BTS CHIMIE 1994

EXERCICE 1

Pour contrôler le niveau de remplissage des flacons remplis d'éther par une machine automatique, on réalise des mesures sur un échantillon de 50 flacons extraits au hasard de la production. Le tableau ci-dessous rassemble les résultats obtenus :

éther (ml) x_i	$[249;249{,}5[$	$[249{,}5;250[$	$[250;250{,}5[$	$[250{,}5;251[$	$[251;251{,}5[$
effectifs n_i	2	9	24	12	3

1. Calculer la moyenne m_e et l'écart-type σ_e de la série statistique ainsi définie.

2. Soit X la variable aléatoire associant à tout flacon la quantité d'éther qu'il contient. On suppose que X suit une loi normale de paramètres m et σ.
On admet que, dans ces conditions, la moyenne d'échantillonnage $\overline{X}$, associant à tout échantillon de taille n, la moyenne des quantités d'éther observées, suit une loi normale de paramètres m et $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

a) Donner des estimations de m et σ.

b) Utiliser ces estimations pour déterminer l'intervalle de confiance de m au seuil de risque 5 %.

c) On suppose que X suit une loi normale de paramètres $m = 250$ et $\sigma = 0{,}5$.

Déterminer le pourcentage de flacons dont le volume d'éther dépasse la valeur 249,5.

EXERCICE 2

On considère la réaction trimoléculaire irréversible

$$A + B + C \longrightarrow D$$

On désigne par $a = [A]_0$, $b = [B]_0$ et $c = [C]_0$ les concentrations initiales de produits A, B et C (exprimées en millième de mole par litre), $x(t)$ la concentration en produit D à l'instant t (exprimé en minutes), k la constante de la vitesse de réaction.

L'objet de l'exercice consiste à préciser la fonction x en admettant que celle-ci vérifie l'équation différentielle

$$(E) \qquad \frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x)(c-x)$$

avec $a = 7$, $b = 5$ et $c = 5$.

1. Résolution de l'équation différentielle (E)
a) Montrer que pour tout réel $z \notin \{5{,}7\}$

$$\frac{1}{(7-z)(5-z)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{7-z} - \frac{1}{5-z} + \frac{2}{(5-z)^2}\right)$$

b) Déterminer une primitive G de la fonction g définie sur $[0{,}5[$ par

$$g(z) = \frac{1}{(7-z)(5-z)^2}$$

c) Montrer, en résolvant l'équation différentielle (E) avec la condition initiale $x(0) = 0$, que

$$\frac{1}{4}\ln\left(\frac{7}{5} \times \frac{5 - x(t)}{7 - x(t)}\right) + \frac{x(t)}{10(5 - x(t))} = kt$$

Il n'est pas demandé d'exprimer x en fonction de t.

2. Déterminer la constante k, sachant que $x(1) = 1$.
On donnera la valeur exacte de k et sa valeur approchée arrondie à 10^{-4} près.

3. On admet dans cette question que t et $x(t)$ sont liés par

$$\frac{1}{4}\ln\left(\frac{7}{5} \times \frac{5 - x(t)}{7 - x(t)}\right) + \frac{x(t)}{10(5 - x(t))} = 0{,}0078t$$

Si cette relation permet le calcul de t connaissant $x(t)$, elle ne permet pas en revanche de prévoir, autrement que graphiquement, quelle sera la valeur de $x(t)$ à l'instant t. L'objet de cette question est la détermination d'une expression approchée de $x(t)$ en fonction de t, valable sur l'intervalle [2,4].

a) Recopier et compléter (en arrondissant à 10^{-2} près) le tableau suivant :

t_i	2,96				
$x_i = x(t_i)$	2	2,5	3	3,5	4
$y_i = \ln(5 - x_i)$					

b) Déterminer le coefficient de corrélation de y et t. L'ajustement affine de y par rapport à t, par la méthode des moindres carrés, est-il de bonne qualité ?

Justifier la réponse.

c) Déterminer une équation de la droite de régression de y en t, en arrondissant ses coefficients au millième le plus proche.

d) En déduire une expression approchée de $x(t)$ en fonction de t, notée $x_{appr}(t)$.

e) Comparer les valeurs de $x_{appr}(t)$ à celles de $x(t)$ pour les valeurs de t de la question 3.a).