BTS CHIMIE 1993

EXERCICE 1

Le service qualité d'une usine pharmaceutique décide de contrôler la quantité d'acide acétylsalicylate de lysine, contenu dans les sachets produits par une machine automatique. Pour cela, il mesure la masse, en grammes, de cinquante sachets choisis au hasard.

Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Masse x_i	Effectif n_i
[0,87; 0,88[	1
[0,88; 0,89[	5
[0,89; 0,90[	7
[0,90; 0,91[	20
[0,91; 0,92[	9
[0,92; 0,93[	3
[0,93; 0,94[	3
[0,94; 0,95[	2

1. Calculer la moyenne et l'écart-type de la série statistique ainsi définie.

2. Soit X la variable aléatoire qui à tout sachet associe la masse d'acide acétylsalicylate de lysine qu'il contient. On suppose que X suit une loi normale de moyenne $m = 0{,}90$ et d'écart-type $\sigma = 0{,}015$.

2.1. Calculer, sur une production de 10 000 sachets, le nombre de sachets qui ont une masse comprise entre 0,89 et 0,91.

2.2. Déterminer l'intervalle centré en m contenant 95 % des masses de sachets.

2.3. Un réglage de la machine permet de modifier l'écart-type σ de X. Déterminer σ pour que 99 % au moins des sachets aient leur masse supérieure à $0{,}895\,g$?

EXERCICE 2

La vitesse des molécules d'un gaz peut être considérée comme une variable aléatoire dont la fonction de répartition est F définie sur $[0, +\infty[$:

$$F(x) = \int_0^x f(\nu)d\nu \ \text{ avec } \ f(\nu) = A\nu^2 e^{-B\nu^2}$$

f est une fonction dont les valeurs peuvent être déterminées expérimentalement grâce à l'appareil de Lammert (pour un gaz à une température donnée).

La première partie de l'exercice va permettre de déterminer les constantes A et B caractéristiques de la fonction f associée au mercure gazeux à la température de $373^o K$.

La deuxième partie se compose d'une étude de f et du calcul de la vitesse moyenne des molécules dans les mêmes conditions.

Ces deux parties sont indépendantes.

Première partie

Une expérience réalisée avec l'appareil de Lammert a donné les résultats suivants avec du mercure gazeux à $373^o K$:

ν	200	300	400	600	800	1000
$f(\nu)$	$4{,}1.10^{-4}$	$7{,}2.10^{-4}$	$9{,}8.10^{-4}$	$10{,}6.10^{-4}$	$6{,}7.10^{-4}$	$2{,}8.10^{-4}$

(ν est mesuré en $m.s^{-1}$)

1. Calculer, pour chaque valeur de ν, la valeur de

$$y = \ln \frac{f(\nu)}{\nu^2}$$

Rassembler les résultats dans un tableau contenant en première ligne les valeurs de $x = \nu^2$ et en deuxième ligne les valeurs correspondantes de y, au centième le plus proche.

2. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de x et y.

Un ajustement affine est-il justifié ?

3. Déterminer une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés.

4. Déduire de ce qui précède une expression approchée de $f(\nu)$.

Deuxième partie

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = Ax^2 e^{-Bx^2}$$

où $A = 1{,}14.10^{-8}$ et $B = 3{,}72.10^{-6}$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. Calcul de la vitesse moyenne des molécules de mercure gazeux à une température de $373^o K$.

a) Soit u la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $u(x) = e^{-Bx^2}$. Calculer $u'(x)$.

b) En déduire le calcul de $M(\alpha) = \displaystyle\int_0^\alpha x f(x) dx$ en utilisant une intégration par parties.

c) On admettra que la vitesse moyenne est égale à la limite de $M(\alpha)$ quand α tend vers $+\infty$.

Calculer cette vitesse moyenne.