BTS CHIMIE 1999

EXERCICE 1

Deux laboratoires A et B fabriquent des tubes à essai et les conditionnent dans des paquets. Tous les paquets contiennent le même nombre de tubes.

1. On note X_1 la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de tubes défectueux par paquet provenant de l'entreprise A. Sur un échantillon aléatoire de 49 paquets provenant du laboratoire A les nombres de tubes défectueux par paquet sont les suivants :

7	5	5	4	4	4	9	7	9	2	7	8	7	8	4
4	9	10	5	10	6	4	5	6	1	2	5	7	8	0
6	0	1	5	2	0	5	2	3	3	4	1	3	10	1
0	10	2	7											

Calculer une valeur approchée à 10^{-2} près de la moyenne m_1 et de l'écart-type s_1 de cet échantillon. On admet dans la suite de cet exercice qu'une estimation ponctuelle $\widehat{\mu}_1$ de la moyenne μ_1 de la variable aléatoire X_1 est 4,84 et qu'une estimation ponctuelle $\widehat{\sigma}_1$ de l'écart-type σ_1 de X_1 est 2,99.

2. On note X_2 la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de tubes défectueux par paquet provenant de l'entreprise B. Sur un échantillon aléatoire de 64 paquets provenant du laboratoire B on a obtenu une moyenne m_2 de 3,88 tubes défectueux et un écart-type s_2 de 1,45.
En déduire une estimation ponctuelle $\widehat{\mu}_2$ de la moyenne μ_2 de la variable aléatoire X_2 et une estimation ponctuelle $\widehat{\sigma}_2$ de l'écart-type σ_2 de X_2.

3. On se propose de construire un test d'hypothèse pour comparer les qualités de production des laboratoires A et B. On note $\overline{X}_1$ la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre moyen de tubes défectueux par paquet dans des échantillons aléatoires de 49 paquets de la production du laboratoire A. On note $\overline{X}_2$ la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre moyen de tubes défectueux par paquet dans des échantillons aléatoires de 64 paquets de la production du laboratoire B.

3.1 Le nombre d'observations étant important, on admet que les lois de probabilité de $\overline{X}_1$ et $\overline{X}_2$ peuvent être approchées par des lois normales.
Exprimer la moyenne et l'écart-type de chacune de ces variables aléatoires en fonction de ceux de X_1 et de X_2.
Dans toute la suite, on considère donc que $\overline{X}_1$ et $\overline{X}_2$ sont deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi normale.

3.2 on note D la variable aléatoire telle que : $D = \overline{X}_1 - \overline{X}_2$.
Quelle est la loi de probabilité de D ? Déterminer la moyenne et l'écart-type de D. Justifier.

4. Dans cette question, on admet que D suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu_1 - \mu_2 ; 0{,}46)$.
On pose pour hypothèse nulle $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ et pour hypothèse alternative $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$.

4.1 Calculer, sous l'hypothèse H_0, les nombres h et k tels que :

$$P(-h < D < h) = 0{,}99 \quad \text{et} \quad P(-k < D < k) = 0{,}95.$$

4.2 Énoncer la règle de décision relative à ce test lorsqu'on choisit un seuil de signification de 1 %, puis de 5 %.

4.3 Peut-on conclure après examen des échantillons donnés dans les questions 1 et 2 que la différence des moyennes observées est significative au seuil de risque de 1 % ? Au seuil de risque de 5 % ?

EXERCICE 2

On considère la réaction irréversible : $A + B \longrightarrow C$.

Les concentrations initiales des produits A et B sont en mol.L^{-1}, respectivement 0,3 et 0,5. À l'instant t, en minutes, les concentrations des produits A et B sont :

$$[A] = 0{,}3 - x(t) \qquad \text{et} \qquad [B] = 0{,}5 - x(t).$$

La fonction x, dérivable sur $[0, +\infty[$ vérifie :

$$x(0) = 0 \qquad \text{si } t \in [0, +\infty[, \quad 0 \leqslant x(t) < 0{,}3$$

x vérifie l'équation différentielle (E) :

$$\frac{dx}{dt} = 0{,}02(0{,}3 - x)(0{,}5 - x),$$

où 0,02 est la constante de vitesse de la réaction en L.mol^{-1}.min^{-1}.

I. 1) Trouver les constantes réelles a et b telles que pour $x \neq 0{,}3$ et $x \neq 0{,}5$:

$$\frac{1}{(0{,}3 - x)(0{,}5 - x)} = \frac{a}{0{,}3 - x} + \frac{b}{0{,}5 - x}.$$

2) Montrer que la solution de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition initiale $x(0) = 0$ est telle que :

$$\ln\left(\frac{3(0{,}5 - x)}{5(0{,}3 - x)}\right) = 0{,}004t.$$

3) Montrer que : $x(t) = 0{,}3 \times \dfrac{1 - e^{-0{,}004t}}{1 - 0{,}6e^{-0{,}004t}}$

II. 1) Montrer que pour t dans $[0, +\infty[$:

$$x'(t) = \frac{0{,}00048.e^{-0{,}004t}}{(1 - 0{,}6.e^{-0{,}004t})^2}.$$

2) Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t)$ et en déduire l'existence d'une asymptote D à Γ.

3) Dresser le tableau de variation de x.

4) Tracer soigneusement dans un repère orthogonal (1 cm pour 50 unités sur l'axe (O,t), 1 cm pour 0,05 unité sur l'axe (O,x)), la courbe Γ, son asymptote D, et la tangente à l'origine pour $t \in [0, 1\,000]$.

5) Au bout de combien de temps x prendra-t-elle la valeur 0,27 ? On donnera d'abord une valeur de t lue graphiquement, puis on précisera la valeur exacte par le calcul.