MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE,
DE LA JEUNESSE
ET DES SPORTS

Liberté
Égalité
Fraternité

VOIE GÉNÉRALE

2DE | 1RE | TLE

Numérique et sciences informatiques

ENSEIGNEMENT SPÉCIALITÉ

GÉNÉRALITÉS SUR LES GRAPHES

Introduction

Les *graphes* ont été introduits pour la première fois en 1735 par le mathématicien suisse Leonhard Euler (Bâle, 1707 - Saint-Pétersbourg, 1783) afin de répondre au problème suivant, dit « Problème des sept ponts de Königsberg ».

Problème (problème des sept ponts de Königsberg)

En 1736, la ville de Königsberg (actuelle Kaliningrad en Russie) est construite autour de deux îles situées sur la Pregel et reliées entre elles par un pont. Six autres ponts relient les rives de la rivière à l'une ou l'autre des deux îles comme représentés sur la figure ci-dessous.

(a) Plan de la ville de Königsberg

(b) Plan schématique des ponts de Königsberg

FIGURE 1 – Les sept ponts de Königsberg

Les habitants se demandaient s'il existe ou non une promenade dans les rues de Königsberg permettant, à partir d'un point de départ au choix, de passer une et une seule fois par chaque pont et de revenir à son point de départ, étant entendu qu'on ne peut traverser la Pregel qu'en passant sur les ponts.

À partir de cette date, une *théorie des graphes* a été progressivement construite afin de répondre à des problèmes de plus en plus complexes. Plusieurs grands noms de mathématiciens y sont associés : Alexandre-Théophile Vandermonde, Pierre Rémond de Montmort, Abraham de Moivre, Thomas Kirkman, William Rowan Hamilton, Julius Petersen, etc.

Au milieu du XIXème siècle, le mathématicien britannique Arthur Cayley (Richmond, 1821 - Cambridge, 1895) s'intéressa à une classe particulière de graphes : les *arbres*. Celle-ci fut abondamment étudiée ensuite à partir de 1937 grâce aux travaux du mathématicien hongrois George Polya (Budapest, 1887 - Palo Alto, 1985).

Aujourd'hui, les graphes font partie des objets fondamentaux en algorithmique, en informatique et en mathématiques. En effet, leur *structure relationnelle* intrinsèque leur permet de modéliser naturellement de très nombreux problèmes dans des domaines variés, comme :

- les réseaux de communications ;
- les réseaux routiers ;
- la gestion de stocks et/ou de production ;
- la logistique ;
- la bio-informatique ;
- les optimisations de chemins ;
- la gestion des ressources mémoires d'un ordinateur ;
- les structures de données ;
- l'algorithmique multithread ;
- le web ;
- le routage sur internet ;
- les réseaux sociaux ;
- le traitement automatique des langues ;
- ...

Rappel

En mathématiques, on appelle :

- *ensemble* une collection non ordonnée d'éléments distincts deux à deux ;
- *multi-ensemble* une collection non ordonnée d'éléments pouvant apparaître plusieurs fois.

Par exemple :

- $\{a; b; c\}$ et $\{a; c; b\}$ sont deux ensembles identiques ;
- $\{a; a; b; c; b; b\}$ et $\{a; a; b; b; b; c\}$ sont deux multi-ensembles identiques.

Bien sûr, si un multi-ensemble n'a que des éléments distincts deux à deux, alors c'est aussi un ensemble.

Définitions et exemples

Graphes non orientés

Définition

On appelle *graphe non orienté* la donnée d'un ensemble $G = (S, A)$, où S est un ensemble fini d'éléments appelés *sommets*, et où A est un multi-ensemble de paires *non ordonnées* d'éléments de S appelées *arêtes*.

Remarques

- Le nombre de sommets est appelé *l'ordre* du graphe et le nombre d'arêtes est appelé la *taille* du graphe.
- Dans une représentation graphique, les sommets sont représentés par des cercles et les arêtes par des traits.
- Une arête entre deux sommets u et v est notée indifféremment par le couple (u, v) ou par le couple (v, u).
- Une arête reliant un sommet à lui-même est appelée une *boucle*.
- Deux sommets peuvent être reliés par plusieurs arêtes.
- Si le graphe n'a pas de boucle et a au plus une arête entre deux sommets quelconques, on parle de *graphe simple non orienté*. Dans le cas contraire, on parle de *multi-graphe non orienté* ou de *pseudo-graphe non orienté*.

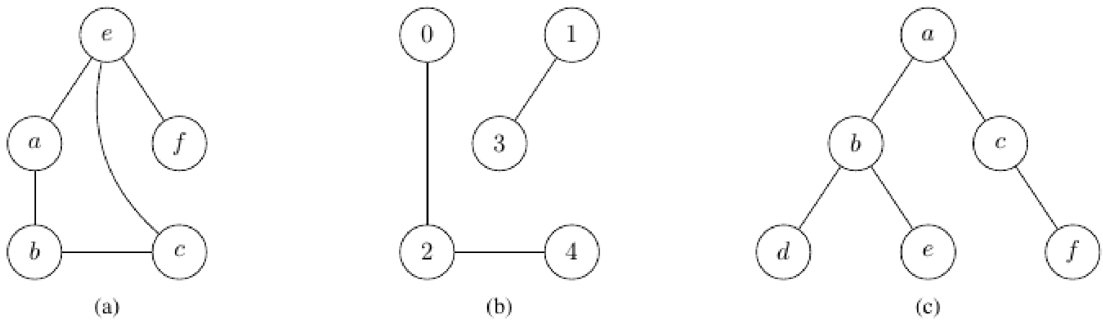


FIGURE 2 – Exemples de graphes non orientés

Exemple

Dans le graphe non orienté $G = (S, A)$ de la figure 2a, on a : $S = \{a; b; c; e; f\}$ et $A = \{(a, b); (a, e); (b, c); (c, e); (e, f)\}$

Exercice 1

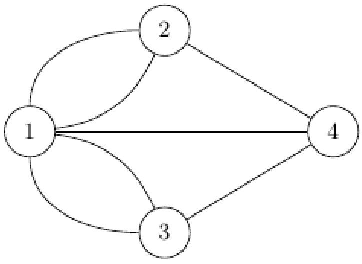
Décrire la structure du graphe de la figure 2b comme dans l'exemple. Quelle est la particularité de ce graphe ?

Exercice 2

Décrire la structure du graphe de la figure 2c comme dans l'exemple. Quelle est la particularité de ce graphe ?

Exercice 3

Un graphe possible permettant de modéliser le problème des sept ponts de Königsberg (voir problème) est le suivant :



Décrire la structure de ce graphe comme dans l'exemple. Que représentent les sommets et les arêtes de ce graphe ?

Que recherche-t-on sur ce graphe pour répondre au problème posé ?

Graphes orientés

Définition

On appelle *graphe orienté* la donnée d'un ensemble $G = (S, A)$, où S est un ensemble fini d'éléments appelés *sommets*, et où A est un multi-ensemble de paires *ordonnées* d'éléments de S appelées $arcs$.

Remarques

- Le nombre de sommets est appelé l'*ordre* du graphe et le nombre d'arcs est appelé la *taille* du graphe.
- Dans une représentation graphique, les sommets sont représentés par des cercles et les arcs par des flèches.
- Un arc partant d'un sommet u et arrivant à un sommet v est noté par le couple (u, v).
- Un arc reliant un sommet à lui-même est appelé une *boucle*.
- Deux sommets peuvent être reliés par plusieurs arcs.
- Si le graphe n'a pas de boucle et a au plus un arc entre deux sommets quelconques, on parle de *graphe simple orienté*. Dans le cas contraire, on parle de *multi-graphe orienté* ou de *pseudo-graphe orienté*.

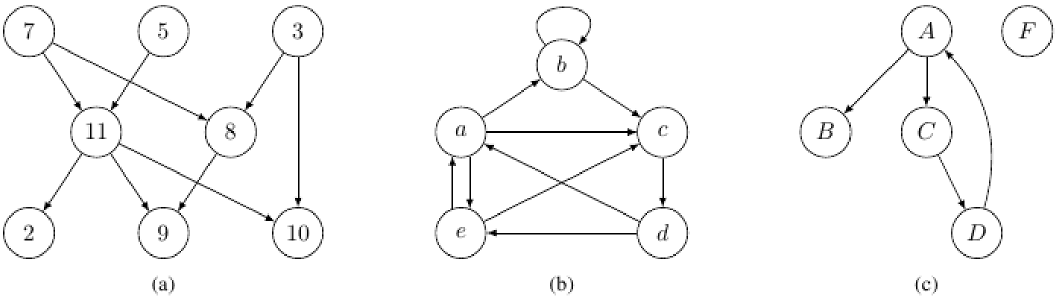


FIGURE 3 – Exemples de graphes orientés

Exemple

Dans le graphe orienté $G = (S, A)$ de la figure 3a, on a : $S = \{2; 3; 5; 7; 89; 10; 11\}$ et

$A = \{(3{,}8); (3{,}10); (5{,}11); (7{,}8); (7{,}11); (8{,}9); (11; 2); (11{,}9); (11{,}10)\}$

Retrouvez éduscol sur

Exercice 4
Décrire la structure du graphe de la figure 3b comme dans l'exemple. Quelle est la particularité du sommet b ?

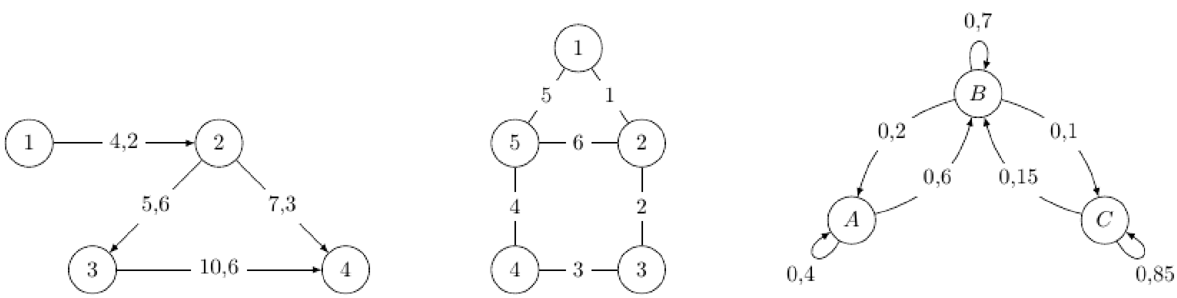
Exercice 5
Décrire la structure du graphe de la figure 3c comme dans l'exemple. Quelle est la particularité du sommet F ?

Graphes valués

Définition 1
On appelle *graphe valué* un graphe $G = (S, A)$ muni d'une fonction $C : A \to \mathbb{R}$ appelée *fonction de coût*.

> **Remarques**
> - Un graphe valué peut être orienté ou non, simple ou non.
> - Dans une représentation graphique, les coûts sont notés sur chacun des arcs (ou arêtes).
> - Les coûts peuvent être positifs ou négatifs.

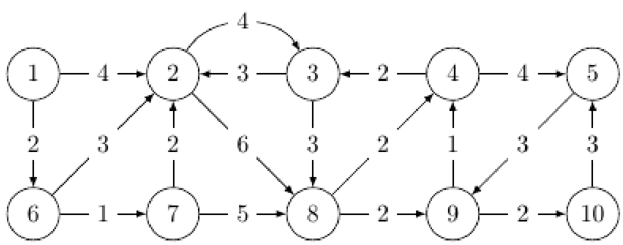
Définition 2
On appelle *graphe probabiliste* un graphe orienté valué dont les coûts sont positifs et dont la somme des coûts des arcs (ou arêtes) partant de n'importe quel sommet est égale à 1.



(a) Un graphe valué orienté
(b) Un graphe valué non orienté
(c) Un graphe probabiliste

FIGURE 4 – Exemples de graphes valués

Exercice 6
On considère le graphe valué suivant :



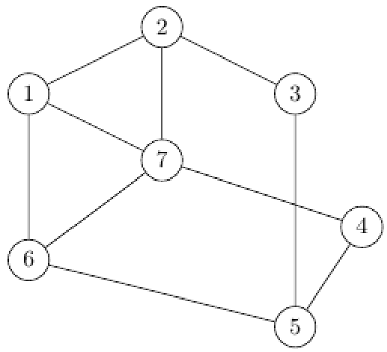
Quels sont les coûts des arcs partants et arrivants au sommet 9 ? Ce graphe est-il un graphe probabiliste ?

Retrouvez éduscol sur

> **Remarques sur les représentations graphiques des graphes**
> - La représentation graphique d'un graphe n'est pas unique.
> - Les arcs (ou arêtes) d'un graphe peuvent se couper.

Exemple

Les deux schémas ci-dessous représentent le même graphe :



Adjacence, degré et voisin

Adjacence de sommets

Définition

Dans un graphe $G = (S, A)$, orienté ou non, on dit qu'un sommet v est *adjacent* à un sommet u si $(u, v) \in A$.

> **Remarques**
> - Dans un graphe non orienté, la relation d'adjacence est *symétrique*, c'est-à-dire que si un sommet v est adjacent à un sommet u, alors le sommet u est nécessairement adjacent au sommet v.
> - Dans un graphe orienté, un sommet v peut être adjacent à un sommet u sans que le sommet u soit adjacent au sommet v.
> - Un sommet peut être adjacent à lui-même si le graphe possède une boucle.

Exemples

- Dans les graphes des figures 2a et 3b, le sommet b est adjacent au sommet a car l'arc (resp. l'arête) (a, b) existe.
- Dans le graphe de la figure 2a, le sommet a est adjacent au sommet b (relation symétrique).
- Dans le graphe de la figure 3b, le sommet a n'est pas adjacent au sommet b car l'arc (b, a) n'existe pas.

Exercice 7

- Dans le graphe de la figure 2a, quels sont les sommets adjacents au sommet e ?
- Dans le graphe de la figure 2b, quels sont les sommets adjacents au sommet 2 ?
- Dans le graphe de la figure 2c, quels sont les sommets adjacents au sommet b ?

Exercice 8

- Dans le graphe de la figure 3a, quels sont les sommets adjacents au sommet 11 ?
- Dans le graphe de la figure 3b, quels sont les sommets adjacents au sommet b ?
- Dans le graphe de la figure 3c, quels sont les sommets adjacents au sommet F ?

Définition du graphe complet

Un graphe est dit *complet* s'il est simple, non orienté et si tous ses sommets sont adjacents 2 à 2.

Exercice 9

Dessiner un graphe complet d'ordre 3, puis d'ordre 4.

Degré d'un sommet

Définition

- **Cas des graphes non orientés.** On appelle *degré d'un sommet* le nombre d'arêtes qui en partent.
- **Cas des graphes orientés.** On appelle :
  - *degré entrant d'un sommet* le nombre d'arcs qui y arrivent,
  - *degré sortant d'un sommet* le nombre d'arcs qui en partent,
  - *degré d'un sommet* la somme de son degré entrant et de son degré sortant.

Exemple

- Dans le graphe de la figure 2a, le sommet e a pour degré 3.
- Dans le graphe de la figure 2b, le sommet 1 a pour degré 1.
- Dans le graphe de la figure 3a, le sommet 8 a pour degré entrant 2, pour degré sortant 1 et pour degré 3.
- Dans le graphe de la figure 3b, le sommet b a pour degré entrant 2, pour degré sortant 2 et pour degré 4.

Exercice 10

Compléter les tableaux suivants pour les graphes de la figure 2c et de l'exercice 3.

Graphe de la figure 2c							Graphe de l'exercice 3			
Sommet	a	b	c	d	E	f	1	2	3	4
Degrés										

Exercice 11

Compléter le tableau suivant pour le graphe de la figure 3c.

Sommet	A	B	C	D	E	F
Degrés entrants						
Degrés sortants						
Degrés						

Définition du sommet isolé
Dans un graphe, orienté ou non, on appelle *sommet isolé* un sommet de degré 0.

Exemple de sommet isolé
Dans le graphe de la figure 3c, le sommet F est isolé.

Définitions : degré minimal et degré maximal
Dans un graphe, on appelle :

- *degré minimal* le plus petit des degrés de ses sommets ;
- *degré maximal* le plus grand des degrés de ses sommets.

Exemples de degré minimal et de degré maximal
- Le graphe de la figure 3a a pour degré minimal 1 et pour degré maximal 5.
- Le graphe de la figure 2a a pour degré minimal 1 et pour degré maximal 3.

Exercice 12
Quels sont les degrés minimaux et maximaux des graphes des figures 2c et 3c ?

Voisins d'un sommet

Définition
- **Cas des graphes non orientés.** On appelle *voisin d'un sommet* u tout sommet v distinct de u qui lui est adjacent.
- **Cas des graphes orientés.** On appelle *voisin d'un sommet* u tout voisin de u dans la version non orientée du graphe, c'est-à-dire une fois que l'on a remplacé chaque arc par une arête.

Autrement dit :

- Dans un graphe non orienté, un sommet v est voisin d'un sommet u si $v \neq u$ et si $(u, v) \in A$.
- Dans un graphe orienté, un sommet v est voisin d'un sommet u si $v \neq u$ et si $(u, v) \in A$ ou $(v, u) \in A$. Plus précisément, si $(v, u) \in A$, on dit que v est un prédécesseur de u et si $(u, v) \in A$, on dit que v est un successeur de u.

> **Remarques**
> - Un sommet peut ne pas avoir de voisin.
> - Dans un graphe simple (orienté ou non), le nombre de voisins d'un sommet est égal à son degré.
> - Dans un graphe orienté, un sommet peut être à la fois prédécesseur et successeur d'un autre sommet.

Exemples
- Dans le graphe de la figure 2a, les voisins de e sont a, c et f.
- Dans le graphe de la figure 3a, les voisins de 11 sont $2, 5, 7, 9$ et 10. Ses prédécesseurs sont les sommets 5 et 7 et ses successeurs sont les sommets $2, 9$ et 10.

Exercice 13

- Dans le graphe de la figure 2a, quels sont les voisins du sommet c ?
- Dans le graphe de la figure 2b, quels sont les voisins du sommet 1 ?
- Dans le graphe de la figure 2c, quels sont les voisins du sommet a ?

Exercice 14

- Dans le graphe de la figure 3a, quels sont les voisins du sommet 9 ? Préciser ses prédécesseurs et ses successeurs s'ils existent.
- Dans le graphe de la figure 3b, quels sont les voisins du sommet b ? Préciser ses prédécesseurs et ses successeurs s'ils existent.
- Dans le graphe de la figure 3b, quels sont les voisins du sommet e ? Préciser ses prédécesseurs et ses successeurs s'ils existent.
- Dans le graphe de la figure 3c, quels sont les voisins du sommet F ? Préciser ses prédécesseurs et ses successeurs s'ils existent.

Chemins et connexité

Chemins entre deux sommets

Définition 1

Dans un graphe, orienté ou non, on appelle :

- *chemin* toute liste ordonnée de sommets telle que chaque sommet de la liste (hormis le premier) soit adjacent au précédent ;
- *chemin simple* un chemin constitué d'arêtes (ou d'arcs) toutes distinctes ;
- *chemin fermé* un chemin dont le premier et le dernier sommet sont confondus ;
- *cycle* un chemin simple fermé, c'est-à-dire un chemin fermé composé d'arêtes (ou d'arcs) toutes distinctes.

Définition 2

Dans un graphe, orienté ou non, on appelle

- *longueur d'un chemin* le nombre d'arêtes (ou d'arcs) qui le composent ;
- *distance d'un sommet u à un sommet v* la plus petite des longueurs des chemins partant de u et arrivant à v ;
- *diamètre du graphe* la plus grande distance entre deux sommets quelconques.

> **Remarques**
> - Une boucle est un cycle de longueur 1.
> - Deux sommets sont situés à une distance 1 l'un de l'autre si et seulement s'ils sont adjacents.
> - Dans un graphe non orienté, la distance d'un sommet u à un sommet v est la même que la distance du sommet v au sommet u.
> - Dans un graphe orienté, la distance d'un sommet u à un sommet v peut être différente de la distance du sommet v au sommet u.
> - S'il n'existe pas de chemin partant d'un sommet u et arrivant à un sommet v, la distance de u à v est $+\infty$.

Exemples

- Dans le graphe de la figure 2a :
  - le chemin $(c; b; a; e; f)$ est un chemin simple de longueur 4 reliant c à f ;
  - la distance entre le sommet c et le sommet f est 2 (obtenue avec le chemin $(c; e; f)$;
  - le chemin $(c; e; c)$ est un chemin fermé et le chemin $(c; e; a; b; c)$ est un cycle;
  - le diamètre du graphe est 3 (distance de b à f).
- Dans le graphe de la figure 3a :
  - le chemin $(7; 8; 9)$ est un chemin simple de longueur 2;
  - le sommet 9 est situé à une distance 2 du sommet 7 et le sommet 7 est situé à une distance $+\infty$ du sommet 9;
  - il n'y a aucun cycle.

Définition 3

Un graphe n'admettant pas de cycle est appelé *graphe acyclique*.

Exercice 15

- Existe-t-il un chemin entre deux sommets quelconques du graphe de la figure 2b? En déduire le diamètre de ce graphe.
- Existe-t-il un chemin entre deux sommets quelconques du graphe de la figure 2c? Quel est le diamètre de ce graphe?
- Le graphe de la figure 2c est-il acyclique?

Exercice 16

- Donner un cycle de longueur 3 dans le graphe de la figure 3b.
- Deux sommets quelconques du graphe de la figure 3b sont-ils toujours reliés par un chemin?
- Le graphe de la figure 3c est-il acyclique? Quel est son diamètre?

Connexité

Définition

Un graphe non orienté est dit *connexe* s'il existe un chemin entre deux sommets quelconques.

Exemple

Les graphes des figures 2a et 2c sont connexes et le graphe de la figure 2b n'est pas connexe. En revanche, il admet deux composantes connexes formées par les sous-graphes de sommets $(0; 2; 4)$ et de sommets $(1; 3)$.

Exercice 17

Le graphe de la figure de l'exercice 3 est-il connexe?

Dans les graphes connexes, on s'intéresse essentiellement à la recherche de cycles (s'ils existent), à la recherche de chemins (simples la plupart du temps) entre deux sommets quelconques, ainsi qu'à la détermination de la distance minimale entre deux sommets quelconques.

Ici, nous nous intéressons uniquement à la recherche d'un chemin et d'un cycle particulier du graphe appelés *chemin eulérien* et *cycle eulérien*.

Définition du chemin et cycle eulérien

Étant donné un graphe connexe, on appelle :

- *chemin eulérien* un chemin non fermé contenant une et une seule fois toutes les arêtes du graphe ;
- *cycle eulérien* un cycle contenant une et une seule fois toutes les arêtes du graphe.

Définition du graphe semi-eulérien et du graphe eulérien

- Un graphe connexe admettant un chemin eulérien est appelé *graphe semi-eulérien*.
- Un graphe connexe admettant un cycle eulérien est appelé *graphe eulérien*.

Remarque

- Si un graphe connexe admet un chemin eulérien entre le sommet u et le sommet v, l'ajout de l'arête (u, v) rend le graphe eulérien.
- La réponse à ces deux questions a été apportée par Euler.

Théorème 1 (Euler)

Soit G un graphe connexe. Alors :

- G est graphe semi-eulérien si et seulement si sa version sans boucle admet exactement deux sommets de degré impair. Dans ce cas, il existe un chemin eulérien reliant ces deux sommets ;
- G est un graphe eulérien si et seulement si sa version sans boucle a tous ses sommets de degré pair.

Exercice 18

Montrer que le graphe de la figure 2a est semi-eulérien. Préciser un chemin eulérien et l'arête à ajouter pour que le graphe devienne eulérien.

Exercice 19

Donner la réponse au problème des sept ponts de Königsberg (voir problème).

Remarque

Un problème similaire est la recherche de chemins et de cycles passant une et une seule fois par tous les sommets du graphe. On parle alors de *chemins hamiltoniens* et de *cycles hamiltoniens*. Contrairement aux chemins et cycles eulériens, ce problème est très compliqué et il n'existe à l'heure actuelle aucun théorème permettant de décider si un graphe connexe quelconque admet un chemin ou un cycle hamiltonien, c'est-à-dire est *semi-hamiltonien* ou *hamiltonien*.

Forte connexité

Définition

Un graphe orienté est dit *fortement connexe* si, pour toute paire ordonnée de sommets, il existe un chemin entre ces deux sommets.

Exemples

Les graphes des figures 3a et 3c ne sont pas fortement connexes et le graphe de la figure 3b est fortement connexe.

Pour les graphes fortement connexes, les définitions « du chemin et cycle eulérien » et « du graphe semi-eulérien et du graphe eulérien » restent valables. Pour de tels graphes, il existe une variante du théorème 1 :

Théorème 2

Soit G un graphe fortement connexe. Alors :

- G est un graphe semi-eulérien si et seulement si, dans sa version sans boucle, chaque sommet a les mêmes degrés entrants et sortants sauf exactement deux : un dont le degré entrant est un de plus que le degré sortant et un dont le degré sortant est un de plus que le degré entrant. Dans ce cas, il existe un chemin eulérien reliant ces deux sommets.
- G est un graphe eulérien si et seulement si, dans sa version sans boucle, chaque sommet a les mêmes degrés entrants et sortants.

Exercice 20

Le graphe de la figure 3b est-il semi-eulérien ? Eulérien ?