

BTS CHIMIE 2000

EXERCICE 1 (13 points)

On se propose d'étudier le système de réactions successives suivant : $A \rightarrow B \rightarrow C$. On appelle $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ les concentrations respectives des produits A , B et C à l'instant t exprimé en minutes. À l'instant $t = 0$, on a les concentrations initiales : $x(0) = a$, $y(0) = 0$ et $z(0) = 0$. Les lois de la cinétique chimique montrent que x , y et z sont solution sur $[0, +\infty[$ du système (S) :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -k_1x & (1) \\ \frac{dy}{dt} = k_1x - k_2y & (2) \\ \frac{dz}{dt} = k_2y & (3) \end{cases}$$

où k_1 et k_2 sont deux nombres réels distincts.

Première partie

1) Résoudre l'équation différentielle (1). Déterminer la solution de (1) qui vérifie la condition $x(0) = a$.

2) a) Montrer que les solutions du système (S) vérifient l'équation différentielle

$$(4) : y' + k_2y = ak_1e^{-k_1t},$$

b) Résoudre l'équation différentielle (4). Déterminer la solution de (4) qui vérifie la condition $y(0) = 0$.

3) a) Montrer que pour tout $t \geq 0$, on a :

$$x'(t) + y'(t) + z'(t) = 0.$$

b) En déduire à l'aide des conditions initiales, la solution z du système (S).

Deuxième partie

On a réalisé une expérience du type $A \rightarrow B \rightarrow C$, à une température fixe et on a obtenu les résultats suivants sur les concentrations du produit A :

t_i (en min)	0	0,5	1	2	4,5	6	7
x_i (en $mol.L^{-1}$)	2	1,213	0,736	0,271	0,022	0,005	0,002

On pose $X = \ln x$.

1) a) Recopier et compléter le tableau suivant en donnant des résultats arrondis à 10^{-2} près.

t_i	0	0,5	1	2	4,5	6	7
$X_i = \ln x_i$							

b) Donner une valeur approchée à 10^{-5} près du coefficient de corrélation de la série statistique (t_i, X_i) . Un ajustement affine de X en t par la méthode des moindres carrés est-il justifié?

2) a) Donner une équation de la forme $X = \alpha t + \beta$ de la droite de régression de X en t par la méthode des moindres carrés. On donnera des valeurs approchées à 10^{-2} près des coefficients α et β .

b) Sachant que l'étude théorique montre que pour tout $t \in [0, +\infty[$, on a $x(t) = ae^{-k_1t}$ et que $x(0) = 2$, déterminer une valeur approchée de k_1 à 10^{-2} près.

On admet pour la suite que : $a = 2$, $k_1 = 1$ et $k_2 = 0,5$.

Troisième partie

On considère les fonctions x , y et z définies sur $[0, +\infty[$ par :

$$x(t) = 2e^{-t} \quad y(t) = 4(e^{-0,5t} - e^{-t}) \quad z(t) = 2(1 - 2e^{-0,5t} + e^{-t})$$

On appelle C_1 , C_2 et C_3 leurs courbes représentatives respectives dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (Les unités graphiques sont 2 cm pour l'unité en abscisse et 5 cm pour l'unité en ordonnée).

- 1) La courbe C_1 est tracée sur la feuille donnée en annexe. En déduire le tableau de variation de la fonction x .
- 2) Étudier les variations de la fonction y . On appelle t_M la valeur de t pour laquelle y admet un maximum y_M . Déterminer les valeurs exactes de t_M et de y_M . Dresser le tableau de variation de y .
- 3) a) Montrer que C_3 admet une asymptote Δ .
b) Étudier les variations de z et dresser son tableau de variation.
- 4) Tracer la droite Δ et les courbes C_1 , C_2 et C_3 dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- 5) On appelle τ l'instant où les concentrations des produits A et B sont égales. Déterminer par lecture graphique une valeur approchée de τ exprimée en minutes.

Exercice 2 (7 points)

Dans la fabrication de comprimés effervescents, il est prévu que chaque comprimé doit contenir 1625 mg de bicarbonate de sodium. Afin de contrôler la fabrication de ces médicaments, on a prélevé un échantillon de 150 comprimés et on a mesuré la quantité de bicarbonate de sodium pour chacun d'eux. Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau suivant :

Classes	[1610,1615[[1615,1620[[1620,1625[[[1625,1630[[1630,1635[
Effectifs	7	8	42	75	18

- 1) En convenant que les valeurs mesurées sont regroupées au centre de chaque classe, calculer une valeur approchée à 10^{-2} près de la moyenne m et de l'écart type s de cet échantillon.
- 2) À partir des résultats obtenus pour cet échantillon, assimilé à un échantillon non exhaustif, donner les estimations ponctuelles \widehat{M} et $\widehat{\sigma}$ de la moyenne M et de l'écart type σ de la quantité de bicarbonate de sodium dans la population (formée de l'ensemble de tous les comprimés fabriqués et supposée très grande). Dans la question suivante, on prendra pour valeur de σ son estimation $\widehat{\sigma}$.
- 3) On appelle \overline{X} la variable aléatoire qui à tout échantillon de taille $n = 150$ associe la quantité moyenne de bicarbonate de sodium de cet échantillon.
 - a) \overline{X} peut-elle être approchée par une loi classique? Si oui, laquelle? Donner ses paramètres.
 - b) Déterminer un intervalle de confiance de la quantité moyenne de bicarbonate de sodium dans la population avec le coefficient de confiance 95%.
 - c) Quelle devrait être la taille minimum de l'échantillon prélevé pour connaître avec le coefficient de confiance 95% la quantité moyenne de bicarbonate de sodium dans la population à 1 mg près?

Annexe

3

2

1

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10