CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

—

SESSION 2019

—

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES SERIE S

(Classes de terminale S)

Durée : 5 heures

—

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.
La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Le sujet comporte trois problèmes indépendants.
Le candidat peut traiter les questions dans l'ordre de son choix, à condition de l'indiquer clairement dans la copie.

Consignes aux candidats

- **Ne pas utiliser d'encre claire**
- **N'utiliser ni colle, ni agrafe**
- **Numéroter chaque page en bas à droite (numéro de page / nombre total de pages)**
- **Sur chaque copie, renseigner l'en-tête + l'identification du concours :**

Concours / Examen : CGL **Section/Spécialité/Série : MATHS**

Epreuve : 101 **Matière : MATH** **Session : 2019**

Tournez la page S.V.P.

Problème 1 : Ensembles remarquables de fonctions

On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des fonctions définies sur $[0, +\infty[$ et à valeurs dans $[0, +\infty[$.

Pour f et g dans $\mathscr{P}$, on définit la fonction $h = f \circ g$ en posant, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$,

$$h(x) = f\big(g(x)\big).$$

Si, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, on a $f(x) \geqslant g(x)$, on note $f \geqslant g$.

On note u et v les fonctions de $\mathscr{P}$ définies, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, par

$$u(x) = e^x - 1 \text{ et } v(x) = \ln(x+1).$$

La fonction f est une *fonction polynomiale* si f est nulle ou s'il existe un entier $d \geqslant 0$ et des nombres réels $a_0, a_1, \dots, a_d$ avec $a_d \neq 0$ tels que, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$,

$$f(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Les nombres réels $a_0, a_1, \dots, a_d$ sont alors appelés coefficients de la fonction polynomiale f.

Si $\mathscr{S}$ est un ensemble de fonctions de $\mathscr{P}$, on définit les propriétés :

(P1) $\mathscr{S}$ contient u et v.

(P2) $\mathscr{S}$ contient toutes les fonctions constantes positives.

(P3) Si f et g sont dans $\mathscr{S}$, alors $f + g$ est dans $\mathscr{S}$.

(P4) Si f et g sont dans $\mathscr{S}$, alors $f \circ g$ est dans $\mathscr{S}$.

(P5) Si f et g sont dans $\mathscr{S}$ avec $f \geqslant g$, alors $f - g$ est dans $\mathscr{S}$.

(P6) Si f et g sont dans $\mathscr{S}$, alors $f \times g$ est dans $\mathscr{S}$.

1) Soit $\mathscr{T}$ un ensemble de fonctions de $\mathscr{P}$ qui vérifie les propriétés **(P1)**, **(P2)**, **(P3)**, **(P4)**, **(P5)** et **(P6)**.
   a) Soit ℓ la fonction définie, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, par $\ell(x) = x$. Démontrer que la fonction ℓ est dans $\mathscr{T}$.
   b) Déterminer toutes les fonctions affines qui sont dans $\mathscr{T}$.
   c) Soit p la fonction polynomiale définie, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, par $p(x) = 2x^2 - 3x + 4$. Démontrer que la fonction p est dans $\mathscr{T}$.
   d) Une fonction polynomiale de $\mathscr{P}$ est-elle toujours dans $\mathscr{T}$?
2) Dans cette question, on suppose que $\mathscr{U}$ est un ensemble de fonctions de $\mathscr{P}$ qui vérifie les propriétés **(P1)**, **(P2)**, **(P3)**, **(P4)** et **(P5)**, mais on ne suppose pas qu'il vérifie la propriété **(P6)**. La réponse donnée à la question d) est-elle encore valable ?
3) Dans cette question, on suppose que $\mathscr{V}$ est un ensemble de fonctions de $\mathscr{P}$ qui vérifie les propriétés **(P1)**, **(P2)**, **(P4)**, **(P5)** et **(P6)**, mais on ne suppose pas qu'il vérifie la propriété **(P3)**.
   a) Soit d un entier naturel non nul. On note Q_d la fonction définie, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, par

   $$Q_d(x) = (x+1)^d - 1.$$

   Montrer que $Q_d \in \mathscr{V}$.
   b) Soit d un entier naturel non nul. Démontrer qu'il existe des nombres entiers $a_1, \dots, a_d$ supérieurs ou égaux à 1 tels que, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$,

   $$(x+1)^d = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \cdots + a_1 x + 1.$$

   Étant donné un nombre réel $x \geqslant 0$, on introduira une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres d et $\dfrac{x}{1+x}$.

c) Soit f une fonction polynomiale telle que $f(0)=0$. Montrer qu'il existe un nombre réel $c \geqslant 0$ et un entier naturel non nul d tels que la fonction qui, à tout nombre réel $x \geqslant 0$, associe

$$c(x+x^2+\cdots+x^d)-f(x)$$

est une fonction polynomiale dont tous les coefficients sont positifs ou nuls.

d) En déduire que, si f est une fonction polynomiale de $\mathscr{P}$ telle que $f(0)=0$, alors f est dans $\mathscr{V}$.

e) Soit f une fonction dans $\mathscr{P}$.

- On dit que f est *segmentée* si elle vérifie la propriété :
  pour tout nombre réel $a \geqslant 0$, il existe un nombre réel $b \geqslant 0$ tel que, pour tout x vérifiant $0 \leqslant x \leqslant a$,
  $$0 \leqslant f(x) \leqslant b.$$
- On dit que f est *bornée* si elle vérifie la propriété :
  il existe un nombre réel $b \geqslant 0$ tel que pour tout nombre réel $x \geqslant 0$,
  $$0 \leqslant f(x) \leqslant b.$$

On note alors $\mathscr{A}$ l'ensemble des fonctions segmentées et $\mathscr{B}$ l'ensemble des fonctions segmentées qui sont nulles en 0 ou bornées.

i. Soit f une fonction dans $\mathscr{P}$. On suppose f bornée. Démontrer que f est segmentée. La réciproque est-elle vraie ?

ii. Montrer que $\mathscr{A}$ satisfait les propriétés **(P1)** à **(P6)**.

iii. Montrer que $\mathscr{B}$ satisfait les propriétés **(P1)**, **(P2)**, **(P4)**, **(P5)** et **(P6)**, mais ne satisfait pas la propriété **(P3)**.

f) Une fonction polynomiale dans $\mathscr{P}$ est-elle nécessairement dans $\mathscr{V}$?

Problème 2 : Les nombres joviaux

Soient n et p deux entiers tels que $p \geqslant 2$ et $n \geqslant 1$. On dit que p est *jovial d'ordre n* s'il existe des entiers $a_1, \dots, a_n$ tels que

$$2 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_n \quad , \quad a_n = p \quad \text{et} \quad \frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}=1.$$

Ainsi, 12 est jovial d'ordre 4 car $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=1$.

Un entier $p \geqslant 2$ est dit *jovial* s'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que p soit jovial d'ordre n.

I – Quelques exemples

1) Montrer que, si l'entier p est jovial d'ordre n, alors $n \leqslant p-1$.
2) Existe-t-il des entiers joviaux d'ordre 2 ? Montrer que 2 et 4 ne sont pas joviaux.
3) Montrer qu'un entier premier n'est pas jovial.
4) Quel est le plus petit entier jovial ?
5) Déterminer tous les entiers joviaux d'ordre 3.
6) Soit p un entier jovial. Montrer que $2p$ et $p\left(p+1\right)$ sont joviaux.
7) Montrer que le produit de deux entiers joviaux est jovial.

II – Deux suites d'entiers

On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $u_1=1$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$v_n = 1+u_n \quad \text{et} \quad u_{n+1}=u_n(1+u_n).$$

1) Montrer, pour tout $n \geqslant 3$, que u_n est un entier jovial d'ordre n.
2) Montrer, pour tout $n \geqslant 1$, que $v_{n+1} = v_1\, v_2 \cdots v_n + 1$.

Tournez la page S.V.P.

III – Un majorant optimal pour les nombres joviaux d'ordre fixé.

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathscr{H}_n$ la propriété suivante :

si $x_1, \ldots, x_n$ sont des entiers strictement positifs et a un nombre rationnel strictement positif tels que

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant a \quad \text{et} \quad \frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} + \frac{1}{a} = 1,$$

alors $a + 1 \leqslant v_{n+1}$ et $x_1 \cdots x_n (a+1) \leqslant v_1 \cdots v_n v_{n+1}$.
On se propose de démontrer par récurrence sur n que la propriété $\mathscr{H}_n$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

1) Démontrer que la propriété $\mathscr{H}_1$ est vraie.

Dans les questions suivantes, on considère un entier $n \geqslant 2$, et on suppose que la propriété $\mathscr{H}_{n-1}$ est vraie. On considère des entiers strictement positifs $x_1, \ldots, x_n$ et un nombre rationnel strictement positif a tels que

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant a \quad \text{et} \quad \frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} + \frac{1}{a} = 1.$$

2) Montrer que $x_1 \geqslant 2$ et que $a \leqslant x_1 x_2 \cdots x_n$.
3) On suppose dans cette question que $\dfrac{1}{x_1} + \cdots + \dfrac{1}{x_{n-1}} + \dfrac{1}{x_n - 1} \geqslant 1$ et que $x_n > x_{n-1}$.
   a) Montrer qu'il existe un unique nombre rationnel q, strictement positif, tel que
   $$\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{q} = 1.$$
   b) Montrer que $x_n - 1 \leqslant q$.
   c) En déduire que $q + 1 \leqslant v_n$ puis que $x_1\, x_2 \cdots x_n \leqslant v_1\, v_2 \cdots v_n$.
   d) En déduire que $a + 1 \leqslant v_{n+1}$ et $x_1 \cdots x_n (a+1) \leqslant v_1 \cdots v_n v_{n+1}$.
4) On suppose dans cette question que $\dfrac{1}{x_1} + \cdots + \dfrac{1}{x_{n-1}} + \dfrac{1}{x_n - 1} \geqslant 1$ et que $x_n = x_{n-1}$.
   a) Montrer que $x_n \geqslant 4$.
   b) Montrer qu'il existe deux uniques nombres rationnels, strictement positifs, r et t tels que
   $$\frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_n - 1} = \frac{1}{x_n - 2} + \frac{1}{r} \quad \text{et} \quad \frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_{n-2}} + \frac{1}{x_n - 2} + \frac{1}{t} = 1.$$
   c) Montrer que $r = x_n + 1 + \dfrac{4x_n - 2}{x_n^2 - 4x_n + 2}$ puis que $(x_n - 2)(r+1) \geqslant x_n^2$.
   d) Montrer que $t \geqslant r \geqslant x_n$.
   e) En déduire que $a + 1 \leqslant v_{n+1}$ et $x_1 \cdots x_n (a+1) \leqslant v_1 \cdots v_n v_{n+1}$.
5) On suppose dans cette question que $\dfrac{1}{x_1} + \cdots + \dfrac{1}{x_{n-1}} + \dfrac{1}{x_n - 1} < 1$.
   a) Montrer qu'il existe un unique nombre rationnel, strictement positif, b tel que
   $$\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_n - 1} + \frac{1}{b} = 1.$$
   b) Montrer que $(x_n - 1)(b+1) \geqslant x_n (a+1)$.
6) En déduire que la proposition $\mathscr{H}_n$ est vraie.
   Indication : dans le cas où
   $$\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_n - 1} < 1,$$
   on pourra chercher à remplacer x_n par $x_n - 1$ et a par b.
7) Montrer, pour tout entier $n \geqslant 3$, que u_n est le plus grand entier jovial d'ordre n.

Problème 3 : Plus d'une chance sur deux pour tout le monde

I – Des urnes et des dés

1) Dans cette question, on suppose que l'on dispose de trois urnes A, B et C qui contiennent chacune quatre jetons indiscernables au toucher. Les jetons de A portent les numéros 12, 10, 3 et 1, ceux de B portent les numéros 9, 8, 7 et 2, et ceux de C portent les numéros 11, 6, 5 et 4.

   On tire indépendamment un jeton dans chacune des trois urnes, et on note respectivement X_A, X_B et X_C les numéros des jetons tirés dans A, B et C.

   Montrer que $P(X_A > X_B) = \dfrac{9}{16}$ et que $P(X_B > X_C) = \dfrac{9}{16}$. Que vaut $P(X_C > X_A)$?

2) Dans cette question, on suppose que l'on dispose de trois dés cubiques et équilibrés D_1, D_2 et D_3. Les faces de D_1 portent les numéros $6,3,3,3,3,3$, celles de D_2 portent les numéros $5,5,5,2,2,2$, et celles de D_3 portent les numéros $4,4,4,4,4,1$.

   a) On lance indépendamment chacun de ces trois dés et on note respectivement X_1, X_2 et X_3 les numéros indiqués par la face supérieure des dés D_1, D_2 et D_3.
      Calculer les trois probabilités $P(X_1 > X_2), P(X_2 > X_3)$ et $P(X_3 > X_1)$.

   b) Claire et Paul jouent au jeu suivant : l'un d'eux choisit un des trois dés. Puis l'autre joueur choisit un des deux dés restants. Ils lancent chacun leur dé et celui qui obtient le plus grand numéro gagne.
      Claire a-t-elle intérêt à choisir son dé avant Paul ou à le laisser choisir en premier ?

   c) Finalement, il est décidé que c'est Paul qui choisit en premier. Quel(s) dé(s) a-t-il intérêt à choisir ?

   d) Claire et Paul décident alors de modifier les règles. L'un d'eux choisit un des trois dés. Puis l'autre joueur choisit un des deux dés restants. Ils lancent chacun leur dé deux fois de suite et celui dont la somme des numéros est la plus grande gagne.
      Paul choisit en premier et il prend le dé D_2. Quel dé Claire a-t-elle intérêt à choisir ?
      De façon générale, avec ces nouvelles règles, Claire a-t-elle intérêt à choisir son dé avant Paul ou à le laisser choisir en premier ?

II – La suite de Fibonacci et des urnes

La *suite de Fibonacci* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

1) Montrer, pour tout entier $n \geqslant 3$, que $\sqrt{2}F_n < F_{n+1} < 2F_n$.

2) Soit $k \geqslant 4$ un entier. Dans cette question, on suppose que l'on dispose de trois urnes A, B et C ainsi que de $3F_k$ jetons indiscernables au toucher, numérotés de 1 à $3F_k$. On répartit ces jetons de la façon suivante :
   - les F_{k-2} jetons de plus grands numéros sont placés dans A ;
   - les F_{k-1} jetons de plus grands numéros restants sont placés dans B ;
   - les F_k jetons de plus grands numéros restants sont placés dans C ;
   - les F_{k-1} jetons de plus grands numéros restants sont placés dans A ;
   - les F_{k-2} derniers jetons sont placés dans B.

   On tire indépendamment un jeton dans chacune des trois urnes, et on note respectivement X_A, X_B et X_C les numéros des jetons tirés dans A, B et C.

   a) Démontrer les trois inégalités :

$$P(X_A > X_B) > \frac{1}{2},\ P(X_B > X_C) > \frac{1}{2}\ \text{ et } P(X_C > X_A) > \frac{1}{2}.$$

b) Claire et Paul jouent au jeu suivant : l'un commence par choisir une des trois urnes ci-dessus et pioche un des jetons qu'elle contient. Puis l'autre joueur choisit une des deux autres urnes et pioche un des jetons qu'elle contient. Celui des deux qui obtient le jeton de plus grand numéro gagne.

Claire a-t-elle intérêt à choisir son dé avant Paul ou à le laisser choisir en premier ?

III – Urnes non transitives

Soit $n \geqslant 3$ un entier. On dispose de trois urnes A, B et C et de $3n$ jetons indiscernables au toucher, numérotés de 1 à $3n$. On répartit alors les jetons dans les trois urnes de sorte que chaque urne contienne n jetons. On tire alors indépendamment un jeton dans chacune des trois urnes, et on note respectivement X_A, X_B et X_C les numéros des jetons tirés dans A, B et C.

1) On suppose, dans cette question uniquement, que chacune des trois probabilités $P(X_A > X_B)$, $P(X_B > X_C)$ et $P(X_C > X_A)$ est strictement supérieure à $\frac{1}{2}$.

   On dispose de trois autres urnes, D, E et F et de $3n+6$ jetons indiscernables au toucher, numérotés de 1 à $3n+6$. Les $3n$ jetons numérotés de 1 à $3n$ ont été répartis comme précédemment dans les urnes A, B et C. Les urnes D, E et F sont alors remplies de la façon suivante :

   - l'urne D reçoit le contenu de l'urne A, ainsi que les jetons numérotés $3n+1$ et $3n+6$;
   - l'urne E reçoit le contenu de l'urne B, ainsi que les jetons numérotés $3n+4$ et $3n+5$;
   - l'urne F reçoit le contenu de l'urne C, ainsi que les jetons numérotés $3n+2$ et $3n+3$.

   Chacune des urnes D, E et F contient ainsi $n+2$ jetons. On tire alors indépendamment un jeton dans chacune des urnes D, E et F, et on note respectivement X_D, X_E et X_F les numéros des jetons tirés dans D, E et F.

   a) Exprimer $P(X_D > X_E)$ en fonction de n et $P(X_A > X_B)$.
   b) Montrer que chacune des probabilités $P(X_D > X_E)$, $P(X_E > X_F)$ et $P(X_F > X_D)$ est strictement supérieure à $\frac{1}{2}$.

2) Soit $n \geqslant 3$ un entier. On note $\mathscr{H}_n$ la propriété suivante :

   Il est possible de répartir $3n$ jetons indiscernables au toucher, numérotés de 1 à $3n$, dans trois urnes A, B et C de sorte que les deux conditions ci-dessous soient satisfaites.

   - Chacune des trois urnes contient n jetons.
   - Si l'on tire indépendamment un jeton dans chacune de ces urnes et si l'on note respectivement X_A, X_B et X_C les numéros des jetons tirés dans A, B et C, alors chacune des probabilités $P(X_A > X_B)$, $P(X_B > X_C)$ et $P(X_C > X_A)$ est strictement supérieure à $\frac{1}{2}$.

   a) Montrer que les propriétés $\mathscr{H}_3$ et $\mathscr{H}_4$ sont vraies.
   b) Montrer, pour tout entier $n \geqslant 3$, que l'affirmation $\mathscr{H}_n$ est vraie.

IMPRIMERIE NATIONALE – 19 0416 – D'après documents fournis