BTS CHIMIE 1995

EXERCICE 1

Une entreprise d'imprimerie compose les différents tomes d'une encyclopédie des sciences et des techniques.

1. On note X_1 la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de fautes d'impression par page du premier tome. Sur un échantillon aléatoire de 48 pages, le nombre de fautes est le suivant :

8	4	6	1	4	6	7	5	3	4	4	9	1	9	1	2
5	1	9	6	4	6	3	2	5	5	3	4	3	6	4	5
3	4	4	1	7	7	4	1	5	3	2	2	1	1	7	3

Calculer la moyenne μ_1 et l'écart-type σ_1 de cet échantillon.

On admet, dans la suite de cet exercice, qu'une estimation ponctuelle $\widehat{m}_1$ de la moyenne m_1 de la variable aléatoire X_1 est 4,17 et qu'une estimation ponctuelle $\widehat{s}_1$ de l'écart-type s_1 de X_1 est 2,29.

2. On note X_2 la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de fautes d'impression par page du deuxième tome.

Sur un échantillon aléatoire de 64 pages de ce deuxième tome on a obtenu une moyenne μ_2 de 3,31 fautes d'impression et un écart-type σ_2 de 1,63.

En déduire une estimation ponctuelle $\widehat{m}_2$ de la moyenne m_2 de la variable aléatoire X_2 et une estimation ponctuelle $\widehat{s}_2$ de l'écart-type s_2 de X_2.

3. On se propose de construire un test d'hypothèse pour observer l'évolution dans la qualité du travail d'impression.

3.1 On note $\overline{X}_1$ la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre moyen de fautes d'impression dans des échantillons aléatoires de 48 pages du premier tome et $\overline{X}_2$ la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre moyen de fautes d'impression dans des échantillons aléatoires de 64 pages du deuxième tome.
Quelles sont les lois de probabilité des variables aléatoires $\overline{X}_1$ et $\overline{X}_2$?

3.2 On note D la variable aléatoire telle que $D = \overline{X}_1 - \overline{X}_2$.

On admet que D suit la loi normale $\mathcal{N}\left(m_1 - m_2; \sqrt{\dfrac{\widehat{s}_1^2}{48} + \dfrac{\widehat{s}_2^2}{64}}\right)$

On pose pour hypothèse nulle $H_0 : m_1 = m_2$
et pour hypothèse alternative $H_1 : m_1 \neq m_2$.

a) Calculer, sous l'hypothèse H_0, les nombres h et k tels que :

$$P(-h < D < h) = 0{,}99 \quad et \quad P(-k < D < k) = 0{,}95$$

b) Énoncer la règle de décision relative à ce test successivement lorsque l'on choisit un seuil de signification de 1 % puis de 5 %.

c) Peut-on conclure au vu des échantillons donnés dans les questions **1.** et **2.** que la différence des moyennes observées est significative

- au seuil de risque de 1 % ?

- au seuil de risque de 5 % ?

EXERCICE 2

Dans la réaction d'oxydo-réduction du persulfate de potassium $K_2S_2O_8$ par l'iodure de potassium KI en excès, on dose l'iode I_3^- libéré au moyen d'une solution titrée de thiosulfate de sodium dans des prélévements effectués à intervalles de temps réguliers.

Soient $x(t)$ le volume de solution versé correspondant à une durée de réaction t et a la valeur limite de x correspondant à la réaction totale.

Dans tout le problème, on suppose que : $0 \leqslant x(t) < a$.

On sait que la fonction x vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{dx}{dt} = k_T(a - x).$$

On se propose de vérifier qu'à la température T de l'expérience, k_T est une constante positive.

Partie A : étude théorique en supposant que k_T a la valeur constante k ($k > 0$).

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)$$

dans laquelle x est une fonction de la variable réelle positive t.

Déterminer la solution particulière de cette équation différentielle vérifiant la condition initiale $x(0) = 0$.

2. Soit f la fonction numérique définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(t) = a\left(1 - e^{-kt}\right)$$

a) Étudier les variations de la fonction f.

b) Soit Γ la courbe représentant la fonction f dans un repère cartésien $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Donner une équation de la tangente à Γ au point $O(0,0)$.

Montrer que Γ possède une asymptote et en préciser une équation.

3. Le temps t étant exprimé en minutes et x en millilitres, on a obtenu, à la température $T = 306\,K$, $x(10) = 4{,}2$ et $x(20) = 7{,}5$.

Montrer que a vérifie la relation :

$$(a - 4{,}2)^2 = a(a - 7{,}5).$$

En déduire la valeur de a.

Partie B : vérification expérimentale de la constance de k_T.

Les mesures poursuivies à $306\,K$ ont donné les résultats suivants :

t_i	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
x_i	4,2	7,5	10,1	12,2	13,8	15,1	16,1	16,9	17,6	18,1	18,5

On admet dans cette partie que $a = 20$.

1. On pose $y = \ln\left(\dfrac{a}{a - x}\right)$. Dresser le tableau des valeurs de t_i et y_i (on donnera pour y_i des valeurs décimales approchées à 10^{-3} près).

2. Calculer une valeur décimale approchée à 10^{-5} près du coefficient de corrélation linéaire de la série double (t_i, y_i).

3. Calculer, en justifiant, une valeur décimale approchée de k_T à 10^{-3} près.