PROBLÈME I

De superbes suites

Dans ce problème, on considère des suites finies $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ d'entiers strictement positifs, où n est un entier supérieur ou égal à 2, appelé *longueur* de la suite finie.
On dit qu'une suite finie d'entiers strictement positifs est *superbe* si chacun de ses termes divise la somme de tous les termes.
Par exemple, la suite $(1,2,1,2,1,2,1,2)$ est superbe de longueur 8 car $1+2+1+2+1+2+1+2=12$, qui est divisible par 1 et par 2 ; la suite $(3,3,6,12)$ est superbe de longueur 4 car la somme des termes vaut 24, qui est multiple de 3, 6, 12.

1° Déterminer les entiers strictement positifs b tels que la suite $(21,7,b)$ soit superbe.

2° a) Déterminer les suites superbes de longueur 2, puis celles de longueur 3.

b) Déterminer les suites superbes de longueur 4 et dont la somme des termes vaut 2013.

3° a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 3$, il existe une suite superbe de longueur n dont les termes sont tous distincts.

b) Montrer que, si $n \geqslant 2$, il n'existe pas de suite superbe de longueur n dont les termes sont des nombres premiers tous distincts.

4° Soit $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ une suite arithmétique finie de raison strictement positive.
Montrer que si cette suite est superbe alors $n = 3$.

5° On dit qu'une suite (infinie) $(a_k)_{k\geqslant 1}$ d'entiers strictement positifs est *magnifique* si, pour tout entier $n \geqslant 2$, la suite finie $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est superbe.
Déterminer les suites magnifiques $(a_k)_{k\geqslant 1}$ vérifiant $a_k < a_{k+1}$ pour tout entier $k \geqslant 2$.

6° Soit n un entier supérieur ou égal à 4, et soit $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ une suite finie, pas forcément superbe, d'entiers strictement positifs tous distincts.

a) Montrer qu'il est possible de prolonger la suite de façon à obtenir une suite superbe.

b) Montrer qu'il est possible de prolonger la suite de façon à obtenir une suite superbe dont les termes sont tous distincts.

PROBLÈME II

Tiré à quatre épingles

1° Dans l'espace, soit D_1, D_2 deux droites non coplanaires et soit M un point n'appartenant ni à D_1 ni à D_2. Montrer qu'il existe au plus une droite passant par M et coupant à la fois D_1 et D_2. Dans quel cas n'en existe-t-il aucune ?

L'espace étant muni d'un repère orthonormé, soit $ABCDEFGH$ le cube dont les sommets ont pour coordonnées $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(1,1,0)$, $D(0,1,0)$, $E(0,0,1)$, $F(1,0,1)$, $G(1,1,1)$, $H(0,1,1)$. Soit respectivement D_1, D_2 et D_3 les droites (EF), (BC) et (DH).
Enfin, soit $\mathscr{S}$ l'ensemble des points de coordonnées $M(x, y, z)$ tels que

$$xy + yz + zx - (x + y + z) + 1 = 0.$$

2° Donner une représentation paramétrique de chacune des droites D_1, D_2 et D_3.

3° Montrer que les droites D_1, D_2 et D_3 sont incluses dans $\mathscr{S}$.

4° Montrer que toute droite de l'espace non incluse dans $\mathscr{S}$ rencontre $\mathscr{S}$ en 0, 1 ou 2 points.

5° En déduire que toute droite coupant les droites D_1, D_2 et D_3 est incluse dans $\mathscr{S}$.

6° Soit D_4 une droite qui ne rencontre aucune des droites D_1, D_2, D_3 et qui n'est pas incluse dans $\mathscr{S}$.
Montrer qu'il existe au plus deux droites de l'espace coupant les quatre droites D_1, D_2, D_3, D_4.

PROBLÈME III

Il faut passer les premiers

Pour ce problème, on donne la liste des vingt-cinq nombres premiers inférieurs à 100 :

$$2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97.$$

Pour faire une réussite, Sisyphe a dessiné au sol 106 cases numérotées de 0 à 105, et il dispose d'un jeton et d'un dé à six faces (équilibré).
Sisyphe commence la réussite en posant le jeton sur la case 0. Il fait ensuite une série de lancers du dé ; lorsque le dé affiche la valeur k, il avance le jeton de k cases et :
- s'il atteint ou dépasse la case numéro 100, Sisyphe a gagné ;
- s'il arrive à une case dont le numéro est un nombre premier inférieur à 100, Sisyphe a perdu ;
- dans les autres cas, Sisyphe relance le dé et continue la réussite.

1° Dans cette question, on suppose que Sisyphe recommence une réussite lorsqu'il a perdu.
On note p_n la probabilité de gagner au moins une réussite en au plus n lancers du dé.

a) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles $p_n > 0$.

b) Étudier la convergence de la suite (p_n).

Dans la suite du problème, Sisyphe ne recommence plus la réussite s'il perd.
Soit X la variable aléatoire représentant la position du jeton à la fin de la réussite.
On note $P(X = k)$ la probabilité de l'événement $X = k$.

2° a) Déterminer $P(X = 2)$, $P(X = 3)$, $P(X \geqslant 4)$, $P(X = 5)$.

b) Proposer un algorithme pour calculer $P(X = k)$ pour tout $k \in \{0, \ldots, 105\}$.

3° Muni d'une calculatrice qui n'est pas assez performante pour exécuter l'algorithme précédent, Sisyphe cherche à estimer sa probabilité de gain. Pour cela, étant donné deux nombres premiers consécutifs $p < p'$, il considère α_p la probabilité conditionnelle de l'événement $X = p'$ sachant l'événement $X > p$.

a) Que valent α_2 et α_3 ?

b) Donner l'expression de la probabilité de gain, $P(G) = P(X \geqslant 100)$, en fonction des nombres réels α_p pour $p = 2,\ 3,\ 5, \ldots$

c) Donner un encadrement des nombres α_p et en déduire un encadrement de $P(G)$. (Dans cette question, la qualité de l'encadrement sera un élément d'appréciation.)

*   *
*