

BTS CHIMIE 2002

PROBLEME 1 (8 points)

Lorsqu'un fil conducteur est parcouru par un courant électrique d'intensité constante, celui-ci s'échauffe par effet Joule et sa température varie en fonction du temps. Désignons par $\theta(t)$ la température du conducteur exprimée en degrés Celsius à l'instant t exprimé en secondes. À l'instant de la mise sous tension, choisi comme instant origine ($t = 0$), la température du conducteur est celle du milieu ambiant : $\theta(0) = 18$ (condition initiale).

Dans les conditions de l'expérience, le bilan énergétique se traduit par l'équation différentielle :

$$(E) \quad \theta'(t) + 10k\theta(t) = 2, \quad t \geq 0$$

dans laquelle k est une constante qui dépend du conducteur et du milieu ambiant.

Partie A

On suppose, dans cette partie, que le conducteur est parfaitement isolé, c'est-à-dire que $k = 0$.

1. Écrire l'équation différentielle correspondant à $k = 0$ puis résoudre cette équation différentielle.
2. Représenter graphiquement les variations de θ dans un repère orthogonal d'unités graphiques : 1 cm en abscisse pour 2 secondes et 1 cm en ordonnée pour 2 °C.
3. Calculer le temps nécessaire pour que la température du conducteur atteigne 30 °C.

Partie B

On suppose, dans cette partie, que le conducteur n'est pas thermiquement isolé et que $k = 5 \cdot 10^{-3}$.

1. Vérifier que la température du conducteur s'exprime par : $\theta(t) = 40 - 22e^{-0,05t}$
2. a. Calculer la température stationnaire du conducteur :

$$\theta_e = \lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t)$$

Donner l'interprétation graphique de ce résultat.

- b. Déterminer le développement limité de θ au voisinage de $t = 0$, à l'ordre 2.

En déduire une équation de la tangente à la courbe représentative de θ en son point d'abscisse 0 et préciser la position de la courbe par rapport à cette tangente, au voisinage de $t = 0$.

3. a. Étudier les variations de θ en fonction de t .
- b. Construire la courbe représentative de θ sur le même graphique que dans la partie A.
- c. Calculer la température du conducteur à l'instant $t = 20$.
- d. Calculer le temps nécessaire pour que la température du conducteur atteigne 39,99 °C.

PROBLEME 2 (12 points)

Un laboratoire de chimie est chargé de conditionner des flacons d'eau de toilette destinés à une parfumerie. On définit une variable aléatoire X associant à chaque flacon le volume de son contenu exprimé en cm^3 . On suppose que X suit la loi normale de moyenne μ (inconnue) et d'écart type $\sigma = 0,036$.

Première partie : Dans cette partie, on prend pour μ la valeur annoncée par le fournisseur : $\mu = 43,041$.

Le cahier des charges indique que le flacon est conforme lorsque le volume de son contenu appartient à l'intervalle $[42,970; 43,130]$.

On choisit un flacon au hasard dans la production.

1. Déterminer la probabilité pour qu'il soit conforme.
2. Trouver un intervalle centré en μ dans lequel le volume a 85% de chances de se trouver.

Deuxième partie : À l'occasion d'une commande, le parfumeur reçoit du laboratoire un lot de flacons. Il envisage d'effectuer un test de conformité de la moyenne μ de la production, avec la valeur $m = 43,041$ annoncée par le fournisseur. Pour réaliser ce test d'hypothèse bilatéral, il effectue un prélèvement aléatoire, assimilé à un prélèvement avec remise de 75 flacons pris dans le lot reçu. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Volume	$[42,93; 42,97[$	$[42,97; 43,01[$	$[43,01; 43,05[$	$[43,05; 43,09[$	$]43,09; 43,13]$
Effectif	2	7	39	19	8

1. Calcul de la moyenne.

Calculer la moyenne \bar{x} de cet échantillon (arrondie à 10^{-3} près) en faisant l'hypothèse que les valeurs observées sont respectivement celle du centre de chaque classe.

2. Construction du test.

On oppose l'hypothèse nulle $H_0 : \mu = m$ à l'hypothèse alternative $H_0 : \mu \neq m$.

- a. Quelle est la loi de probabilité suivie par la moyenne d'échantillonnage \bar{X} ? En préciser les paramètres.
- b. En se plaçant sous l'hypothèse H_0 , déterminer la valeur arrondie à 10^{-3} près du réel h tel que :

$$P(\mu - h \leq \bar{X} \leq \mu + h) = 0,95.$$

- c. En déduire l'intervalle d'acceptation de l'hypothèse H_0 au seuil de risque de 5%.
- d. Énoncer la règle de décision du test.

3. Utilisation du test.

Peut-on affirmer, au seuil de risque de 5% , que la valeur m annoncée pour μ est correcte ?