BTS CHIMIE 1998

EXERCICE 1

Deux filiales d'une même entreprise fabriquent des piles de 9 volts. On admet que les durées de vie moyennes des piles issues des filiales A et B suivent des lois de probabilité d'espérances mathématiques respectives μ_A et μ_B.

Dans la production de la filiale A, on a prélevé un échantillon de 55 piles et on a consigné dans le tableau ci-dessous les résultats concernant leur durée de vie :

durée de vie (en heures)	[75; 77[	[77; 79[	[79; 81[	[81; 83[	[83; 85[	[85; 87[	[87; 89[	[89; 91[	[91; 93[
Nombre de piles	7	8	3	7	7	4	5	5	9

En ce qui concerne la filiale B, on a testé un échantillon de 75 piles et on a obtenu les statistiques suivantes : durée de vie moyenne $m_2 = 81\,h$, écart-type correspondant $\sigma_2 = 4{,}5\,h$.

1) Déterminer à 10^{-1} près, la durée de vie moyenne m_1 et l'écart-type correspondant σ_1 pour l'échantillon prélevé dans la production de la filiale A. (Pour ce calcul, on supposera que les effectifs sont concentrés au centre des classes).

2) Trouver les estimations ponctuelles m_A et m_B de la durée de vie moyenne des piles fabriquées par les filiales A et B, à 10^{-1} près et les estimations ponctuelles σ_A et σ_B des écarts-types correspondants. On justifiera les résultats.

3) On se pose la question de savoir si la différence des moyennes des durées de vie observées dans les deux échantillons est imputable à une meilleure fabrication dans l'une des deux filiales ou tout simplement à des fluctuations d'échantillonnage. Dans ce but, on construit un test unilatéral.

On note $\overline{X}_A$ la variable aléatoire prenant pour valeur la durée de vie moyenne d'une pile dans un échantillon de taille 55 provenant de la filiale A.
On note $\overline{X}_B$ la variable aléatoire prenant pour valeur la durée de vie moyenne d'une pile dans un échantillon de taille 75 provenant de la filiale B.

On admet que : $\overline{X}_A$ suit la loi normale de moyenne μ_A et d'écart-type $\dfrac{\sigma_A}{\sqrt{55}}$, $\overline{X}_B$ suit la loi normale de moyenne μ_B et d'écart-type $\dfrac{\sigma_B}{\sqrt{75}}$.

$\overline{X}_A$ et $\overline{X}_B$ sont des variables aléatoires indépendantes.

On pose $D = \overline{X}_A - \overline{X}_B$ et on admet que D suit une loi normale.

a) Calculer l'écart-type de D.

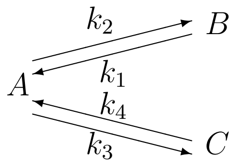
b) On pose comme hypothèse nulle H_0 : «$\mu_A = \mu_B$»
et comme hypothèse alternative H_1 : «$\mu_A > \mu_B$».

Calculer, sous l'hypothèse H_0, le nombre h tel que : $P(D < h) = 0{,}95$.

c) Énoncer la règle de décision relative à ce test lorsqu'on choisit un seuil de signification de 5% et conclure.

EXERCICE 2

On étudie des réactions chimiques au cours desquelles un corps A subit des transformations selon le schéma suivant :



k_1, k_2, k_3, k_4 sont des constantes de vitesse.

On note $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ les concentrations respectives des produits A, B, C à un instant t donné (t exprimé en minutes). Les conditions initiales sont $x(0)=1$, $y(0)=0$ et $z(0)=0$.

On dispose au dessus de la cuve où a lieu la réaction une burette par laquelle on verse du produit A à une vitesse constante dans la cuve. Dans ces conditions initiales expérimentales, les fonctions x, y, z définies sur l'intervalle $[0; +\infty[$ vérifient le système différentiel suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{dx}{dt} & = & 1-2x+y+z \\ \dfrac{dy}{dt} & = & x-y \\ \dfrac{dz}{dt} & = & x-z \end{array}\right.$$

Partie A

1) a) Calculer $\dfrac{d}{dt}(x+y+z)$ et, à l'aide des conditions initiales, en déduire que $y(t)+z(t)=1+t-x(t)$.

b) Démontrer que x est solution de l'équation différentielle (E) : $\quad \dfrac{dx}{dt}+3x=2+t$

2) a) Déterminer une fonction affine x_0 solution de l'équation (E).

b) Résoudre alors l'équation (E).

c) Déterminer une solution particulière x_1 de l'équation (E) vérifiant la condition initiale $x_1(0)=1$.

3) Démontrer que $\dfrac{d}{dt}(y-z)+y-z=0$, et en déduire que $y=z$.
Des questions précédentes déduire l'expression de $y(t)$ et $z(t)$.

Partie B

On considère maintenant la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par

$$f(t)=\frac{5}{9}+\frac{1}{3}t+\frac{4}{9}e^{-3t}$$

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité graphique $5\,cm$).

1) Calculer $f'(t)$ et étudier les variations de la fonction f en justifiant clairement l'étude du signe de la dérivée.

2) Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$. Démontrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y=\dfrac{1}{3}t+\dfrac{5}{9}$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$. Préciser la position de la courbe par rapport à son asymptote.

3) Représenter dans le même repère orthonormal (d'unité $5\,cm$) la courbe $\mathcal{C}$, son asymptote $\mathcal{D}$ et sa tangente au point d'abscisse 0.

Partie C

Préciser alors, à l'aide des résultats des parties A et B, à partir de quel instant α on aura retrouvé la concentration initiale en produit A. (On donnera α à la seconde près).