

**BACCALAURÉAT GÉNÉRAL**  
**ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ**  
**SESSION 2025**  
**MATHÉMATIQUES**

**Jour 2**

Durée de l'épreuve : **4 heures**

**L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.**  
**L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.**

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.  
Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5 dans la version initiale et **9 pages numérotées de 1/9 à 9/9 dans la version en caractères agrandis.**

**La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.**

## Exercice 1 (6 points)

On se propose de comparer l'évolution d'une population animale dans deux milieux distincts A et B.

Au 1er janvier 2025, on introduit 6 000 individus dans chacun des milieux A et B.

### Partie A

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans le milieu A.

On suppose que dans ce milieu, l'évolution de la population est modélisée par une suite géométrique  $(u_n)$  de premier terme  $u_0 = 6$  et de raison 0,93. Pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  représente la population au 1er janvier de l'année  $2025 + n$ , exprimée en millier d'individus.

1. Donner, selon ce modèle, la population au 1er janvier 2026.
2. Pour tout entier naturel  $n$ , exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .
3. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

### Partie B

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans le milieu B.

On suppose que dans ce milieu, l'évolution de la population est modélisée par la suite  $(v_n)$  définie par  $v_0 = 6$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_{n+1} = -0,05v_n^2 + 1,1v_n$ .

Pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n$  représente la population au 1er janvier de l'année  $2025 + n$ , exprimée en millier d'individus.

1. Donner, selon ce modèle, la population au 1er janvier 2026.

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = -0,05x^2 + 1,1x$ .

2. Démontrer que la fonction  $f$  est croissante sur l'intervalle  $[0; 11]$ .
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  
on a  $2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6$ .
4. En déduire que la suite  $(v_n)$  est convergente vers une limite  $\ell$ .
5. a. Justifier que la limite  $\ell$  vérifie  $f(\ell) = \ell$  puis en déduire la valeur de  $\ell$ .  
b. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

### Partie C

Cette partie a pour but de comparer l'évolution de la population dans les deux milieux.

1. En résolvant une inéquation, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu A sera strictement inférieure à 3 000 individus.
2. À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu B sera strictement inférieure à 3 000 individus.
3. Justifier qu'à partir d'une certaine année, la population du milieu B dépassera la population du milieu A.
4. On considère le programme Python ci-contre.

- a. Recopier et compléter ce programme afin qu'après exécution, il affiche l'année à partir de laquelle la population du milieu B est strictement supérieure à la population du milieu A.

```
n = 0
u = 6
v = 6
while ... :
    u = ...
    v = ...
    n = n + 1
print(2025 + n)
```

- b. Déterminer l'année affichée après exécution du programme.

## Exercice 2 (6 points)

### Partie A

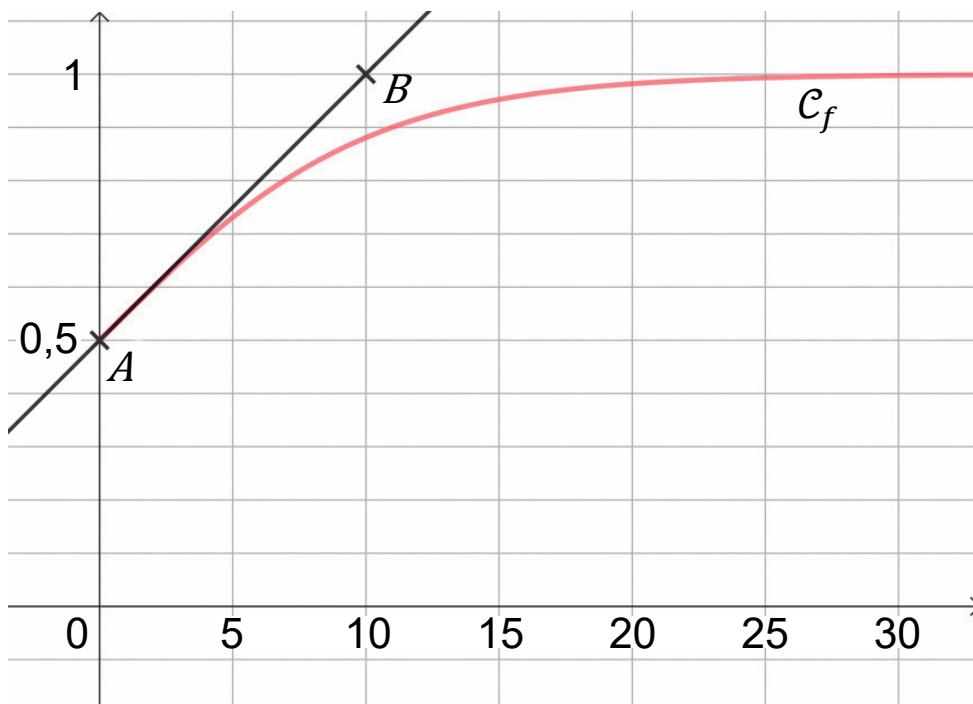
On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{1}{a + e^{-bx}}$$

où  $a$  et  $b$  sont deux constantes réelles strictement positives.

On admet que la fonction  $f$  est dérivable sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .

La fonction  $f$  admet pour représentation graphique la courbe  $\mathcal{C}_f$  ci-dessous :



On considère les points  $A(0; 0,5)$  et  $B(10; 1)$ .

On admet que la droite  $(AB)$  est tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point  $A$ .

1. Par lecture graphique, donner une valeur approchée de  $f(10)$ .
2. On admet que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ .

Donner une interprétation graphique de ce résultat.

3. Justifier que  $a = 1$ .
4. Déterminer le coefficient directeur de la droite  $(AB)$ .
5. a. Déterminer l'expression de  $f'(x)$  en fonction de  $x$  et de la constante  $b$ .  
b. En déduire la valeur de  $b$ .

## Partie B

On admet, dans la suite de l'exercice, que la fonction  $f$  est définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-0,2x}}$$

1. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
2. Étudier les variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .
3. Montrer qu'il existe un unique réel  $\alpha$  positif tel que  $f(\alpha) = 0,97$ .
4. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement du réel  $\alpha$  par deux nombres entiers consécutifs.

## Partie C

1. Montrer que, pour tout  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0; +\infty[$ ,  $f(x) = \frac{e^{0,2x}}{1+e^{0,2x}}$ .
2. En déduire une primitive de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .
3. Calculer la valeur moyenne de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; 40]$ , c'est-à-dire :

$$I = \frac{1}{40} \int_0^{40} \frac{1}{1 + e^{-0,2x}} dx$$

*On donnera la valeur exacte et une valeur approchée au millième.*

### Exercice 3 (4 points)

Le codage « base64 », utilisé en informatique, permet de représenter et de transmettre des messages et d'autres données telles que des images, en utilisant 64 caractères : les 26 lettres majuscules, les 26 lettres minuscules, les chiffres de 0 à 9 et deux autres caractères spéciaux.

*Les parties A, B et C sont indépendantes.*

## Partie A

Dans cette partie, on s'intéresse aux séquences de 4 caractères en base64.

Par exemple, « gP3g » est une telle séquence.

Dans une séquence, l'ordre est à prendre en compte : les séquences « m5C2 » et « 5C2m » ne sont pas identiques.

1. Déterminer le nombre de séquences possibles.
2. Déterminer le nombre de séquences si l'on impose que les 4 caractères sont différents deux à deux.
3.
  - a. Déterminer le nombre de séquences ne comportant pas de lettre A majuscule
  - b. En déduire le nombre de séquences comportant au moins une lettre A majuscule.
  - c. Déterminer le nombre de séquences comportant exactement une fois la lettre A majuscule.
  - d. Déterminer le nombre de séquences comportant exactement deux fois la lettre A majuscule.

## Partie B

On s'intéresse à la transmission d'une séquence de 250 caractères d'un ordinateur à un autre. On suppose que la probabilité qu'un caractère soit mal transmis est égale à 0,01 et que les transmissions des différents caractères sont indépendantes entre elles.

On note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de caractères mal transmis.

1. On admet que la variable aléatoire  $X$  suit la loi binomiale. Donner ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité que tous les caractères soient bien transmis. *On donnera l'expression exacte, puis une valeur approchée à  $10^{-3}$  près.*
3. Que pensez-vous de l'affirmation suivante : « La probabilité que plus de 16 caractères soient mal transmis est négligeable » ?

## Partie C

On s'intéresse maintenant à la transmission de 4 séquences de 250 caractères.

On note  $X_1, X_2, X_3$  et  $X_4$  les variables aléatoires correspondant aux nombres de caractères mal transmis lors de la transmission de chacune des 4 séquences. On admet que les variables aléatoires  $X_1, X_2, X_3$  et  $X_4$  sont indépendantes entre elles et suivent la même loi que la variable aléatoire  $X$  définie en **partie B**.

On note  $S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ .

Déterminer, en justifiant, l'espérance et la variance de la variable aléatoire  $S$ .

### Exercice 4 (4 points)

On se place dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace.

On considère les points  $A(1; 0; 3)$ ,  $B(-2; 1; 2)$  et  $C(0; 3; 2)$ .

1. a. Montrer que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont pas alignés.

b. Soit  $\vec{n}$  le vecteur de coordonnées  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ . Vérifier que le vecteur  $\vec{n}$  est orthogonal au plan  $(ABC)$ .

c. En déduire que le plan  $(ABC)$  admet pour équation cartésienne  $-x + y + 4z - 11 = 0$ .



On considère le plan  $\mathcal{P}$  d'équation cartésienne  $3x - 3y + 2z - 9 = 0$  et le plan  $\mathcal{P}'$  d'équation cartésienne  $x - y - z + 2 = 0$ .

**2. a.** Démontrer que les plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont sécants. On note  $(d)$  leur droite d'intersection.

**b.** Déterminer si les plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont perpendiculaires.

**3.** Montrer que la droite  $(d)$  est dirigée par le vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**4.** Montrer que le point  $M(2; 1; 3)$  appartient aux plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$ .  
En déduire une représentation paramétrique de la droite  $(d)$ .

**5.** Montrer que la droite  $(d)$  est aussi incluse dans le plan  $(ABC)$ .  
Que peut-on dire des trois plans  $(ABC)$ ,  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  ?