SESSION 2007

BREVET TECHNICIEN SUPÉRIEUR

CHIMISTE

Mathématiques

Durée : 2 heures
Coefficient : 3

Matériel autorisé :
- **Calculatrice de poche à fonctionnement autonome, sans imprimante et sans dispositif de communication externe (circulaire n° 99-186 du 16/11/99).**

Aucun document autorisé.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4 et le formulaire de mathématiques numéroté 1 à 4 (agrafé avec le sujet).

Code sujet : CHMAT-P07

Exercice 1 – (8 points)

Deux chaînes de production C_A et C_B d'un laboratoire pharmaceutique fabriquent, en très grande quantité, le comprimé d'un nouveau médicament dont la masse théorique de vente est de 900 mg.
Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. On note X_A (respectivement X_B) la variable aléatoire qui, à un comprimé pris au hasard dans la production de la chaîne C_A (respectivement C_B), associe sa masse en mg.
   On sait que X_A (respectivement X_B) suit la loi normale de paramètres (m_A ; σ_A) (respectivement (m_B , σ_B)).
   Un comprimé est jugé conforme au cahier des charges si sa masse est comprise entre 880 mg et 920 mg.

   a) On donne m_A = 896 mg et σ_A = 10 mg. Calculer, à 10^{-2} près, la probabilité qu'un comprimé pris au hasard dans C_A soit conforme.

   b) On donne m_B = 900 mg. La probabilité qu'un comprimé fabriqué par C_B soit conforme est 0,97. Déterminer, à l'unité près, l'écart type σ_B.

2. Dans la production totale, 40 % des comprimés proviennent de la chaîne C_A et 60 % de la chaîne C_B.
   La chaîne C_A produit 4 % de comprimés non conformes et la chaîne C_B en produit 3 %.
   On prélève au hasard un comprimé dans la production du laboratoire.
   On note A l'événement « Le comprimé a été fabriqué par la chaîne C_A »,
   B l'événement « Le comprimé a été fabriqué par la chaîne C_B »,
   C l'événement « Le comprimé est conforme ».

   a) A partir de l'énoncé, déterminer les probabilités des événements A et B ainsi que les probabilités conditionnelles de C sachant A et de C sachant B que l'on notera respectivement $P_A(C)$ et $P_B(C)$.

   b) Calculer alors la probabilité P(C) de l'événement C.

   c) On prélève un comprimé au hasard dans la production et on constate qu'il est conforme. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il provienne de la chaîne C_A.

3. Le contrôleur qualité n'étant pas satisfait de la production de la chaîne C_A , il décide de la faire régler. Après ce réglage, on teste l'hypothèse nulle H_0 : m_A = 900 mg, contre l'hypothèse alternative H_1 : $m_A \neq 900$ mg, au seuil de risque 5 %. On désigne par $\overline{X_A}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon non exhaustif de taille 100, associe sa masse moyenne en mg. Sous H_0, on admet que $\overline{X_A}$ suit la loi normale de paramètres (900 ; 1).

   a) Déterminer le nombre réel positif h tel que : $P(900 - h \leq \overline{X_A} \leq 900 + h) = 0,95$.

   b) Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.

   c) Un tirage de 100 comprimés dans la production de la chaîne C_A est effectué. La masse moyenne obtenue est $\overline{x}$ = 899 mg. Appliquer le test.

Exercice 2 – (12 points)

Étude de la cinétique de deux réactions successives du 1er ordre

On considère les réactions successives suivantes :

$$A \xrightarrow[k_1]{} B \xrightarrow[k_2]{} C$$

où k_1 et k_2 désignent des nombres réels strictement positifs.

On désigne par $a - x$, y et z les concentrations en mol.L^{-1} à l'instant t des produits A, B et C (t est exprimé en minutes), a désignant la concentration à l'instant $t = 0$ du produit A, seul présent au début de la réaction.

x, y et z sont des fonctions de t définies sur l'intervalle $[\ 0\ ; +\infty\ [$.

D'après la conservation de la matière on a : $x = y + z$. Les lois cinétiques donnent :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k_1(a - x) & (1) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = k_1(a - x) - k_2 y & (2) \\ z = x - y & (3) \end{cases}$$

<u>Partie A :</u>

1. L'équation (1) s'écrit aussi : $x' + k_1 x = k_1 a$ (E_1) avec k_1 nombre réel positif non nul.

   a) Résoudre l'équation homogène (E_0) : $x' + k_1 x = 0$.

   b) Déterminer une solution particulière $x_p(t)$ de (E_1) sous la forme d'une fonction constante.

   c) En déduire la solution générale de (E_1).

   d) Sachant que la solution x de (E_1) cherchée vérifie $x(0) = 0$, montrer que : $x(t) = a(\ 1 - \mathrm{e}^{-k_1 t}\ )$.

2. On suppose, dans cette question, que k_1 et k_2 sont des nombres réels positifs distincts.

   a) Montrer que l'équation (2) équivaut à (E_2) : $y' + k_2 y = k_1 a\, e^{-k_1 t}$.

   b) Résoudre l'équation homogène (E_0') : $y' + k_2 y = 0$.

   c) Déterminer une solution particulière $y_p(t)$ de (E_2) sous la forme $y_p(t) = \lambda e^{-k_1 t}$ où λ est une constante réelle à déterminer.

   d) En déduire la solution générale de (E_2).

   e) Sachant que $y(0) = 0$, montrer que : $y(t) = \dfrac{a k_1}{k_2 - k_1}\left(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}\right)$.

3. Donner l'expression de $z(t)$.

<u>Partie B :</u> **Étude d'un exemple**

Cas de la réduction d'un sel mercurique : $Hg^{2+} \longmapsto Hg^{+} \longmapsto Hg$
(en présence de H_2 sous pression constante)

avec $a = 10^{-3}$ mol.L^{-1} , $k_1 = 0{,}0283$ min^{-1} et $k_2 = 0{,}0033$ min^{-1}

1. Vérifier que $z(t) = 10^{-3}\left(1 + 0{,}132\, e^{-0{,}0283t} - 1{,}132\, e^{-0{,}0033t} \right)$.

2. Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} z(t)$.

3. Déterminer la dérivée de la fonction z.

4. Montrer que, pour tout nombre réel t strictement positif, $e^{-0{,}0283t} < e^{-0{,}0033t}$.
5. En déduire le signe de $z'(t)$ et le sens de variation de z sur l'intervalle $[\, 0 \,;\, +\infty \,[$.