

Grand Forum des Mathématiques Vivantes 10 mars 2021

Denis Butlen

Professeur émérite, université Cergy-Pontoise

PLAN

- ▶ I. l'enseignement des mathématiques en éducation prioritaire :
 - ▶ Que savons-nous sur les élèves en difficulté en mathématiques
 - ▶ Que savons nous sur les pratiques enseignantes
- ▶ II. Des pistes pour améliorer l'apprentissage des élèves de l'école primaire

I. l'enseignement des mathématiques en éducation prioritaire :

I.1. Les difficultés des élèves en mathématiques

Des recherches menées avec Pascale Masselot et
Monique Pézard

Des caractéristiques des élèves en difficulté

► Comment se manifestent les difficultés des élèves ?

- *Difficulté à capitaliser le savoir*
- *Manque de confiance dans les connaissances anciennes*
- *Carence dans les représentations mentales et absence de projet implicite de réinvestissement*
- *Absence d'identification de l'enjeu des situations d'enseignement*
- *Rôle de l'action*

Calcul mental du produit 32×25

- ▶ Voici trois procédures permettant de résoudre ce calcul :
- ▶ Simulation de l'algorithme posé (dans la tête)
- ▶ $32 \times 25 = 32 \times 20 + 32 \times 5 = 640 + 160 = 800$
- ▶ $32 \times 25 = 8 \times 4 \times 25 = 8 \times 100 = 800$
- ▶ les connaissances mobilisées par l'élève pour chaque procédure
 - ▶ ne sont pas les mêmes
 - elles dépendent de la disponibilité des connaissances numériques des élèves
 - Elles résultent d'un compromis entre la qualité des connaissances mobilisées et le coût en calcul et en mémoire
 - Elles n'impliquent pas les mêmes apprentissages
 - ▶ et **témoignent d'une compréhension différente** des enjeux explicites et implicites de l'activité de calcul mental

1.2. Des résultats de recherche sur les pratiques enseignantes en mathématiques en REP

Des contradictions, des pratiques majoritaires, des dimensions organisatrices des pratiques

- ▶ **Deux expérimentations basées sur des observations portant sur un temps long qui ont fait apparaître :**
 - ▶ **Des contradictions**
 - ▶ **Des pratiques majoritaires et des alternatives très**
 - ▶ **Des modes de réponses à trois grandes questions de la profession qui organisent les pratiques des enseignants**

Des contradictions

- ▶ **Des contradictions** qui marquent les pratiques des PE enseignant les mathématiques en ZEP
 - ▶ Entre logique des apprentissages disciplinaires et socialisation
 - ▶ Entre réussite immédiate et réussite à moyen terme
 - ▶ Entre collectif et individuel

Des pratiques majoritaires

- ▶ Qui se caractérisent par :
 - ▶ Des tâches **partielles et algorithmisées**, des temps de recherche très **courts**
 - ▶ Une **baisse des exigences** due à une anticipation sur les difficultés des élèves
 - ▶ Une **individualisation** très rapide et **non contrôlée** de l'enseignement comme de la gestion des comportements
 - ▶ Une **quasi absence** de phases de synthèse et d'institutionnalisation
 - ▶ Une mise en œuvre d'une **pédagogie différenciée** (système de fiches) et d'un **tutorat**

Des pratiques majoritaires

- ▶ Qui se **stabilisent** très vite
- ▶ Dont les enseignants sont **conscients** mais déclarent **ne pas pouvoir** faire autrement
- ▶ Des pratiques souvent basées sur
 - ▶ Sur des mises en œuvre d'une certaine **différenciation**
 - ▶ sur une volonté d'**individualiser** l'enseignement qui peuvent **renforcer** les difficultés des élèves

Des pratiques alternatives

- ▶ Des pratiques minoritaires constituant des alternatives très minoritaires basées sur des choix pédagogiques et didactiques ambitieux et des gestes professionnels adaptés
- ▶ Toutefois, une certaine diversité de pratiques a été identifiée (enseignement du calcul mental au CP)

Trois grandes questions de la profession

- ▶ Les enseignants doivent simultanément répondre à trois grandes questions
 - ▶ Installer la **paix scolaire**
 - ▶ Exercer une **vigilance didactique**
 - ▶ Gérer le couple de processus **dévolution/institutionnalisation**

Installer la paix scolaire

- ▶ La **paix scolaire** est
 - ▶ Un **couple** constitué de la **paix sociale** et de l'**adhésion** de l'élève au projet d'enseignement du professeur
 - ▶ Une **condition nécessaire** pour développer les apprentissages disciplinaires
- ▶ Cette difficulté à installer la paix scolaire explique pour une part les pratiques majoritaires observées ;
- ▶ La paix scolaire détermine et est déterminée par la qualité des mathématiques enseignées
- ▶ Nous avons repéré **plusieurs modes d'installation** qui peuvent **conditionner** les mathématiques proposées à la fréquentation des élèves

Vigilance didactique (M. Pézard, 2010)

- ▶ « *la vigilance didactique* : une sorte d'ajustement didactique permanent de la part du professeur faisant appel aux composantes cognitive et médiative des pratiques et s'exerçant dans les trois niveaux global, local et micro ».
- ▶ Exercer une certaine vigilance didactique met en jeu **des connaissances mathématiques et didactiques** nécessaires pour enseigner.
- ▶ Les connaissances mathématiques ne sont pas seulement académiques, elles doivent être **finalisées pour l'enseignement**.

Vigilance didactique

- ▶ **Les connaissances didactiques** contribuent à une **bonne perception des enjeux** d'apprentissage des situations et de leur organisation. Elles peuvent être de plusieurs types.
 - ▶ **des résultats ou faits didactiques**, mis en évidence par la recherche et qui ne sont plus contestés,
 - ▶ **des outils permettant de lire le réel**, issus de la didactique des mathématiques, mais transformés en vue de l'action d'enseigner (**analyse *a priori***, **identification du savoir** et de son(es) **texte(s)**, **repérage** et **analyse en actes des productions des élèves**, **gestion des variables**, etc.)

Dévolution - Institutionnalisation

- ▶ Ce sont des processus.
- ▶ « La **dévolution** est l'acte par lequel l'enseignant fait **accepter à l'élève la responsabilité** d'une situation d'apprentissage (a-didactique) ou d'un problème et accepte lui-même les conséquences de ce transfert. »
(G. Brousseau, 1986)
- ▶ L'institutionnalisation a pour but de donner aux connaissances éventuellement mobilisées par les élèves **un statut de savoir culturel et social**. Cela suppose :
 - ▶ Des décontextualisations
 - ▶ Des dépersonnalisations
 - ▶ Des généralisations
 - ▶ Des formalisations

II. Des pistes pour améliorer les apprentissages des élèves

Quelques exemples de difficultés et quelques réponses possibles

- ▶ Exercer une vigilance didactique pour s'adapter aux difficultés des élèves
 - ▶ Les cheminements cognitifs
 - ▶ Le traitement des erreurs
- ▶ L'institutionnalisation

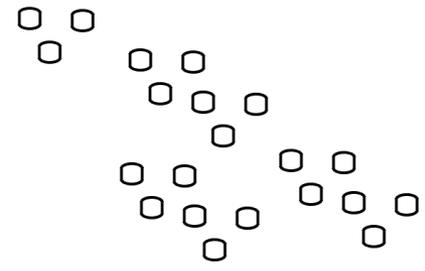
Ménager des cheminements cognitifs spécifiques

L'énoncé du problème est le suivant : « *Pierre et Paul ont ensemble 21 images, Pierre a 3 images. Combien Paul a-t-il d'images ?* »

Gérer une diversité de procédures (1)

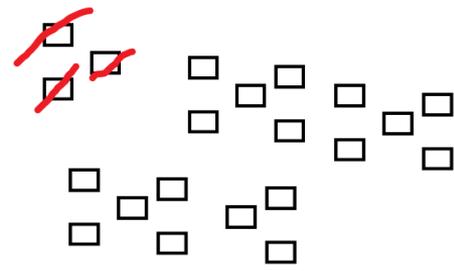
8 exemples de productions

- ▶ Élève A : l'élève prend des jetons.
 - ▶ Il compte d'abord 3 jetons, les dispose puis complète la collection de jetons jusqu'à 21 avec un peu de difficulté.
 - ▶ Il recompte plusieurs fois les jetons disposés en revenant en arrière puis il dit : « Paul a ces jetons-là ».



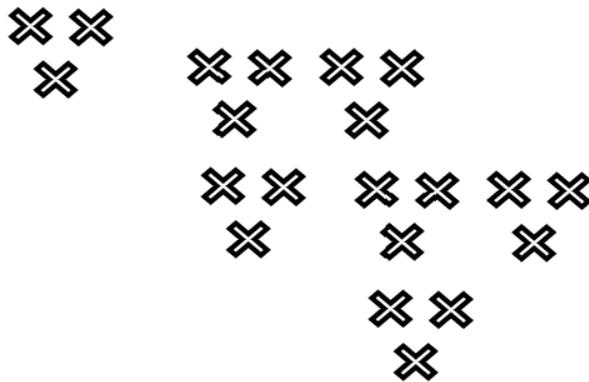
- ▶ Élève B

- ▶ l'élève dessine une collection plus ou moins organisée (traces de constellations) de 21 rectangles en les comptant mentalement un à un.
- ▶ Il en raye 3,
- ▶ puis il compte un à un les rectangles restants et énonce le résultat : « dix-huit ».



Gérer une diversité de procédures (2)

- ▶ Élève C :
 - ▶ l'élève dessine d'abord 3 croix en énonçant en même temps les nombres de 1 à 3,
 - ▶ Il marque un temps d'arrêt et complète ensuite la collection jusqu'à 21 (en laissant un espace entre les deux collections) en surcomptant de 4 à 21. Il compte alors les objets de la deuxième collection un à un et énonce le résultat : « dix-huit ».



Gérer une diversité de procédures (<3)

► Élève D : »

► l'élève décompte oralement :

« vingt, dix-neuf, dix-huit »,

► il lève un doigt en même temps qu'il énonce chacun des nombres

et s'interrompt après avoir levé trois doigts, symbolisant le nombre d'images de Pierre ;

► il contrôle en regardant sa main et énonce le résultat en répétant le dernier mot-nombre énoncé : « dix-huit ».

► Élève E :

► après avoir dit à haute voix : « vingt et un »,

► l'élève écrit sur sa feuille : « 20, 19, 18 » ;

► il s'interrompt après avoir écrit ces trois nombres et énonce le résultat : « dix-huit ».



20 19 18

Gérer une diversité de procédures (4)

► Élève F :

- l'élève énonce le nombre 3,
- puis il surcompte jusqu'à 21 en écrivant au fur et à mesure les nombres :

il n'aligne pas ces nombres mais les écrit plutôt dans le désordre sur sa feuille.

- Il compte ensuite un à un (avec un peu de difficulté pour parcourir ce qu'il a écrit) le nombre de nombres ainsi écrits et écrit le résultat : « 18 ».

```
4 5 6      10 11
7 8 9 16   12 13 14 15
           17 18
           19 20 21
```

Gérer une diversité de procédures (5)

▶ Élève G

▶ il énonce sur le mode interrogatif : « trois pour aller à vingt et un » ;

▶ il réfléchit un moment puis écrit successivement :

▶ $3 \rightarrow 10 \quad 10 \rightarrow 21$

7 11

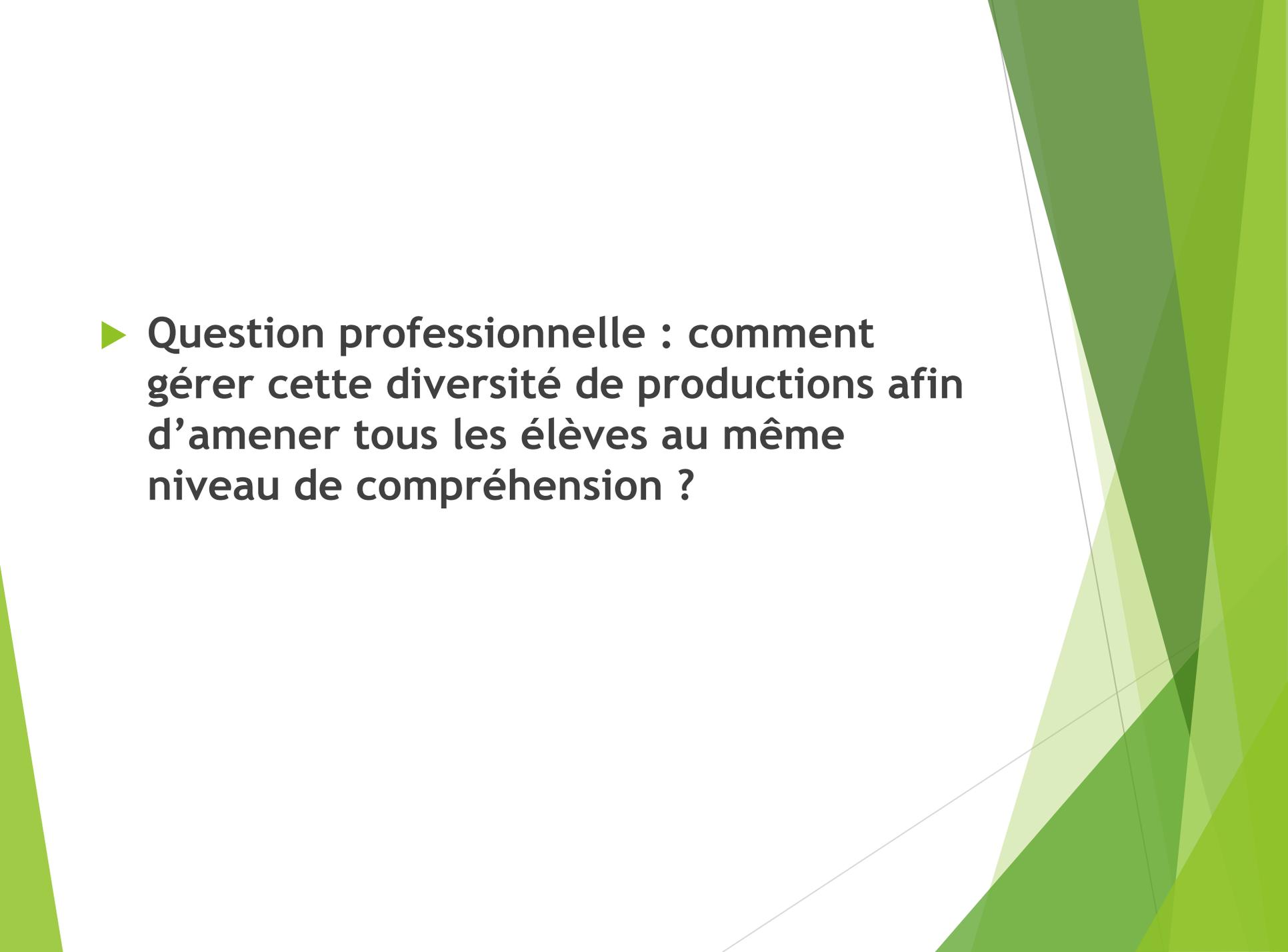
▶ $7 + 11 = 18$ puis il énonce le résultat : « Paul a dix-huit images ».

▶ Élève H :

▶ l'élève dit : « je dois calculer vingt et un moins trois » et il écrit : « $21 - 3 =$ ».

▶ Il commente : « Je ne sais pas calculer directement... je fais vingt et un moins un, vingt » et il écrit : « $21 - 1 = 20$ »,

▶ puis il énonce et écrit de la même façon « $20 - 2 = 18$... comme ça j'ai enlevé trois. ». Et il complète l'écriture soustractive : « $21 - 3 = 18$ ».

- 
- ▶ **Question professionnelle : comment gérer cette diversité de productions afin d'amener tous les élèves au même niveau de compréhension ?**

Mise en œuvre de gestes professionnels

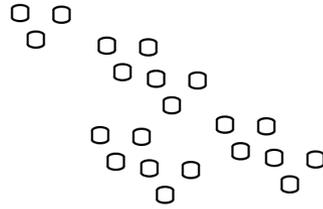
- ▶ **Repérer dans l'action et en temps réel (forcément court) les procédures des élèves et les analyser (ou du moins les « lire ») afin de les classer et les hiérarchiser**
 - ▶ **Classer** : repérer des caractères communs et des filiations
 - ▶ **Hiérarchiser** : repérer les continuités et les ruptures correspondant à des montées (des sauts) en conceptualisation, comparer les procédures en fonction de certains critères (économie, degré de formalisme, etc. °)
- ▶ **Négocier les ruptures en explicitant les filiations, les gains en économie et en conceptualisation et en ménageant des étapes pour certains élèves (en difficulté)**
- ▶ **Cela nécessite des connaissances didactiques: filiation (deux cheminements au moins), hiérarchie (trois catégories), ruptures et étapes.**

Deux filiations traduisant deux cheminements cognitifs

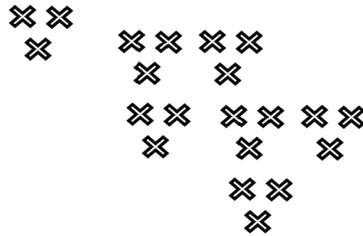
- ▶ On peut distinguer deux catégories de procédures très différentes :
 - ▶ Les procédures « initialisées » (chez l'élève) par des procédures de comptage et **surcomptage**
 - ▶ Les procédures « initialisées » par des procédures de **décomptage**
- ▶ Ces catégories ne **se réduisent pas** l'une à l'autre, leur **non prise en compte** par l'enseignant est **source de difficulté** et de **blocage** pour les élèves.

1. Du comptage à la soustraction en passant par l'écriture additive

- ▶ (1) Élève A (comptage avec des jetons):



- ▶ Élève C (comptage avec dessins de croix):



- ▶ Élève F (comptage et écriture des nombres):

4 5 6 10 11
7 8 9 16 12 13 14 15
 17 18
 19 20 21

1. Du comptage à la soustraction en passant par l'écriture additive (2)

► Élève G (**calcul additif**)

$$\begin{array}{ccc} \blacktriangleright & 3 \rightarrow 10 & 10 \rightarrow 21 \\ & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & 7 & 11 \\ & & \end{array}$$

- $7 + 11 = 18$ puis il énonce le résultat : « Paul a dix-huit images ».

- L'étape suivante consiste à traduire ce calcul additif à l'aide d'une écriture soustractive

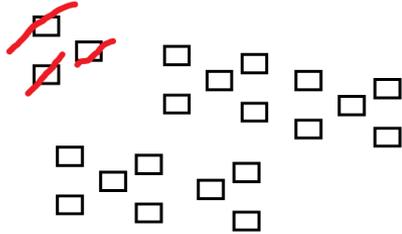
$$21 - 3 = 18$$

L'écriture soustractive permet aux deux cheminements cognitifs de se rejoindre (cas de l'élève H)

- Ces procédures relèvent d'un même cheminement (initialisé par un comptage)

2. Du décomptage à la soustraction (1)

- ▶ Élève B (décomptage avec dessin de la collection):



- ▶ Élève D (décomptage avec recours aux doigts) :



- ▶ Élève E (décomptage avec écriture des nombres):

20 19 18

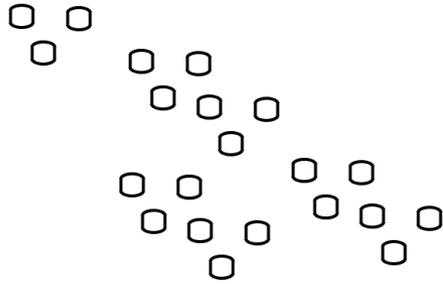
- ▶ Élève H (calcul soustractif et écriture de $21 - 3 = 18$ accompagné d'un calcul par étapes (relevant d'un décomptage))

Une hiérarchie traduisant des niveaux de conceptualisation

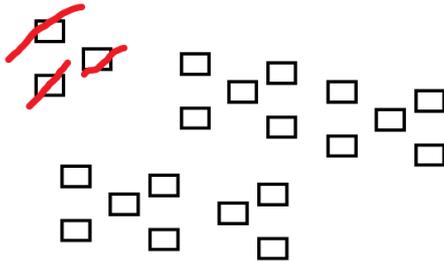
- ▶ Des procédures relevant de trois stratégies
 - ▶ **Stratégie 1.** Les stratégies de dénombrement plutôt élémentaires : comptage, surcomptage ou décomptage, de un en un ou par sauts, etc. ;
 - ▶ **Stratégie 2.** Les stratégies de dénombrement s'appuyant sur des représentations symboliques des collections : représentations diverses, par exemple figuratives ou schématiques, production d'écritures chiffrées ;
 - ▶ **Stratégie 3.** Les stratégies de (ou proches du) calcul, plus ou moins explicitées et formalisées : frise numérique, schémas conventionnels, écritures mathématiques formelles ($c - a = b$) ou plus transitoires ($a + ? = c$ ou $a \square c$).

Stratégie 1 : dénombrement plutôt élémentaire

- ▶ Élève A (comptage):



- ▶ Élève B (décomptage):



- ▶ Elève C (comptage)



Stratégie 2

- ▶ Élève D (décomptage) :



- ▶ Élève E (décomptage):

20 19 18

- ▶ Élève F (comptage):

4 5 6 10 11 12 13 14 15
7 8 9 16 17 18
19 20 21

Stratégie 3

▶ Élève G (**calcul additif**)

▶ $3 \rightarrow 10 \quad 10 \rightarrow 21$

▶ 7 11

▶ $7 + 11 = 18$ puis il énonce le résultat : « Paul a dix-huit images ».

▶ Élève H (**calcul soustractif**):

▶ « $21 - 3 = 18$ ».

Ménager des cheminements cognitifs spécifiques

- ▶ Les élèves peuvent accéder à la connaissance par des chemins différents (certes en nombre relativement limité).
- ▶ Cela est particulièrement vrai pour l'éducation prioritaire
- ▶ Cela nécessite que le professeur :
 - ▶ connaisse ces chemins possibles,
 - ▶ sache les repérer dans l'action,
 - ▶ ménage, en jouant sur des proximités (Robert), des itinéraires spécifiques pour les élèves en ayant besoin
 - ▶ Un exemple est développé dans l'introduction du guide pour le CP

Ménager des étapes : quelques remarques

- ▶ Ces procédures se distinguent par
 - ▶ le type de raisonnement mis en œuvre
 - ▶ le type de dénombrement ou de calcul mobilisé. Ainsi, une procédure s'appuyant sur un **surcomptage** est **différente** d'une autre convoquant un **décomptage**.
- ▶ Elles se distinguent aussi par des ruptures
 - ▶ **passage de la manipulation effective d'objets à la représentation**
 - ▶ **passage d'une collection non organisée à une collection faisant apparaître une partition en deux sous-collections ou une décomposition particulière du ou des nombres.**
 - ▶ **passage d'un dénombrement oral (s'appuyant sur le dessin ou le schéma) à l'écriture de nombres par l'élève.**
 - ▶ **passage de l'écriture additive à l'écriture soustractive et ce, notamment quand il s'agit d'un calcul proche du surcomptage.**

Du surcomptage au calcul, de l'énoncé du résultat à la modélisation (1)

- ▶ **Passage de la manipulation d'objets au surcomptage sur des schémas.**
 - ▶ Le passage d'une production s'appuyant exclusivement sur la manipulation (élève A) à celle s'appuyant sur des dessins de rectangles (élève B) peut se faire par la mise en évidence des points de ressemblance dans la démarche.
 - ▶ Il est possible de favoriser ce saut conceptuel en proposant dans un premier temps des objets physiques de plus en plus simples (images, rectangles de papier, jetons, cubes ou bâtonnets) et adaptés au projet de représentation
 - ▶ puis en épurant progressivement le dessin, du dessin d'images à celui de rectangles (élève B) puis de bâtons ou de croix (élève C).
- ▶ **Passage du surcomptage (oral) à l'écriture des nombres en chiffres.**
 - ▶ Bien que non obligatoire, ce passage peut encourager ensuite le recours à la frise numérique (complète ou non) ou à la ligne numérique (élève F).
 - ▶ Le professeur s'attachera à mettre en relation le dénombrement un à un des objets - et conjointement leur énoncé oral - avec leur écriture chiffrée et l'équivalence entre compter les croix et utiliser les nombres.

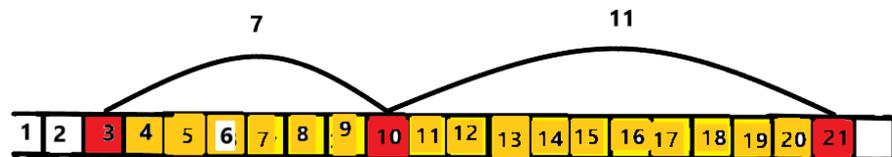
Du surcomptage au calcul, de l'énoncé du résultat à la modélisation (2)

- ▶ Passage du surcomptage s'appuyant sur des écritures chiffrées au surcomptage avec appui sur la frise numérique.
 - ▶ Ce passage est assez naturel dans la mesure où l'écriture en ligne des nombres est proche d'une disposition de ces nombres sur la frise numérique.
 - ▶ Le professeur pourra montrer l'intérêt d'aligner les chiffres 4 5 6 ...20 21 et faire le lien avec la frise numérique (élève F)



Du surcomptage au calcul, de l'énoncé du résultat à la modélisation (3)

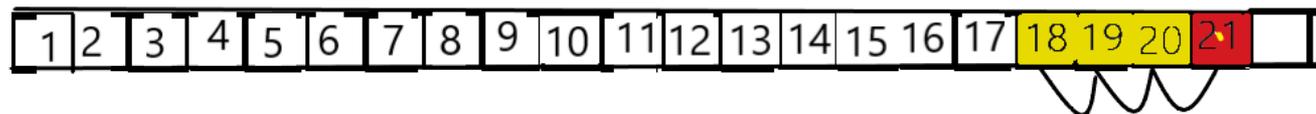
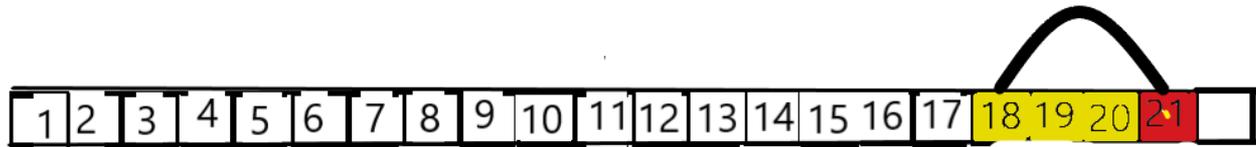
- ▶ Passage du surcomptage sur la frise numérique à celui d'un calcul par bonds sur cette frise numérique ou sur une ligne numérique.
 - ▶ Ce passage devient plus naturel et permet d'explicitier la procédure mise en œuvre par l'élève G.
 - ▶ Cela peut impliquer soit un appui sur une ligne numérique présentant les différentes étapes (bonds), soit l'introduction de notations semblables à celles employées par l'élève G et leur traduction en une écriture additive.



- ▶ Passage du calcul sur la frise numérique ou sur une ligne numérique à des procédures faisant intervenir des écritures formelles.
 - ▶ Ce passage sera fait progressivement en s'appuyant sur une automatisation progressive des faits numériques associés.

Du décomptage au calcul

- ▶ Un autre cheminement va consister à optimiser progressivement les procédures de décomptage pour déboucher sur des procédures de calculs se traduisant par des écritures soustractives.
- ▶ Les différentes étapes sont analogues à celles proposées pour aller du surcomptage au calcul.
- ▶ Par exemple, pour le passage de la procédure mise en œuvre par l'élève D à celle mise en œuvre par l'élève E, il suffit de montrer que le recours au comptage auxiliaire sur les doigts peut être remplacé par le comptage du nombre d'écritures chiffrées inscrites.
- ▶ Pour atteindre la proposition de l'élève H, il est possible de passer p



- ▶ Ces deux cheminements cognitifs sont **différents**, ils ne peuvent **pas se réduire l'un à l'autre**
- ▶ même s'ils mobilisent des outils identiques (comptage sur les doigts, écritures chiffrées, frise numérique, etc.) et présentent des étapes semblables (en termes de montée en abstraction).
- ▶ Ils se différencient par les **faits numériques**, les **écritures** et les **opérations mobilisées**

Traitement de l'erreur

Un exemple

Sous-groupes du primaire

Production A

Gaston a deux chats.
Le plus vieux a 4 ans et le plus jeune a 10 mois.
Quelle est la différence d'âge, en mois, entre les deux chats de Gaston?

Traces de la démarche

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 12 \\ \hline 48 \\ + 40 \\ \hline 88 \end{array}$$

✓

Verification

$$\begin{array}{r} 4 \\ + 6 \\ \hline 10 \end{array}$$

Réponse : La différence d'âge entre les deux chats de Gaston est de 10 mois. ✓

© 2001, Les Éditions CEC inc., reproduction autorisée, Adagio

Production B

Gaston a deux chats.
Le plus vieux a 4 ans et le plus jeune a 10 mois.
Quelle est la différence d'âge, en mois, entre les deux chats de Gaston?

Traces de la démarche

12 mois = 1 année

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 12 \\ \hline 48 \\ + 40 \\ \hline 88 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ - 10 \\ \hline 38 \end{array}$$

Réponse : La différence d'âge entre les deux chats de Gaston est de 38 mois. ✓

Production d'élèves de 3^e (Québec)

Gaston a deux chats.
Le plus vieux a 4 ans et le plus jeune a 10 mois.
Quelle est la différence d'âge, en mois, entre les deux chats de Gaston?

Traces de la démarche

Gaston plus vieux 4 ans
2 chats
plus jeune 10 mois

$$\begin{array}{r} 10 \text{ mois} \\ - 4 \text{ ans} \\ \hline 6 \text{ mois} \end{array}$$

4 ans = 48 mois
10 mois = 10 mois

$$\begin{array}{r} 48 \text{ mois} \\ - 10 \text{ mois} \\ \hline 38 \end{array}$$

Réponse : La différence d'âge entre les deux chats de Gaston est de 6 mois. ✓

20.04.21

Institutionnalisation

Deux modalités d'institutionnalisation (1)

- ▶ Un premier exemple de gestion des phases de synthèse et d'institutionnalisation :
 - ▶ Lire en temps réel les procédures des élèves, les classer et les hiérarchiser
 - ▶ Exposer une synthèse hiérarchisée en s'appuyant sur les verbalisations des élèves
 - ▶ Développer un texte du savoir, expliciter les savoirs attendus
- ▶ Un deuxième exemple : jouer sur une dialectique entre mémoire individuelle de l'élève et mémoire collective de la classe

Des modalités d'institutionnalisation (2)

- ▶ L'enseignant joue sur un **cahier personnel** et un **cahier de la classe** (affichage)
- ▶ Le cahier personnel pourra comporter
 - ▶ la procédure mise en œuvre **par l'élève**
 - ▶ La procédure **du professeur**
 - ▶ Une (des) **procédure(s) proche(s)** de celle-ci mais plus économique(s)
- ▶ Le cahier de la classe pourra de manière synthétique **traduire les étapes des cheminements cognitifs exposés** ci-dessus afin de garder une mémoire collective des productions de la classe et permettre à chaque élève de s'y retrouver
 - ▶ **Exemples des cheminements avec des étapes hiérarchisées** (procédures produites par les élèves ou introduites par l'enseignant si besoin)
 - ▶ **La (les) procédure(s) attendue(s)**