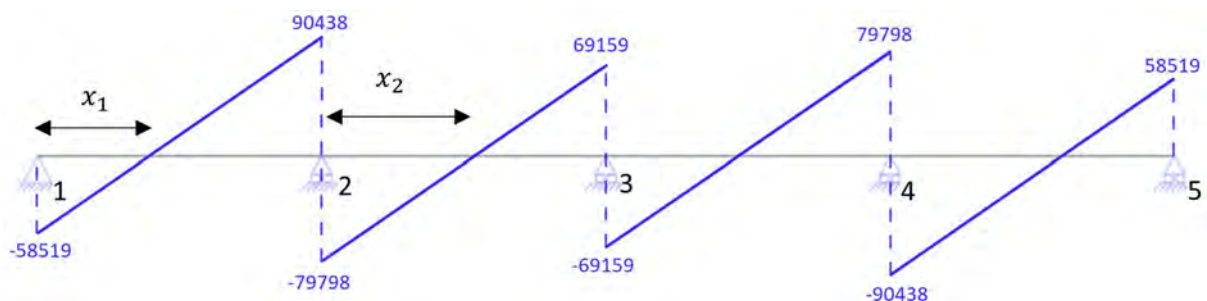
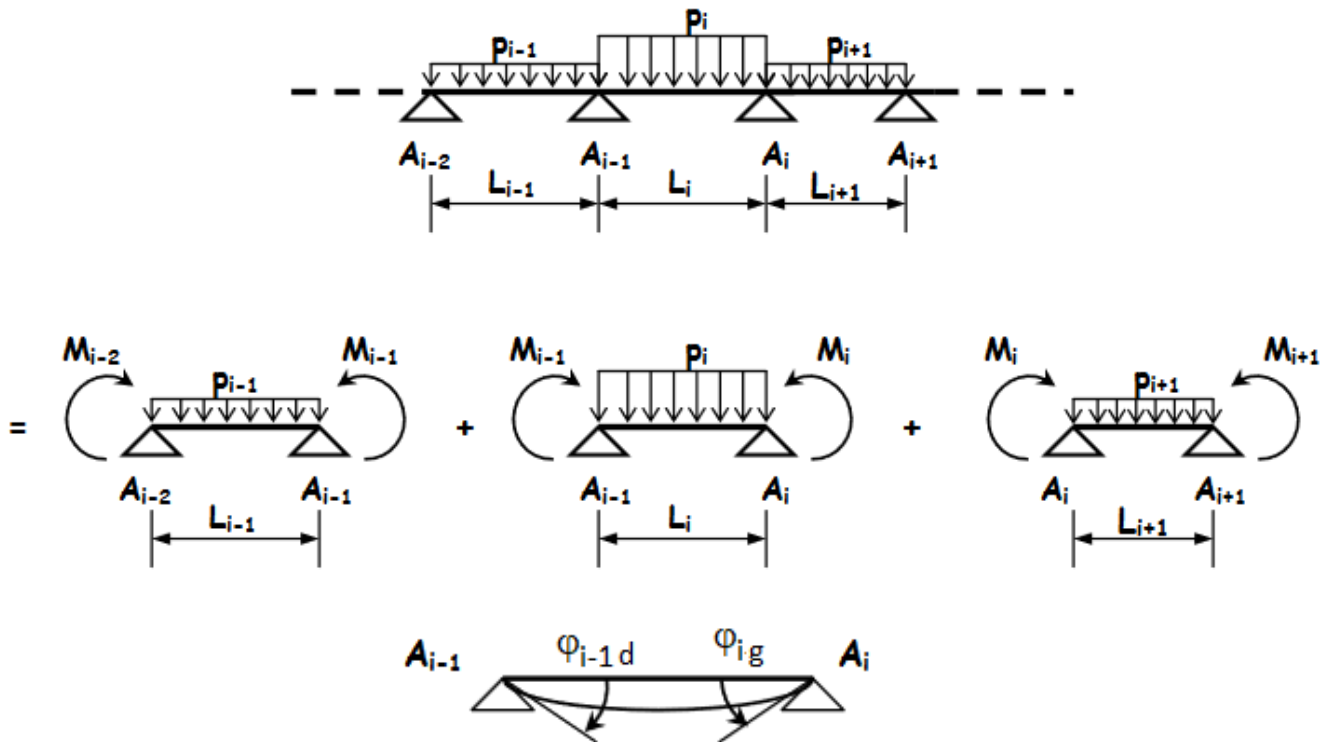


Figure 7: Diagramme des efforts tranchants

Question 1.3 : À l'aide de la figure 7, **déduire** les réactions d'appuis.

Question 1.4 : **En déduire** le diagramme des moments fléchissants en précisant les valeurs des moments aux appuis et en travée.

La méthode des trois moments permet de déterminer les moments sur les appuis pour une travée i . On rappelle la relation dans le cas d'une poutre à sections et inerties constantes :



$$M_{i-1} \cdot L_i + 2 \cdot M_i \cdot (L_i + L_{i+1}) + M_{i+1} \cdot L_{i+1} = 6 \cdot E \cdot I (\varphi_{id} - \varphi_{ig})$$

Où :

- M_i est le moment sur l'appui i
- L_i est la longueur de la travée i (comprise entre les appuis $i - 1$ et i)
- φ_{ig} rotation en i , à gauche de l'appui i (calcul en travée isostatique)
- φ_{id} rotation en i , à droite de l'appui i (calcul en travée isostatique)

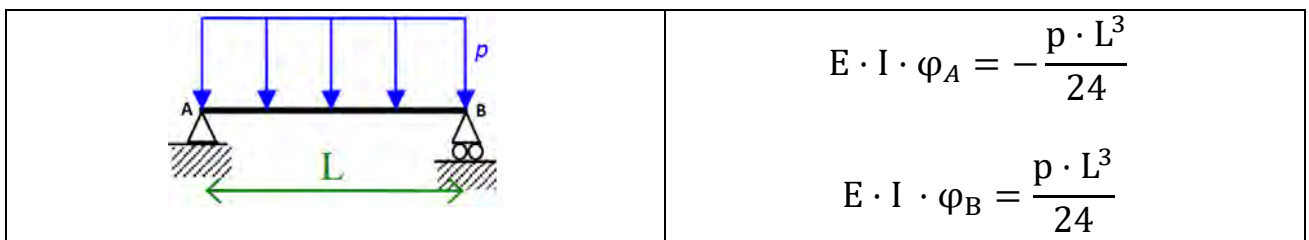


Figure 8: Poutre sous charge uniformément répartie et formules correspondantes

Question 1.5 : Pour la travée isostatique représentée en figure 8, établir l'expression du moment fléchissant. **Démontrer** que les rotations aux appuis ont pour expression les relations de φ_A et φ_B indiquées par la figure 8.

Question 1.6 : En appliquant la méthode des trois moments, **donner** l'expression des moments sur appuis pour la poutre continue représentée en figure 6 en fonction de p et L . **Calculer** les valeurs numériques en prenant la valeur de p obtenue en question 1.1 et les comparer à celles obtenues en question 1.4.

1.2. Etude d'un portique intermédiaire

L'étude précédente a permis de calculer les réactions d'appuis des poutres continues de rive. Dans la suite de l'étude, on considère que ces réactions ont les valeurs suivantes :

$$R_1 = 58\,519 \text{ N}, \quad R_2 = 170\,237 \text{ N}, \quad R_3 = 138\,317 \text{ N}, \\ R_4 = 170\,237 \text{ N}, \quad R_5 = 58\,519 \text{ N}$$

On suppose les deux poutres de rive identiques. On modélise le portique par le schéma mécanique illustré figure 9.

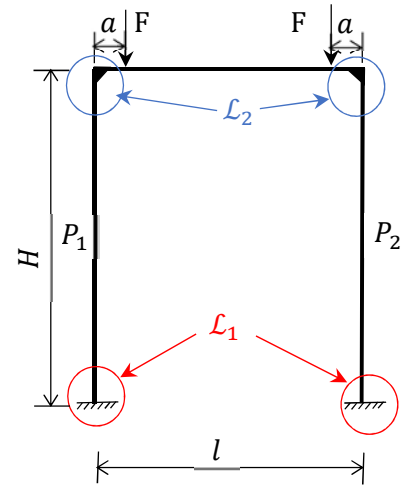


Figure 9: Modèle du portique intermédiaire

La figure 10 illustre des exemples d'assemblages.

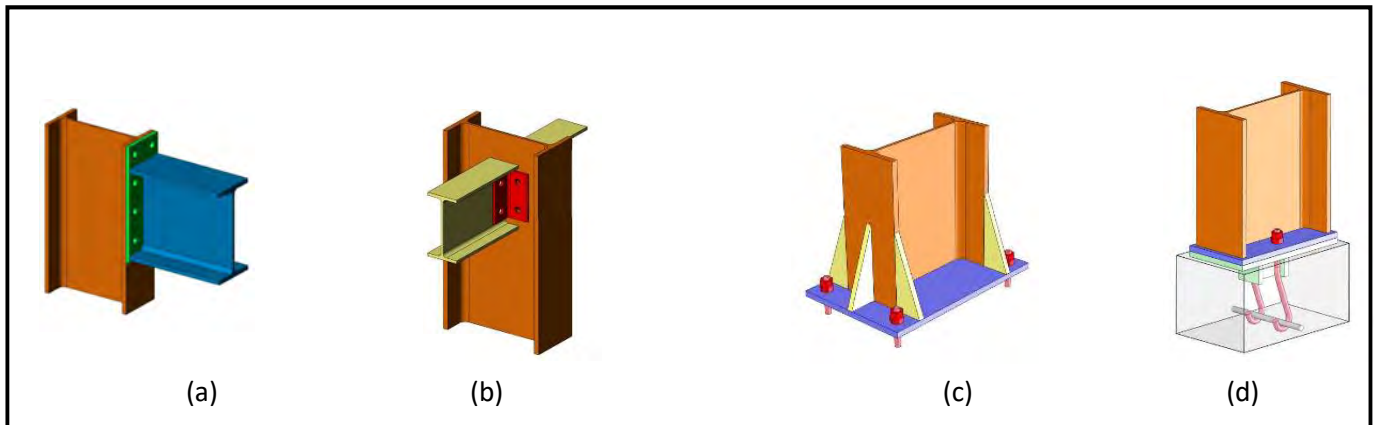


Figure 10: Connecteurs

Question 1.7 : Associer chacun des assemblages illustrés en figure 10 aux liaisons \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 représentées figure 9.

Question 1.8 : Pour le portique illustré figure 6, donner la valeur de F à prendre en compte dans la modélisation illustrée figure 9.

Question 1.9 : Calculer le degré d'hyperstatisme du portique.

Dans la suite de l'étude, on considère les valeurs numériques suivantes :

- la longueur l pour la modélisation du portique : $l = 6,3 \text{ m}$;
- la hauteur H pour la modélisation du portique : $H = 10 \text{ m}$;
- le module d'Young : $E = 200 \text{ GPa}$;
- la section de la poutre : $A = 198 \text{ cm}^2$;
- le moment quadratique : $I = 86\,975 \text{ cm}^4$.

Tournez la page S.V.P.

Question 1.10 : En utilisant la méthode des déplacements, **calculer** les réactions d'appuis et **tracer** les diagrammes des efforts internes N , V et M . Pour cela :

- Numéroter** les nœuds et **mettre** en place les repères adéquats.
- Au niveau des appuis extérieurs, **écrire** les conditions aux limites.
- Analyser** les degrés de liberté de la structure pour **en déduire** les inconnues cinématiques.
- En vous aidant du document technique DT2, **Calculer** les inconnues cinématiques.
- Établir** les expressions des efforts internes puis **tracer** les diagrammes correspondants.

1.3. Etude d'un poteau du portique

L'allure de la déformée du portique, issue de l'étude précédente est illustrée sur la figure 11.

Les translations des nœuds intermédiaires sont négligeables.

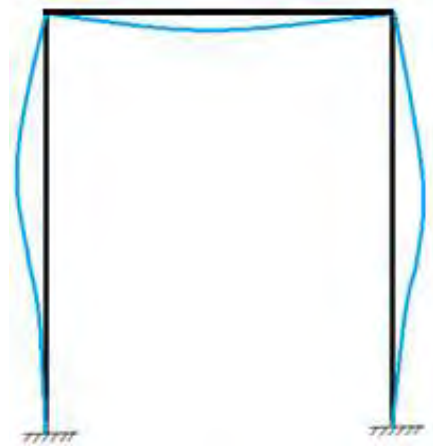


Figure 11: Déformée du portique sous le chargement précédent

Question 1.11 : **Indiquer** si le résultat sur les translations des nœuds intermédiaires était prévisible. **Justifier** la réponse.

Dans la suite on néglige les effets de l'effort tranchant et du moment fléchissant devant ceux dus à l'effort normal agissant sur le poteau P_2 . La figure 12 illustre le modèle retenu pour le poteau P_2 .

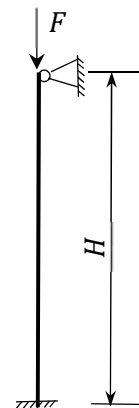


Figure 12: modèle du poteau

Question 1.12 : **Justifier** le schéma mécanique illustré figure 12 pour le poteau P_2 .

Le poteau étant élancé, il y a un risque de flambement. Le seuil de flambement est donné par la charge critique d'Euler :

$$F_c = E \cdot I \cdot \frac{\pi^2}{L^2} \text{ où } L \text{ est la longueur de flambage ou longueur libre.}$$

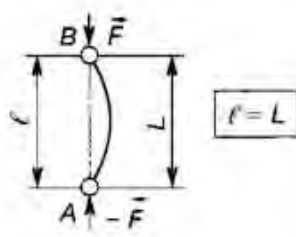
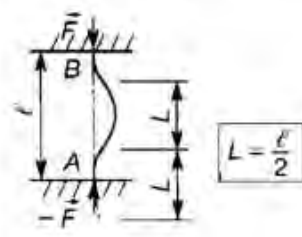
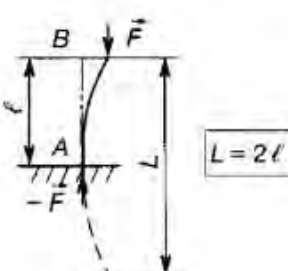
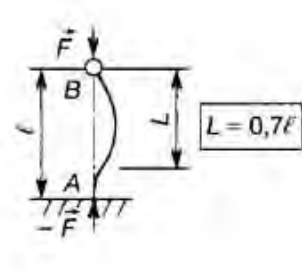
LONGUEURS LIBRES DE FLAMBAGE			
Types de liaisons	Valeurs de L	Types de liaisons	Valeurs de L
① En A et B : liaisons pivots.	 $l = L$	③ En A et B : liaisons encastrement.	 $L = \frac{l}{2}$
② En A : liaison encastrement. En B : extrémité libre.	 $L = 2l$	④ En A : liaison encastrement. En B : liaison pivot.	 $L = 0,7l$

Tableau 1 : Différentes configurations pour le calcul de la longueur libre

Question 1.13 : À l'aide du tableau 1, **donner** la longueur de flambage du poteau. **Établir** l'équation différentielle issue de l'étude de l'équilibre du poteau, en tenant compte de l'instabilité due au flambement. **Résoudre** l'équation et **donner** l'expression de la déformée du poteau. **En déduire** l'expression de la charge critique.

Le poteau étudié est constitué d'un profilé dont les caractéristiques géométriques sont données sur la figure 13. Les valeurs numériques correspondantes sont :

- $h = 490 \text{ mm}$;
- $b = 300 \text{ mm}$;
- $a = 12 \text{ mm}$;
- $e = 23 \text{ mm}$;
- $r = 27 \text{ mm}$.

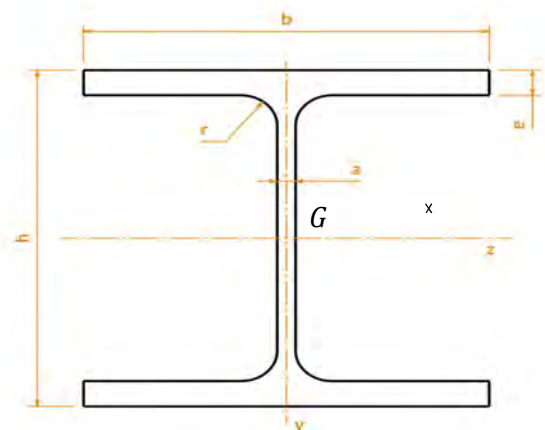
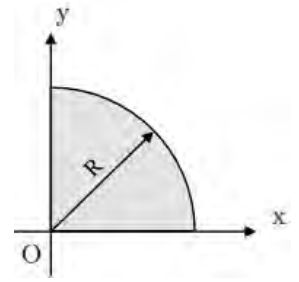


Figure 13: Caractéristiques géométriques de la section du poteau

Tournez la page S.V.P.

On rappelle que, pour une section en quart de cercle de rayon R , :

- les coordonnées du centre de gravité sont $\left(\frac{4R}{3\pi}, \frac{4R}{3\pi}\right)$;
- les moments quadratiques valent $I_{Ox} = I_{Oy} = \frac{\pi \cdot R^4}{16}$.



Question 1.14 : Calculer les moments quadratiques I_{Gz} et I_{Gy} de la section du poteau. Indiquer selon quel axe le poteau risque de subir un flambement.

On donne :

- module d'Young : $E = 200 \text{ GPa}$,
- hauteur du portique : $H = 10 \text{ m}$

Question 1.15 : En considérant un coefficient de sécurité $s = 3$, conclure quant au risque de flambement.

1.4. Etude de la fréquence propre du bâtiment

La présente étude vise à vérifier que la fréquence propre du bâtiment temporaire ne l'expose pas au risque de résonance. Pour évaluer la fréquence propre du bâtiment temporaire, un modèle très simplifié (masse-ressorts) est illustré figure 14.

Avec :

- $k = 23\,400 \text{ kN}\cdot\text{m}^{-1}$, rigidité équivalente des poteaux des portiques ;
- $m = 119 \text{ tonnes}$, masse des modules industrialisés reposant sur l'ossature métallique.

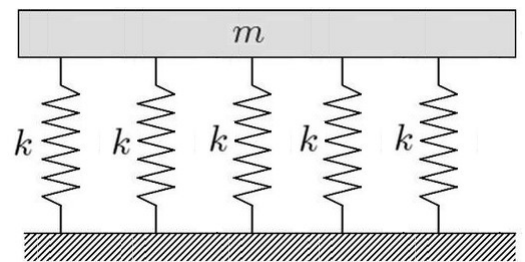


Figure 14: Modèle d'étude de fréquence propre

Question 1.16 : Calculer la rigidité équivalente k_{eq} de la structure.

Question 1.17 : Calculer la fréquence propre de la structure.

Question 1.18 : Conclure sur le respect des conditions de stabilité et de confort vibratoires.

Partie 2 : Etude de la galerie technique (3 points)

Une galerie technique sera réalisée dans la cour de la Fondation. Cette galerie permettra de dévier les réseaux dès le début du chantier. Les réseaux conserveront leur emplacement dans ce tunnel en phase définitive.

Cette galerie est réalisée par trois techniques différentes, en fonction de son emprise sur le projet.

- Zone 1 : réalisation de la galerie à travers des terrassements complets depuis le site par des voiles par passes.
- Zone 2 : réalisation de la galerie à travers des terrassements sous l'emprise des bureaux en voiles par passes également.
- Zone 3 : réalisation de la galerie par des terrassements en taupe.

Une fois les zones 1 et 2 finalisées, la galerie sera réalisée de manière traditionnelle avec excavation en taupe, pose d'étais et blindage à l'avancement. Une fois qu'une portion de la galerie est excavée et blindée, le bétonnage peut avoir lieu contre les parois blindées.

La figure 16 montre l'emprise de ces zones.

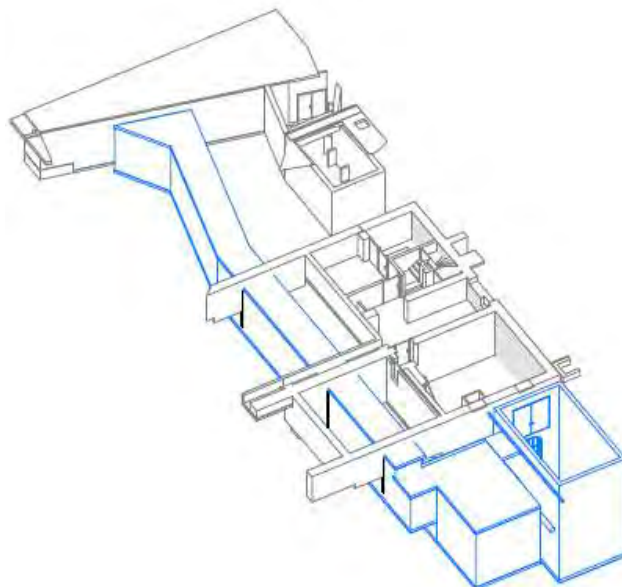


Figure 15: Axonométrie du sous-sol

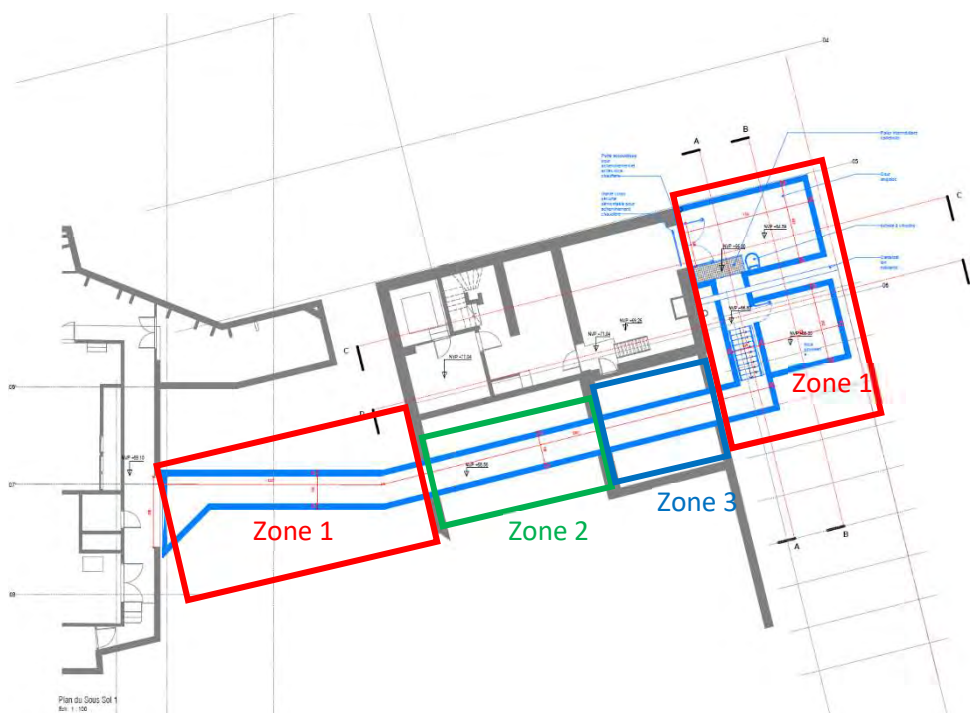


Figure 16: Emprise des zones

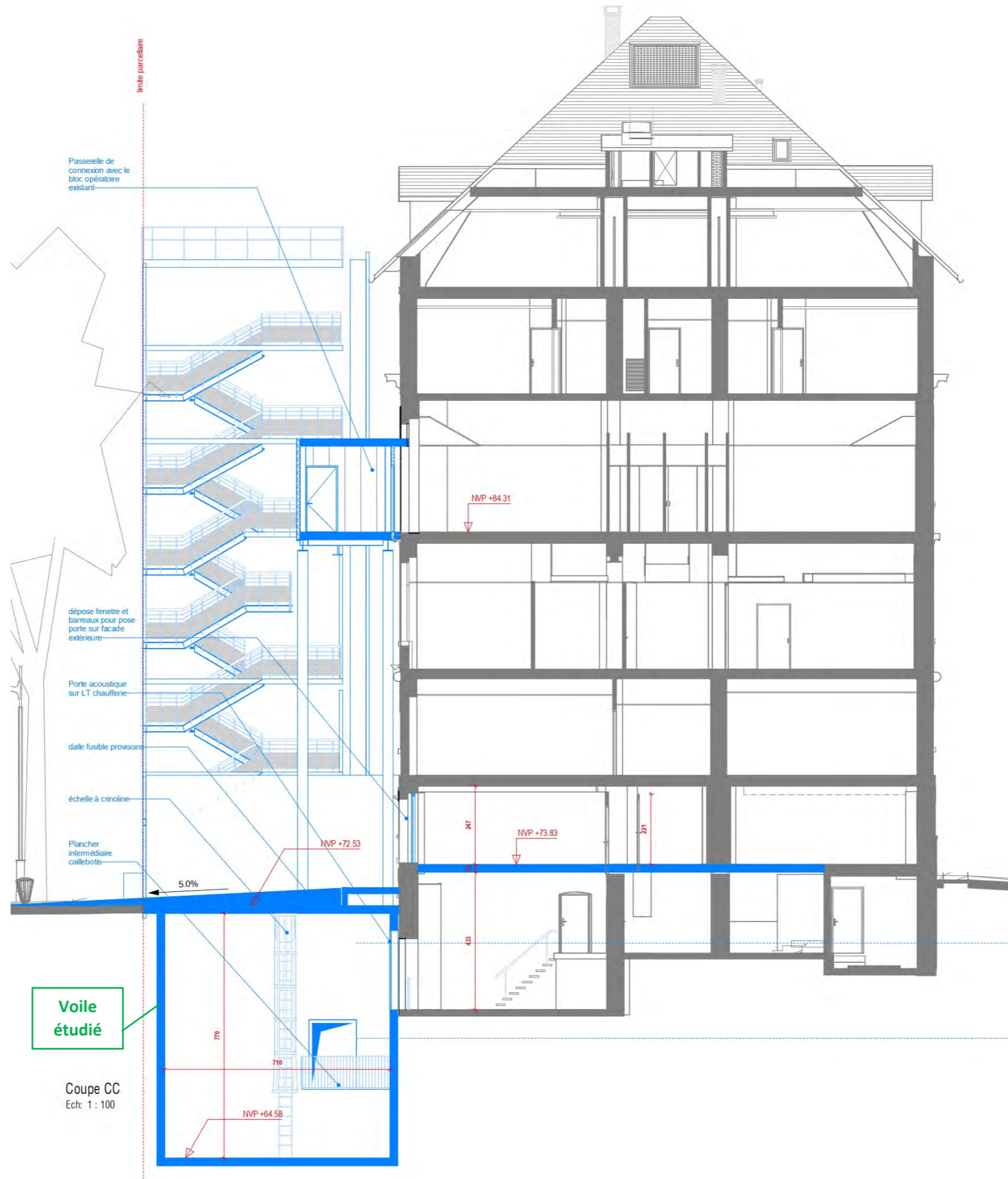


Figure 17: Coupe sur zone 1

2.1. Modélisation d'un voile par passes en phase provisoire

Les voiles contre terre seront dimensionnés pour reprendre les sollicitations dues aux poussées des terres et notamment des poussées/butées provoquées par les remblais compactés. Ils seront réalisés en voiles par passes alternées.

Une surcharge forfaitaire q , sur une zone supposée infinie, de $1 \text{ tonne}\cdot\text{m}^{-2}$ est retenue en amont des voiles, pour le dimensionnement de ces structures.

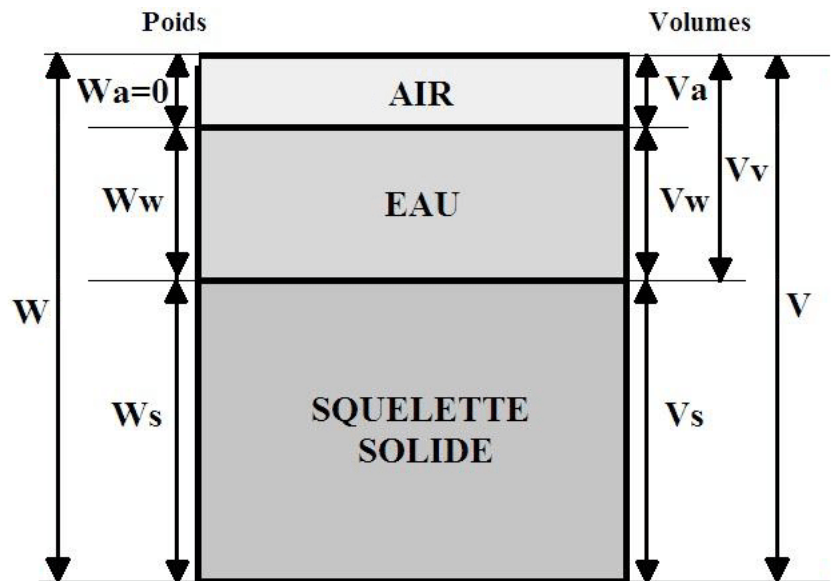
À ce stade de l'étude, le rapport géotechnique montre qu'aucun niveau d'eau n'a été observé.

Le voile objet de l'étude est situé dans la zone 1.

L'objectif de cette étude est d'évaluer les efforts repris par les butons.

Question 2.1 : Expliquer la technique des voiles par passes alternées.

Le schéma d'un volume élémentaire de sol est donné sur la figure ci-contre.



On rappelle les formules suivantes :

- Poids volumique total ou humide : $\gamma_h = \frac{W}{V}$
- Poids volumique des grains solides : $\gamma_s = \frac{W_s}{V_s}$
- Poids volumique du sol sec : $\gamma_d = \frac{W_s}{V}$
- La teneur en eau : $\omega = \frac{W_w}{W_s}$
- L'indice des vides : $e = \frac{V_v}{V_s}$

Où :

- V est le volume total
- V_v est le volume d'air et d'eau
- V_s est le volume des grains solides
- W est le poids total
- W_w est le poids de l'eau
- W_s est le poids des grains solides

Question 2.2 : À l'aide des documents techniques DT3 et DT4, **calculer** les poids volumiques du sol sec des différentes couches ainsi que leurs indices des vides. **Préciser** si on peut simplifier l'étude en ne considérant que deux sols différents.

Tournez la page S.V.P.

Pour la suite de l'étude, on retient les caractéristiques suivantes :

Horizon	Poids volumique	Caractéristiques à court terme		Caractéristiques à long terme	
	γ_h (kN·m ⁻³)	Cohésion (kPa)	Angle de frottement interne (°)	Cohésion (kPa)	Angle de frottement interne (°)
Sol 1	18	50	0	0	20
Sol 2	21	10	25	5	25

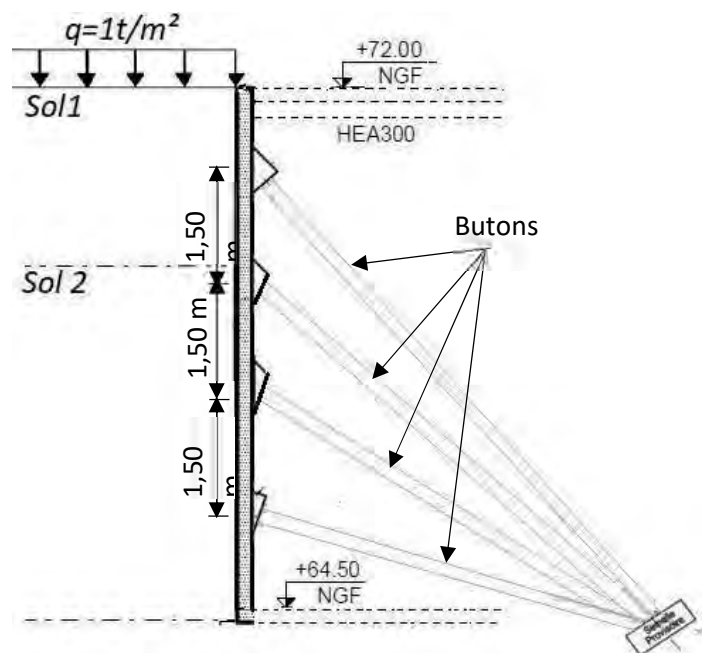
Nota : les cohésions et les angles de frottements internes sont issus de mesures d'essai de cisaillement direct.

Le calcul de la hauteur des passes est établi à partir de l'étude de stabilité des pentes. La hauteur de stabilité critique peut être calculée à partir de la relation donnée par Biarez et Taylor :

$$H_c = 4 \cdot \frac{C}{\gamma_h} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) - 2 \cdot \frac{q}{\gamma_h}$$

où, la cohésion C et l'angle de frottement interne ϕ sont à adapter à la situation de calcul (court terme ou long terme).

Question 2.3 : Calculer la hauteur des passes pour le voile.



Au fur et à mesure de la réalisation des bandeaux, des butons seront mis en place (tous les 1,50 m) qui seront repris par des massifs. On retient le schéma ci-contre pour la suite de l'étude.

On rappelle que le coefficient de poussée est $K_a = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) - 2 \cdot \frac{C}{z\gamma_h} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)$.

Question 2.4 : Pour un mètre linéaire de sol, établir l'expression (en kN·m⁻¹) de la poussée des terres hors surcharge, P_a , sur le voile d'après la théorie de Rankine. Pour un mètre linéaire de sol, établir l'expression (en kN·m⁻¹) de la répartition des efforts de poussée Q_a dus à la surcharge q.

Question 2.5 : Calculer l'effort résultant F_a agissant sur le voile entre deux cotes quelconques notées h_1 et h_2 .

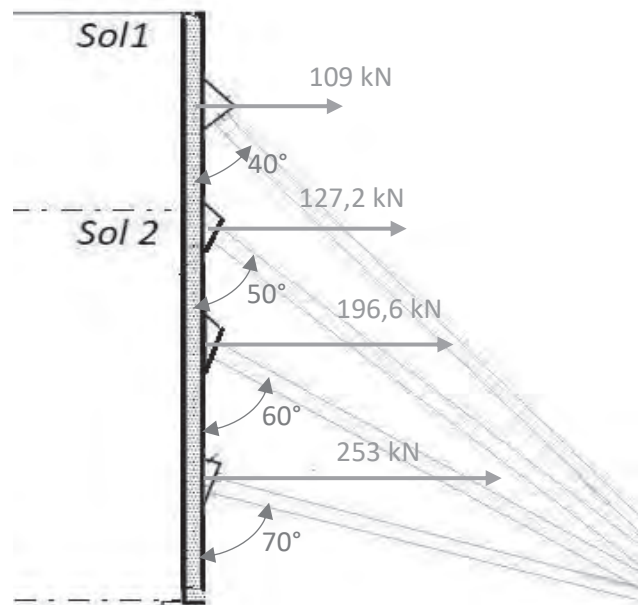
Dans la suite, on néglige les termes liés à la cohésion dans l'expression de F_a .

Question 2.6 : Justifier l'hypothèse de négligence des termes liés à la cohésion.

Question 2.7 : Simplifier l'expression de F_a et tracer la répartition des efforts sur le voile.

Question 2.8 : Proposer une modélisation pour dimensionner les boutons.

Une étude statique du voile avec les boutons, a permis d'obtenir les efforts exercés par le voile au point de jonction avec les boutons. Les résultats sont illustrés sur la figure ci-contre.



Question 2.9 : Calculer l'effort dans l'axe du bouton le plus sollicité et conclure sur l'importance d'un dimensionnement correct de ces boutons.

L'objectif des parties 3 et 4 est de modéliser d'une part l'interaction de la machine thermodynamique avec la pièce et d'autre part le comportement acoustique du conduit de ventilation.

Partie 3 : Étude de la pompe à chaleur air/air (7 points)

3.1. Étude du chauffage de l'espace « détente personnel »

Dans cette partie, l'objectif est de comparer la consommation d'énergie d'un système thermodynamique à un système de chauffage électrique direct.

La pompe à chaleur (PAC) air/air type « window » installée est un système thermodynamique faisant décrire des cycles réversibles à un fluide frigorigène qui est le siège de transferts thermiques avec :

- l'air extérieur considéré comme la source froide à température T_e d'une part ;
- l'air de la pièce considéré comme la source chaude à température variable T d'autre part.

Il reçoit par ailleurs de l'énergie électrique nécessaire au fonctionnement du compresseur.

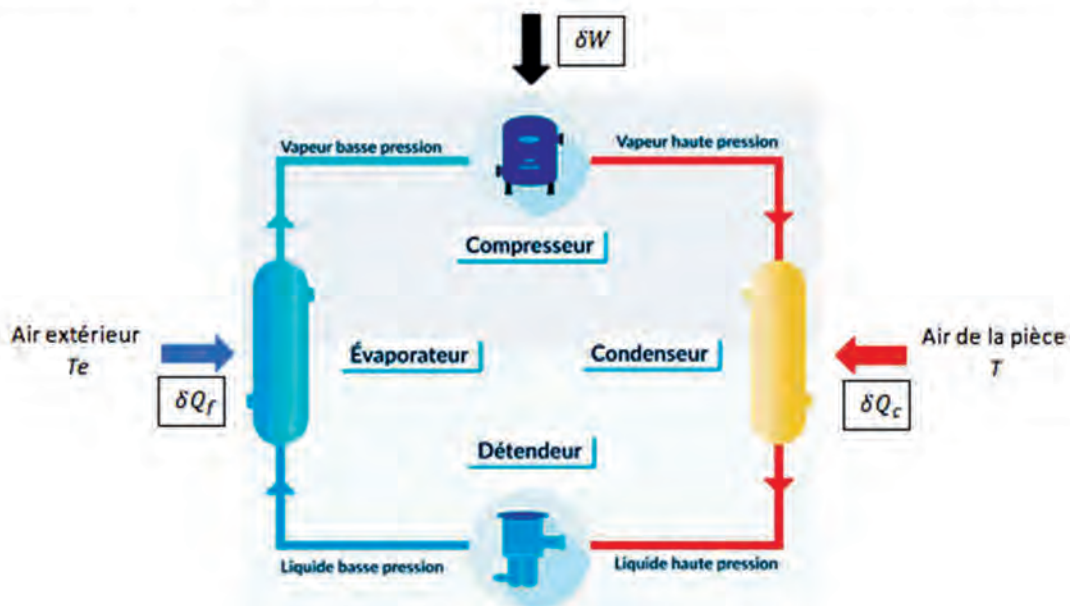


Figure 18: Schéma de principe de la machine thermodynamique type PAC air/air

La capacité thermique de l'air de la pièce sera considérée constante et notée C (en $J \cdot K^{-1}$).

Le compresseur de la PAC fournit, quant à lui, une puissance moyenne notée P (en W).

Dans le cadre de l'étude, l'air est considéré comme un gaz parfait.

1er cas : La pièce est supposée parfaitement isolée thermiquement et initialement aérée donc à la température de l'air extérieur. On met en marche la PAC à un temps pris comme origine $t = 0$.

Les premier et second principes de la thermodynamique appliqués algébriquement au système « fluide frigorigène » de la PAC s'expriment de la manière suivante :

- 1^{er} principe : $dU = \delta W + \delta Q_f + \delta Q_c$;
- 2nd principe : $\frac{\delta Q_f}{T_e} + \frac{\delta Q_c}{T} \leq 0$.

Question 3.1 : Expliquer ce que représente chacun des termes de ces deux expressions ainsi que le sens réel des échanges d'énergie.

Question 3.2 : Par application des deux principes de la thermodynamique au système « fluide frigorigène », **montrer** que $P \cdot dt - C \cdot dT + T_e \cdot C \cdot \frac{dT}{T} = 0$. **En déduire** que $t = \frac{C}{P} \cdot \left[(T - T_e) - T_e \cdot \ln \left(\frac{T}{T_e} \right) \right]$.

On donne les valeurs suivantes : $T_e = -7^\circ\text{C}$; $P = 280 \text{ W}$; $C = 150,75 \text{ kJ}\cdot\text{K}^{-1}$.

Question 3.3 : **Calculer** la durée de fonctionnement de la PAC pour élever la température de la pièce de T_e à $T_i = 19^\circ\text{C}$.

En réalité la machine n'est pas parfaite et les causes d'irréversibilité font que son rendement comparé à une machine idéale est $r = 0,6$.

Question 3.4 : **En déduire** dans le cadre de l'application numérique précédente le pourcentage de gain entre le chauffage par PAC et le chauffage par convecteur électrique (pour lequel le rendement est $r = 1$).

2^{ème} cas : Il est évident que le modèle proposé a ses limites et que l'isolation thermique ne peut être parfaite. On considère donc, à présent, l'existence de transferts de chaleur vers l'extérieur caractérisés par la puissance : $P_f = -K \cdot (T - T_e)$, avec K une constante positive qui caractérise la déperdition de chaleur.

Question 3.5 : **Donner** l'unité du système international d'unités de la constante K .

La température de la pièce étant initialement à 19°C et la PAC à l'arrêt, on relève une baisse de la température de $0,8^\circ\text{C}$ au bout d'une heure.

Question 3.6 : En réalisant un bilan énergétique sur la pièce, **montrer** que $\frac{dT}{dt} + \frac{K}{C}T = \frac{K}{C}T_e$.
Donner alors l'expression de T en fonction de T_e , T_i , K , C et du temps t . **Déterminer** la valeur de K .

Un thermostat fonctionnant en « tout ou rien » a pour fonction de réguler le fonctionnement de l'installation : il déclenche la mise en marche de la PAC lorsque la température de la pièce atteint $T'_i = T_i - 1^\circ\text{C}$ et stoppe son fonctionnement lorsque celle-ci est remontée à T_i .

Question 3.7 : **Déterminer** le temps de fonctionnement de la PAC (en tenant compte de son rendement réel) lors de chaque réchauffement (on pourra négliger le terme dû aux déperditions de chaleur par rapport aux apports lors des phases de chauffage).

Question 3.8 : **En déduire** la consommation journalière de ce chauffage en kWh pour le maintien de la température de consigne.

Question 3.9 : **Discuter** de la validité et des limites de ce modèle.

3.2. Étude de l'échangeur de la PAC

On s'intéresse à présent à la modélisation du condenseur de la pompe à chaleur air/air.

L'objectif de cette partie est de vérifier le dimensionnement de cet échangeur qui est pourvu d'ailettes rectangulaires.

Par souci de simplification de l'étude, on fait l'hypothèse d'un tube rectangulaire de largeur L sur lequel est fixée une ailette de section rectangulaire de longueur l et d'épaisseur e (avec $e \ll l$). Le tube est parcouru par un fluide frigorigène caloporteur se condensant dont la température au niveau de l'ailette est constante et égale à T_0 . Le coefficient d'échange entre le tube et le fluide ainsi que la conductivité thermique du métal sont supposés infiniment grands.

Modélisation d'une ailette

On pose, pour toute la suite de l'étude, $\theta(x) = T(x) - T_a$ avec :

- $T(x)$ température dans l'ailette à l'abscisse x du tube,
- T_a température de l'air ambiant.

On admet que les sections droites de l'ailette sont à température uniforme et que le flux de chaleur en bout d'ailette est négligeable.

Le coefficient d'échange convectif entre l'air et l'ailette est noté h , la conductivité thermique de l'ailette λ et le périmètre de la section d'ailette p .

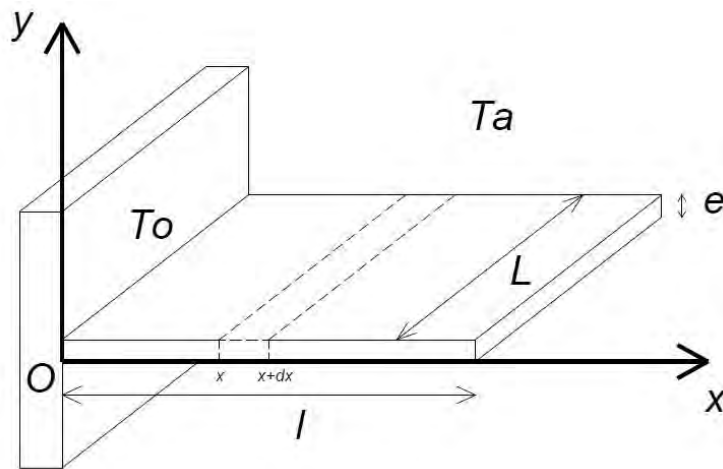


Figure 19: Modélisation d'une ailette du condenseur de la PAC

Question 3.10 : En réalisant un bilan d'énergie sur une portion d'ailette comprise entre l'abscisse x et $x + dx$ du tube, **montrer** que l'équation différentielle donnant l'évolution de la température dans l'ailette peut se mettre sous la forme $\delta^2 \cdot \ddot{\theta} - \dot{\theta} = 0$. **Donner** l'expression de la distance caractéristique δ . Compte tenu des hypothèses réalisées sur les dimensions de l'ailette, **montrer** l'expression simplifiée de δ s'écrit :

$$\delta = \sqrt{\frac{\lambda \cdot e}{2 \cdot h}}$$

Tournez la page S.V.P.

Question 3.11 : À l'aide du document technique DT5 et compte tenu des conditions aux limites du modèle, **montrer** que l'expression de la température dans l'ailette peut se mettre sous la forme :

$$\theta(x) = \theta_0 \cdot \frac{\text{ch}\left(\frac{1-x}{\delta}\right)}{\text{ch}\left(\frac{1}{\delta}\right)} \text{ avec } \theta_0 = T_0 - T_a.$$

On donne les valeurs suivantes : $\lambda = 120 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$; $e = 5\cdot 10^{-4} \text{ m}$; $h = 60 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$.

Question 3.12 : **Montrer** que l'expression du flux de chaleur ϕ_0 (pour $x = 0$) évacué par l'ailette peut se mettre sous la forme : $\phi_0 = \frac{\lambda \cdot e \cdot L \cdot \theta_0}{\delta} \text{ th}\left(\frac{1}{\delta}\right)$ avec $\delta = \sqrt{\frac{\lambda \cdot e}{2 \cdot h}}$. **Calculer** ce flux pour une ailette de longueur 7 cm.

Question 3.13 : **Montrer** que pour un volume de métal et une largeur L imposés, il existe une relation $l = f(e)$ telle que le flux évacué est maximum, avec l la longueur de l'ailette et e son épaisseur. **Montrer** que cette relation peut être exprimée sous la forme d'une équation transcendante de la forme $\text{th}(u) = \frac{3 \cdot u}{\text{ch}^2(u)}$ dont la racine sera prise égale à $u = 1,4$.

Montrer que l'expression de l est alors de la forme $l = 1,4 \cdot \delta$.

Modélisation du condenseur

Le condenseur de la PAC est constitué de N tubes verticaux reliés entre eux par n rangées d'ailettes selon la représentation illustrée figure 20. Par soucis de clarté, seuls 4 tubes et 5 rangées ont été représentés sur la figure 20.

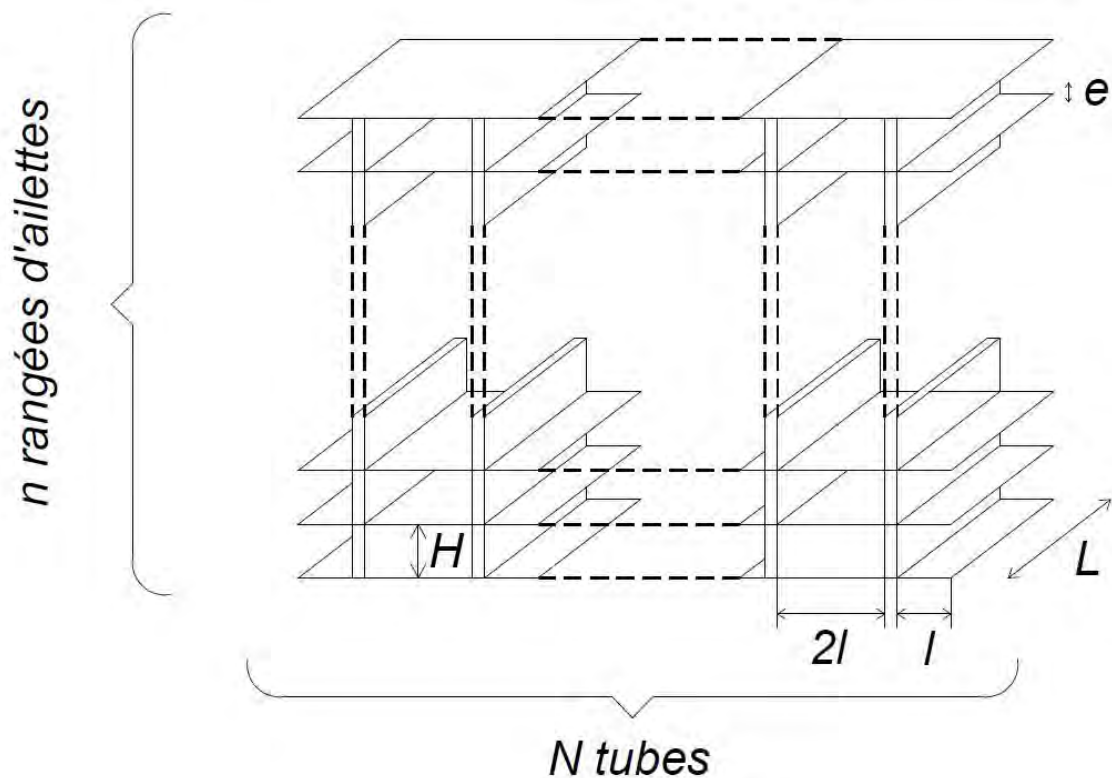


Figure 20: Modélisation du condenseur de la PAC

On désigne par :

- $2 \cdot l$ la distance entre 2 tubes successifs ;
- H la distance entre l'ailette inférieure et l'ailette supérieure ;
- λ la conductivité du métal des ailettes.

Question 3.14 : En supposant constante la température de condensation du fluide frigorigène T_0 dans le tube, **calculer** le flux de chaleur ϕ'_T évacué par l'échangeur (on pourra négliger le flux de chaleur supplémentaire dissipé par les tubes entre les ailettes).

Question 3.15 : **En déduire** l'efficacité par rapport à des ailettes infiniment conductrices.

On donne les valeurs suivantes :

- $L = 0,015 \text{ m}$;
- $l = 0,030 \text{ m}$;
- $\lambda = 120 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$;
- $h = 60 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$;
- $N = 20$;
- $T_0 = 50 \text{ }^\circ\text{C}$;
- $T_a = 19 \text{ }^\circ\text{C}$;
- $e = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$.

Question 3.16 : En supposant réalisée la condition de la question 3.13, **déterminer** le nombre n de rangées d'ailettes à utiliser pour dissiper un flux ϕ'_T de 1 400 W.

Partie 4 : Étude du rayonnement acoustique du ventilateur dans le réseau de ventilation (3 points)

Dans cette partie, l'objectif est d'étudier le rayonnement acoustique du ventilateur d'amenée d'air neuf dans le local. Le système est modélisé dans le cadre de l'approximation basse fréquence où seules les ondes planes harmoniques se propagent.

On considère donc, dans toute l'étude, une onde monochromatique de nombre d'onde k , d'amplitude P , de pulsation ω et de facteur temporel $e^{j\omega t}$.

On rappelle qu'une onde plane élémentaire est dite harmonique si la pression s'exprime par (cas d'une onde se déplaçant vers les « x positifs ») :

$$p(x, t) = P \cdot \exp\left(j\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) = P \cdot \exp(j(\omega t - k \cdot x)) \text{ avec } k = \frac{\omega}{c}.$$

La célérité des ondes sera prise égale à $c = 342 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et la masse volumique de l'air à $\rho = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

On considère une gaine de section constante, de longueur L et de diamètre D , dans laquelle se propagent une onde aller et une onde retour dont les amplitudes valent respectivement A et B .

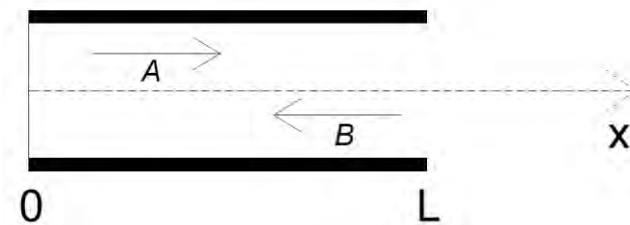


Figure 21: Modélisation des ondes aller et retour dans le réseau de ventilation

Question 4.1 : Exprimer la pression acoustique $p(x, t)$ en tout point de la gaine en fonction de A , B , k (le nombre d'onde), x (la position du point), ω (la pulsation) et du temps t .

L'équation simplifiée issue du principe fondamental de la dynamique à notre cas d'étude de la gaine unidimensionnelle s'écrit $\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P(x, t)}{\partial x}$.

Question 4.2 : Déterminer la vitesse acoustique $v(x, t)$ en tout point de la gaine en fonction de A , B , k , x , ω et du temps t .

Question 4.3 : Montrer que l'expression de l'impédance acoustique $Z(x) = \frac{p(x)}{v(x)}$ peut alors se mettre sous la forme :

$$Z(x) = \rho \cdot c \cdot \frac{A \cdot e^{-jk \cdot x} + B \cdot e^{jk \cdot x}}{A \cdot e^{-jk \cdot x} - B \cdot e^{jk \cdot x}}$$

L'extrémité du tuyau (en $x = L$) débouche à l'air libre. On considère en première approximation que la pression totale en ce point est égale à la pression atmosphérique.

Question 4.4 : Au regard des hypothèses formulées, indiquer la valeur de la pression acoustique en $x = L$. En déduire la valeur de B en fonction de A et montrer que l'impédance $Z(x)$ en tout point du tuyau peut se mettre sous la forme :

$$Z(x) = \rho \cdot c \cdot \tan(k \cdot (L - x)).$$

En deuxième approximation, la pression n'est pas nulle en L et on suppose que l'impédance $Z(L)$ est maintenant égale à :

$$Z(L) = \rho \cdot c \cdot \left(\frac{k^2 \cdot D^2}{8} + 0,43 \cdot j \cdot k \cdot D \right) \text{ où } D \text{ est le diamètre de la gaine.}$$

Question 4.5 : **Indiquer** la modification à apporter sur le calcul précédent pour obtenir B en fonction de A et de $Z(L)$, ainsi que l'impédance $Z(x)$ en tout point du tuyau. **Déterminer** l'expression littérale de $p(0)$, $v(0)$, $p(L)$ et $v(L)$.

L'intensité acoustique est donnée par la relation $I(x) = \frac{1}{2} \text{Re}(p(x) \cdot v^*(x))$, avec v^* la vitesse conjuguée.

Question 4.6 : **Déterminer** en fonction de A et de $Z(L)$ l'intensité acoustique en $x = L$ dans le cadre des deux approximations précédentes.

Question 4.7 : **Montrer** que c'est la partie réelle de l'impédance $Z(L)$ qui permet de rendre compte du rayonnement acoustique de la gaine dans le cas de la deuxième approximation. **En déduire** la puissance acoustique $P_a = \iint I(x) dS$ rayonnée par la gaine dans le cadre des deux approximations.

On se place à présent uniquement dans le cadre de la deuxième approximation. On installe à l'entrée du tuyau (en $x = 0$) un ventilateur à N pales qui tourne à la vitesse angulaire Ω . Le débit d'air est donc pulsé à certaines fréquences acoustiques qui sont les harmoniques d'une fréquence fondamentale, et le ventilateur impose une vitesse acoustique $v(0)$ à toutes les fréquences.

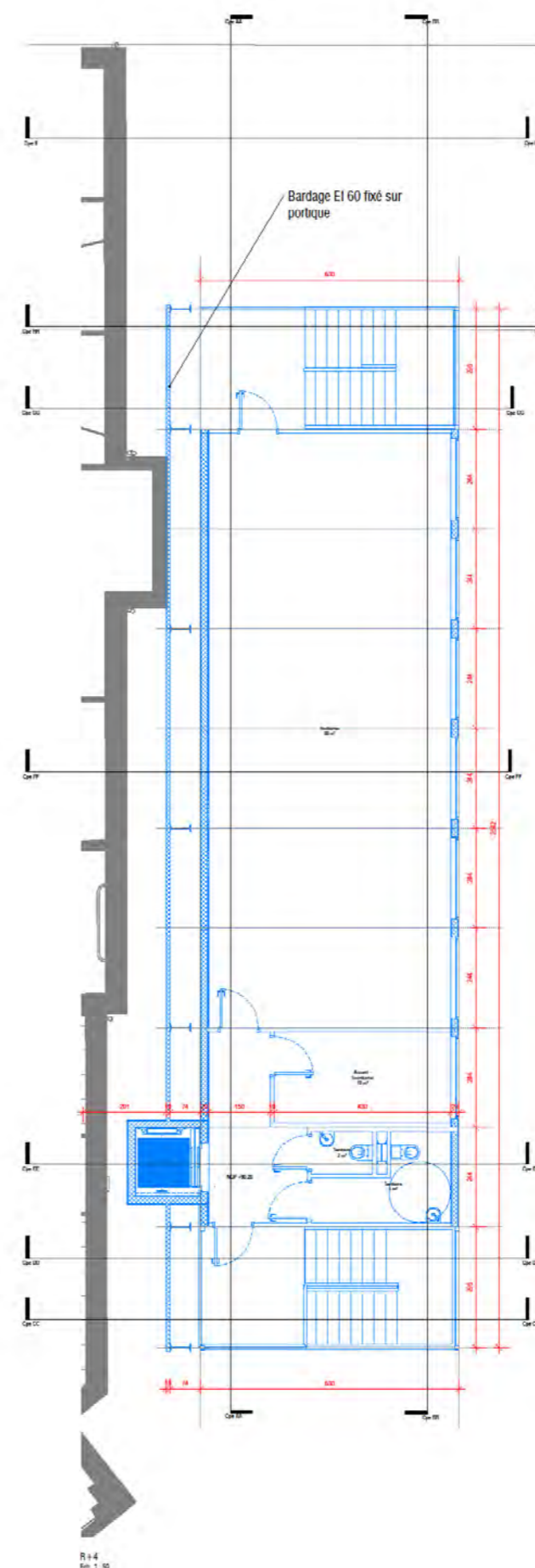
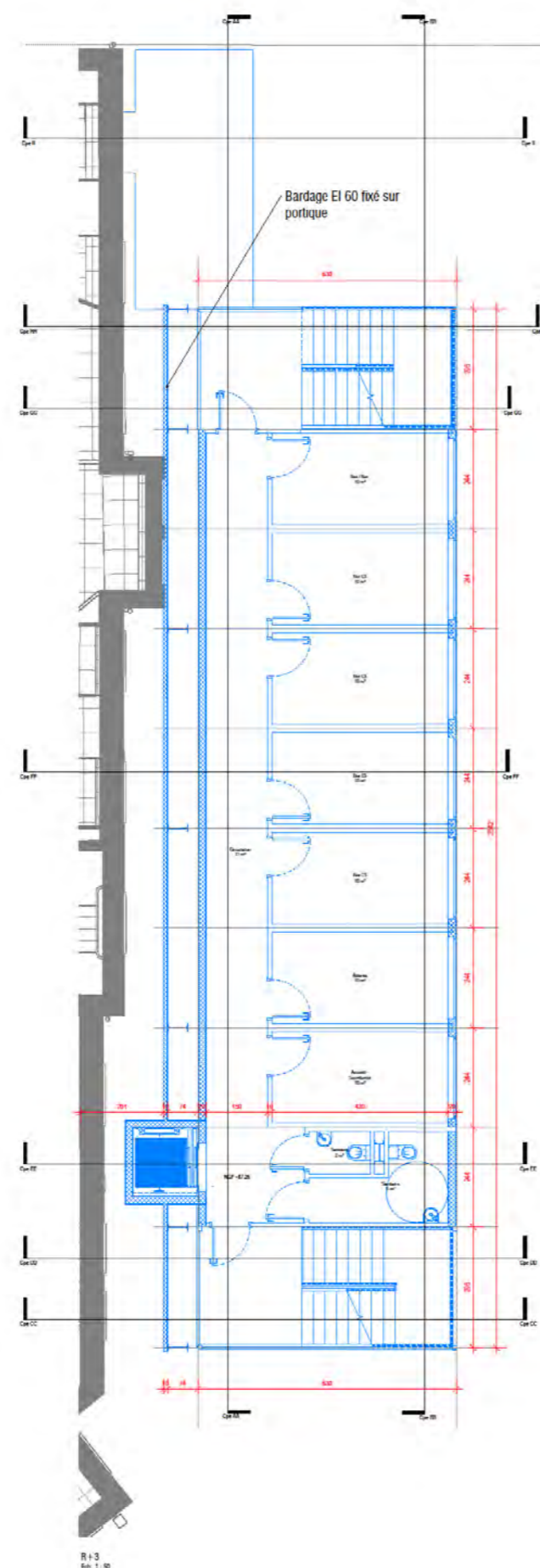
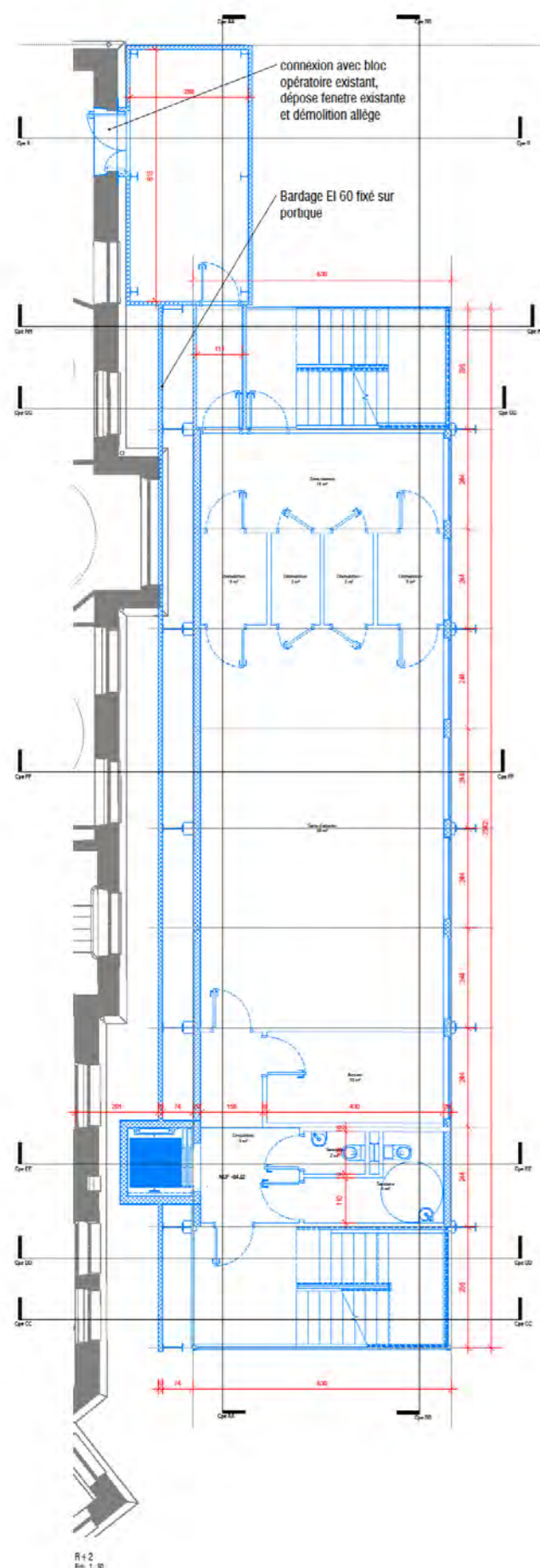
On donne les valeurs numériques suivantes : $N = 5$; $\Omega = 5 \text{ tour} \cdot \text{s}^{-1}$; $D = 350 \text{ mm}$.

Question 4.8 : **Calculer** la fréquence acoustique fondamentale de ce ventilateur.

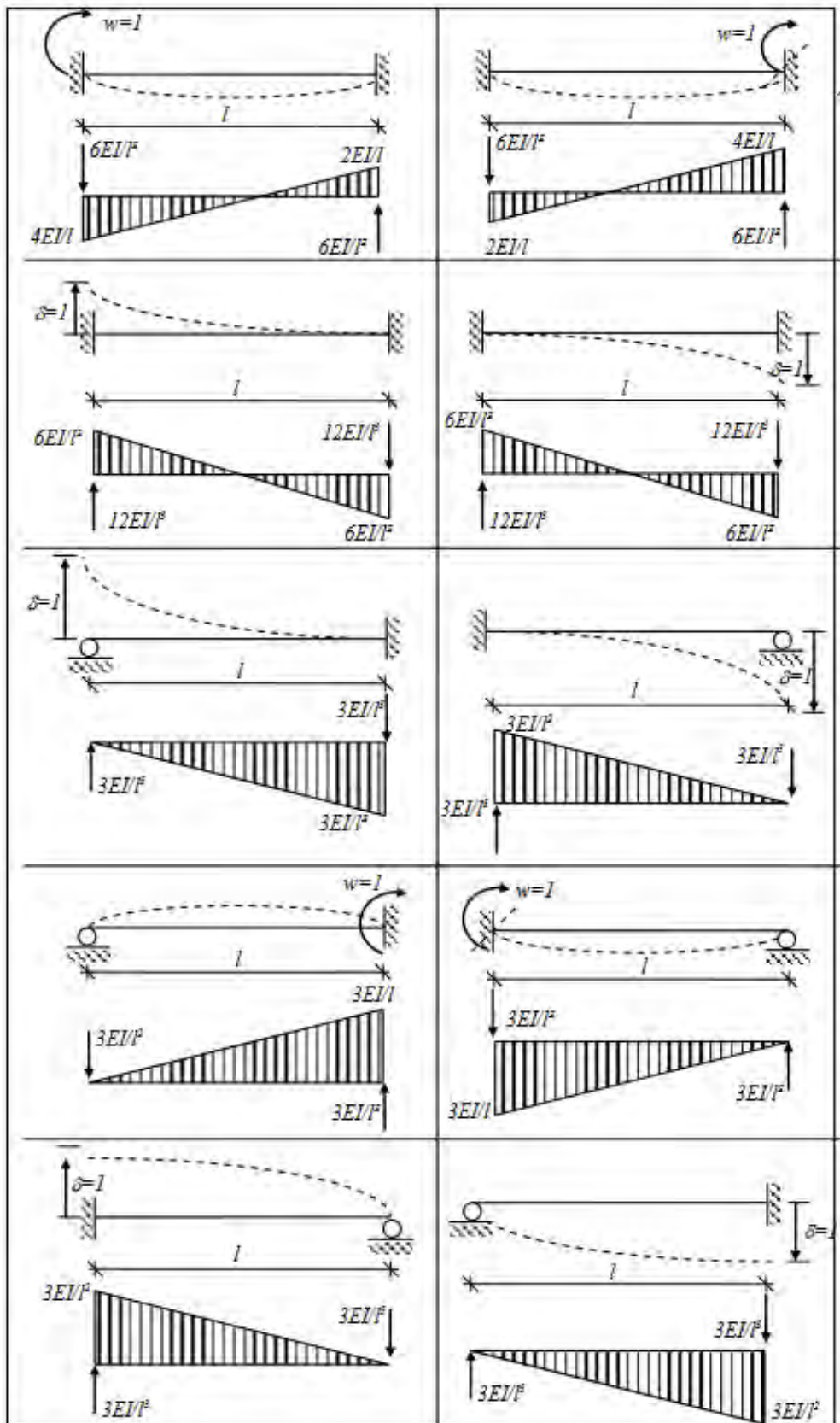
Question 4.9 : **Calculer** A en fonction de $v(0)$ à ces fréquences.

Question 4.10 : **En déduire** la puissance acoustique rayonnée par la gaine. **Montrer** que cette puissance dépend de la fréquence et de la longueur du tuyau.

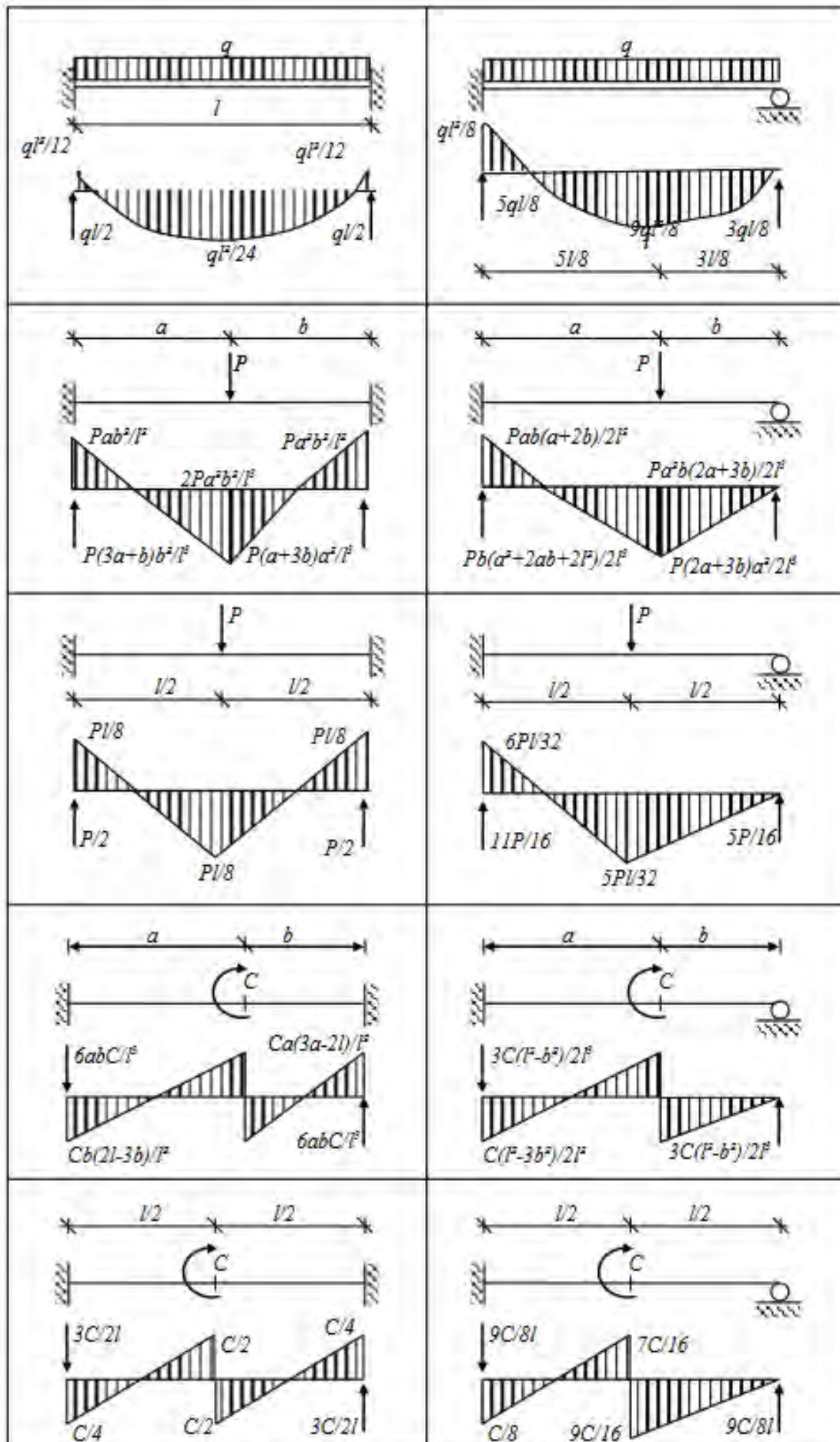
Question 4.11 : **Indiquer** s'il existe une longueur optimale pour laquelle le rayonnement est minimal pour les premières harmoniques du ventilateur.



Moments fléchissants et réactions des barres soumises à des déplacements d'appuis (rotations et translations)



Moments fléchissants et réactions des barres soumises à des charges extérieures



Document technique DT3 - Extrait d'un sondage carroté

Hopital Rothschild 29 rue Manin 75019 Paris		Profondeur : 10.00 m		X : Y : Z : 72.50 m	Inclinaison : Niveau d'eau : sec
Profondeur (m)	Cote (m)	Outil	Niveau d'eau	Faciès	Lithologie
0		Carottier Simple LS114	SEC	R	Sable moyen graveleux noir
72	Marne argileuse verdâtre avec passée beige				
1	Marne Argileuse verdâtre compacte (echantillon intact)				
71	Marne argileuse verdâtre avec passée beige				
2	Marne sableuse verdâtre humide avec grains de calcaire				
70	Marne argileuse beige et verdâtre avec passage gypseux blanchâtres (echantillon intact)				
3	Marne argileuse panachée beige et verdâtre compacte				
69	Marne argileuse panachée beige et verdâtre compacte (echantillon intact)				
4	Marne argileuse panachée beige et verdâtre compacte				
68	Marne argileuse panachée beige et verdâtre compacte				
5					
67					
6					
66					
7					
65					
8					
64					
9					
63					
10					

Tournez la page S.V.P.

Document technique DT4 - Extrait d'essais en laboratoire

Profondeur (m) / TN	0,0/1,0	1,0/2,0	2,0/3,0	3,0/4,0	4,0/5,0	5,0/6,0	6,0/7,0	7,0/8,0	8,0/10
ω_n en % (teneur en eau naturelle)	20,3	20,3	20,3	23,5	23,5	23,5	23,5	23,5	23,5
ω_L en % (limite de liquidité)	64	---	72	67	67	73	---	69	66
ω_P en % (limite de plasticité)	29	---	35	33	37	32	---	32	32
I_P en % (indice de plasticité)	35	---	37	34	30	41	---	37	34
I_c (indice de consistance)	0,93	---	1,24	1,06	1,09	1,02	---	1,10	0,93
Masse volumique des grains solides $\rho_s(\text{g}\cdot\text{cm}^{-3})$	2,65	2,65	2,65	2,77	2,77	2,77	2,77	2,77	2,77
Masse volumique humide $\rho_h(\text{g}\cdot\text{cm}^{-3})$	1,80	1,80	1,80	2,10	2,10	2,10	2,10	2,10	2,10

Formules de trigonométrie hyperbolique

- **Relations fondamentales**

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$$

$$e^x = \operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x)$$

- **Formules d'addition**

$$\operatorname{ch}(a + b) = \operatorname{ch}(a) \cdot \operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a) \cdot \operatorname{sh}(b) \quad \operatorname{ch}(a - b) = \operatorname{ch}(a) \cdot \operatorname{ch}(b) - \operatorname{sh}(a) \cdot \operatorname{sh}(b)$$

$$\operatorname{sh}(a + b) = \operatorname{sh}(a) \cdot \operatorname{ch}(b) + \operatorname{ch}(a) \cdot \operatorname{sh}(b) \quad \operatorname{sh}(a - b) = \operatorname{sh}(a) \cdot \operatorname{ch}(b) - \operatorname{ch}(a) \cdot \operatorname{sh}(b)$$

$$\operatorname{th}(a + b) = \frac{\operatorname{th}(a) + \operatorname{th}(b)}{1 + \operatorname{th}(a) \cdot \operatorname{th}(b)} \quad \operatorname{th}(a - b) = \frac{\operatorname{th}(a) - \operatorname{th}(b)}{1 - \operatorname{th}(a) \cdot \operatorname{th}(b)}$$

Nombres complexes de module 1 – Trigonométrie

- **Formule d'Euler**

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$