

BTS CHIMIE 1997

EXERCICE 1

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 10[$ par :

$$f(x) = \frac{2400x}{1 - 0,1x} e^{-\frac{1}{3}x}$$

1) Démontrer que, pour tout réel x appartenant à $[0; 10[$:

$$f'(x) = \frac{800e^{-\frac{1}{3}x}}{(1 - 0,1x)^2} (0,1x^2 - x + 3)$$

En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 10[$.

2) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 10 (On rappelle que $x < 10$).

3) Écrire les développements limités de $\frac{1}{1 - 0,1x}$ et $e^{-\frac{1}{3}x}$ à l'ordre 1 au voisinage de 0.

En déduire le développement limité de $f(x)$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.

Partie B

On considère un gaz dont l'équation caractéristique est, pour 100 moles, à température constante :

$$P(V - 0,1) = 2400e^{-\frac{1}{3V}}$$

où le volume V exprimé en m^3 est tel que $V > 0,1$ et P désigne la pression exprimée en Pa .

1) Démontrer que $P = f\left(\frac{1}{V}\right)$.

D'après le résultat de la question 3 de la partie A, on en déduit que le réel $\frac{2400}{V} - \frac{560}{V^2}$ est une bonne approximation de P lorsque V est assez grand.

Dans la suite de cette partie, on supposera que $V \geq 10$ et $P = \frac{2400}{V} - \frac{560}{V^2}$.

2) Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près du volume V pour lequel la pression est égale à $100 Pa$.

EXERCICE 2

Les trois questions sont indépendantes.

Dans un laboratoire pharmaceutique, une machine automatique fabrique en grande quantité des suppositoires contenant du paracétamol.

On désigne par X la variable aléatoire qui, à tout suppositoire pris au hasard dans la production, associe la masse (en mg) de paracétamol qu'il contient.

On admet que X suit une loi normale de moyenne m et d'écart-type $\sigma = 8$.

1) Dans cette question, on suppose que $m = 170$.

a) Calculer $P(150 < X < 180)$.

b) Déterminer le réel α pour que :

$$P(170 - \alpha < X < 170 + \alpha) = 0,85$$

On donnera une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

2) On suppose que la probabilité qu'un suppositoire, pris au hasard dans le stock, soit conforme au cahier des charges est égale à 0,85. Le médicament est commercialisé en boîtes de 10 suppositoires.

On désigne par Y la variable aléatoire qui, à toute boîte de 10 suppositoires, associe le nombre de suppositoires conformes qu'il contient.

a) Préciser la loi de Y et indiquer ses paramètres.

b) Calculer $P(Y \geq 9)$.

3) On veut contrôler la qualité de la fabrication sur une période donnée. Dans ce but, pendant le fonctionnement de la machine, on prélève de temps à autre un suppositoire dont on mesure la masse de paracétamol. On constitue ainsi un échantillon de 100 suppositoires. Les tirages sont supposés indépendants. À chaque échantillon ainsi constitué, on associe la masse moyenne \bar{X} (en mg) de paracétamol de ses suppositoires.

On se propose de construire un test permettant d'accepter ou de refuser, au seuil de signification de 5%, l'hypothèse selon laquelle la masse moyenne de paracétamol contenue dans un suppositoire est égale à 170 mg .

On pose pour hypothèse nulle $H_0 : m = 170$ et pour hypothèse alternative $H_1 : m \neq 170$.

a) Sous l'hypothèse nulle H_0 , quelle est la loi de la variable aléatoire \bar{X} ? On précisera ses paramètres.

b) Énoncer clairement la règle de décision du test.

c) Les résultats des mesures de l'échantillon prélevé sont donnés dans le tableau suivant :

masse (mg)	[145;155[[155;165[[165;175[[175;185[[185;195[
effectifs	7	30	43	16	4

Au vu de cet échantillon, peut-on accepter l'hypothèse H_0 au seuil de signification de 5% ?