MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
Liberté
Égalité
Fraternité

Livret d'accompagnement de programme

Avant 4 ans
À partir de 4 ans
À partir de 5 ans
CP
CE1
CE2
CM1
CM2
6e
5e
4e
3e

Mathématiques

2025

Ce livret d'accompagnement du programme de mathématiques du cycle 2, publié au BOENJS du 31 octobre 2024 propose des ressources organisées sous la forme de fiches thématiques. Chaque fiche présente une séquence de classe, dans laquelle une ou plusieurs séances sont détaillées. Les exemples proposés abordent certaines priorités ou nouveautés des programmes scolaires.

Sommaire

Enjeux pédagogiques du cycle 2

En mathématiques, la priorité du cycle 2 est l'acquisition de connaissances et de savoir-faire solides sur la **numération**, le **calcul** et la **résolution de problèmes arithmétiques**. En effet, les mathématiques sont une discipline cumulative et ces apprentissages, qui s'appuient déjà sur ceux du cycle 1, constituent le socle indispensable sur lequel reposeront les apprentissages des cycles 3 et 4 pour ce qui concerne les nombres, le calcul et l'algèbre. Chaque année, les deux tiers du temps d'enseignement des mathématiques, au minimum, sont consacrés à la partie « Nombres, calcul et résolution de problèmes » du programme. » (**Programme de mathématiques de cycle 2, arrêté du 22-10-2024**).

La classe de CP joue un rôle essentiel dans les apprentissages fondamentaux, en introduisant les premiers principes du système de numération, notamment ses aspects positionnel et décimal, qui serviront ensuite à comprendre les grands nombres entiers jusqu'aux milliards, ainsi que l'écriture à virgule des nombres décimaux. La première séquence CE1 proposée dans ce document est consacrée à l'introduction des principes fondamentaux de notre système de numération dont la bonne compréhension est décisive pour la suite de la scolarité.

L'aptitude à résoudre des problèmes complexes est conditionnée par l'automatisation de tâches élémentaires qui permet de soulager la mémoire de travail et disposer ainsi des ressources cognitives suffisantes pour résoudre ces problèmes complexes. Parmi les procédures élémentaires à automatiser, il y a notamment des procédures de calcul mental qui permettent de traiter rapidement des calculs plus ou moins élémentaires de façon assurée. La deuxième séquence de ce document est un exemple d'une séquence dédiée à l'automatisation d'une telle procédure de calcul mental.

La résolution de problèmes est le cœur de l'activité mathématique. Le développement des compétences des élèves en résolution de problèmes doit s'appuyer sur un enseignement structuré qui permet non seulement d'acquérir des outils spécifiques pour soutenir la modélisation des problèmes, mais aussi de développer des aptitudes à faire des analogies entre un nouveau problème et des problèmes résolus précédemment. La troisième et dernière séquence de ce document est un exemple s'inscrivant dans la construction de cet enseignement structuré de la résolution de problèmes.

Recommandations pédagogiques et gestes professionnels associés

Une démarche d'enseignement structuré et progressif

Les recherches en sciences cognitives montrent que pour apprendre efficacement, les élèves doivent comprendre ce qui est attendu d'eux, identifier les obstacles cognitifs susceptibles de freiner leur progression, et disposer de stratégies adaptées pour les surmonter. Le professeur joue alors un rôle clé en guidant les élèves, en structurant les savoirs, et en leur fournissant des outils concrets pour réussir. Toutefois, si cette démarche peut s'avérer particulièrement efficace, elle ne peut être mobilisée de manière systématique, quels que soient le contenu ou la situation d'enseignement. Son efficacité repose donc sur une mise en œuvre réfléchie, attentive aux spécificités de chaque situation d'apprentissage, des contenus enseignés et des profils d'élèves. Pour que cette approche produise pleinement ses effets, elle doit s'appuyer sur une capacité du professeur à ajuster ses interventions et à différencier ses pratiques. C'est en conjuguant les apports des sciences cognitives avec une fine compréhension des besoins des élèves et une approche pédagogique souple et réactive que l'on crée les conditions d'un apprentissage à la fois efficace et durable.

La démarche d'enseignement illustrée dans les séquences de ce livret, se compose de quatre temps d'enseignement pour aider l'élève à passer de découvertes fortuites à des apprentissages structurés et transférables.

- Temps 1 – Définition des objectifs et mise en réussite.
- Temps 2 – Mise en activité des élèves.
- Temps 3 – Institutionnalisation, retour réflexif.
- Temps 4 – Automatisation, réinvestissement, transfert.

La place de l'erreur

Lorsque la réponse de l'élève est inexacte, il est essentiel de l'accompagner dans l'identification de son erreur afin qu'il puisse, par exemple, comprendre le principe mathématique en jeu ou améliorer son raisonnement logique. Le professeur favorise, encourage et accompagne la réflexion de l'élève en lui proposant des rétroactions régulières sur son activité, dans le but de le guider progressivement vers une meilleure compréhension de ses démarches.

La place et le rôle de la verbalisation par l'élève

Le professeur encourage et favorise la verbalisation et l'explication des objets d'apprentissage afin d'en assurer une meilleure compréhension et de développer ainsi la capacité à en reconnaitre les régularités. Il peut, par exemple, demander aux élèves de décrire ce qu'ils observent et de justifier leurs réponses.

Le suivi et évaluation des progrès des élèves

Suivre régulièrement la progression des élèves dans la compréhension des notions et dans le développement des compétences, non seulement par l'observation directe mais aussi par l'utilisation d'outils d'évaluation, permet d'ajuster les activités en fonction des acquis des élèves, en tenant compte de leurs progrès et de leurs difficultés.

Proposition de séquence n° 1 – Mesurer des longueurs en utilisant les fractions

Objectifs

Partager une unité de longueur en fractions d'unité et mesurer des longueurs non entières par rapport à cette unité.

Éléments de progression

La compréhension des fractions repose sur l'acquisition de plusieurs conceptions, plusieurs *sens*, que les élèves devront, au fur et à mesure de leur scolarité, intégrer et articuler (CSEN, juin 2022).

Avant le CE2, les fractions sont découvertes dans le cas de fractions d'un tout. Dans cette première conception, la plus intuitive, la fraction est par définition inférieure ou égale à 1 et elle représente le rapport entre une partie et le tout. Au CE2, dans le cas particulier du travail sur les longueurs, les fractions permettent de mesurer des grandeurs quand les nombres entiers ne sont pas suffisants. Ce travail sur la mesure de longueurs à l'aide de fractions est essentiel : la construction d'une règle graduée fournit, en contexte, l'occasion d'introduire le repérage de points sur une demi-droite graduée par des fractions. Cela contribue à donner aux fractions le statut de nombres, qui s'intercalent entre les nombres entiers déjà connus.

Au cycle 3, les fractions acquerront également d'autres sens : le statut d'opérateur multiplicatif (fractions de quantités ou de grandeurs comme « un tiers de 24 élèves » ou « trois quarts de 100 mètres ») puis, en lien avec la division, le sens de quotient.

Niveau	Référence au programme et progressivité
CE1	Les fractions rencontrées sont les fractions d'un tout : elles sont inférieures ou égales à 1. Les élèves interprètent, représentent, lisent et écrivent des fractions dont le dénominateur est égal à 2, 3, 4, 5, 6, 8 ou 10. Ils comparent des fractions unitaires ou des fractions de même dénominateur. Ils additionnent et soustraient des fractions de même dénominateur.
CE2	Les fractions d'un tout sont réinvesties afin d'établir des égalités entre fractions. **Les élèves mobilisent les fractions pour mesurer des longueurs** lorsque les entiers ne suffisent pas : une unité de longueur est partagée en fractions de cette unité. Ils positionnent des fractions sur une bande unité ou sur une règle graduée, ce qui leur permet de les comparer et d'établir des égalités. Les élèves additionnent et soustraient des fractions de même dénominateur ou dont l'un des dénominateurs est un multiple de l'autre. Les fractions rencontrées au CE2 ont un dénominateur inférieur ou égal à douze et sont toutes inférieures ou égales à un.
CM1	Les fractions supérieures à 1 sont introduites. Les élèves renforcent leur compréhension de la fraction comme rapport entre la partie et le tout. Les élèves apprennent à repérer des points sur une demi-droite graduée par des fractions. Ils calculent également des fractions de quantités ou de grandeurs avec les fractions unitaires. Les fractions rencontrées au CM1 ont toutes un dénominateur inférieur ou égal à 20, hormis les fractions décimales qui peuvent avoir un dénominateur égal à 100.

Démarche d'enseignement

Le travail de l'année de CE2 peut, par exemple, être articulé de la façon suivante.

Séquence 1 - Comparer des fractions unitaires ou des fractions de même dénominateur.

Les compétences travaillées en CE1 sont réinvesties avec l'ensemble des fractions étudiées en CE2 : les fractions inférieures ou égales à 1 dont le dénominateur est inférieur ou égal à douze.

Séquence 2 - Établir des égalités de fractions (fractions d'un tout).

Les élèves réinvestissent les fractions d'un tout afin d'établir des égalités entre fractions inférieures ou égales à 1.

Séquence 3 (détaillée) - Partager une unité de longueur en fractions d'unité et mesurer des longueurs non entières par rapport à cette unité.

Les élèves apprennent à partager une unité de longueur en fractions d'unité et mesurent des longueurs.

Séquence 4 - Comparer des fractions de même numérateur, ou dont l'une des fractions a un dénominateur multiple du dénominateur de l'autre.

Les règles graduées en fractions d'une unité donnée, permettent de comparer des fractions : fractions égales positionnées au niveau d'une même graduation, positionnement des fractions dans l'ordre croissant sur la règle graduée, etc.

Séquence 5 - Additionner et soustraire des fractions.

Les élèves s'appuient sur différentes représentations des fractions (fractions d'un tout et fractions de l'unité) pour additionner et soustraire des fractions inférieures à 1 de même dénominateur ou dont l'un des dénominateurs est un multiple de l'autre.

Déroulement de la séquence

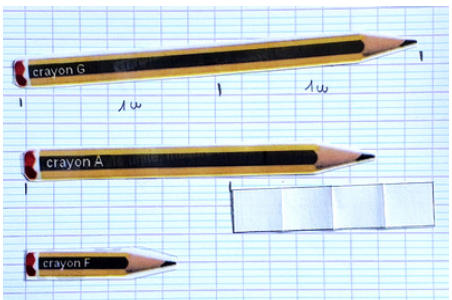
Séquence 3 - Partager une unité de longueur en fractions d'unité et mesurer des longueurs non entières par rapport à cette unité.

Les élèves utilisent les fractions pour mesurer des longueurs par rapport à une unité donnée, quand les entiers ne suffisent plus pour exprimer ces mesures. Ils partagent d'abord une bande unité en fractions de cette unité et l'utilisent pour mesurer des longueurs. Ils construisent ensuite des règles graduées, instruments leur servant à mesurer et à tracer des segments de longueurs données.

Séance	Objectifs	Description
Séance 1 (55 min)	Utiliser une bande unité partagée en quatre parties égales pour mesurer des longueurs.	Pour comparer et exprimer des longueurs, les élèves mobilisent les fractions quand les entiers ne suffisent plus : ils plient une bande unité pour la partager en quatre parties égales et expriment les résultats sous la forme : « Le crayon a pour longueur 2 unités et un quart d'unité ». Cf. focus
Séance 2 (45 min)	Utiliser une bande unité partagée en dix parties égales pour mesurer des longueurs.	Dans le prolongement de la séance précédente, les élèves utilisent une bande unité partagée en dix parties égales pour mesurer des longueurs.
Séance 3 (45 min)	Retrouver l'unité à partir d'une fraction de cette unité.	Cette séance conduit les élèves à construire une bande dont la longueur est égale à l'unité à partir d'une bande dont la longueur est connue.
Séance 4 (55 min)	Construire une règle graduée en quarts d'unité et l'utiliser pour mesurer des longueurs.	Les élèves comparent des segments selon leur longueur. Une unité de longueur étant donnée, ils construisent une règle graduée en fractions de cette unité pour mesurer les longueurs. Ils expriment les résultats sous la forme : « Le segment a pour longueur 1 unité + $\frac{3}{4}$ d'unité. ». Cf. focus
Séance 5 (45 min)	Tracer des segments à l'aide d'une règle graduée en dixièmes d'unité.	Une unité de longueur étant donnée, les élèves utilisent une règle graduée en dixièmes d'unité pour tracer des segments de longueurs inférieures, égales ou supérieures à 1 unité.
Séance 6 (30 min)	Utiliser des égalités entre des fractions pour tracer des segments d'une longueur donnée.	Les élèves mobilisent les égalités de fractions qu'ils connaissent. Avec une règle graduée en huitièmes, ils tracent des segments ayant les longueurs suivantes : $\frac{7}{8}$ d'unité ; 2 unité + $\frac{5}{8}$ d'unité ; $\frac{1}{2}$ unité ; 1 unité + $\frac{1}{4}$ d'unité ; 2 unités + $\frac{3}{4}$ d'unité.

Focus sur la séance 1 – Utiliser une bande unité partagée en quatre parties égales pour mesurer des longueurs

Une unité de longueur étant donnée, les élèves mesurent des longueurs d'objets, **d'abord tangibles, puis représentés** (matériel en annexe). Ils utilisent les fractions lorsque les entiers ne suffisent plus en construisant par pliage une bande partagée en quarts d'unité.



Ils expriment les longueurs par des phrases comme par exemple :

« Le crayon G mesure 2 unités. ».

« Le crayon A a pour longueur une unité et trois quarts d'unité. ».

« Le crayon F est long comme 3 quarts d'unité ».

À l'écrit, ils notent ces longueurs : 2 u, 1 u et $\frac{3}{4}$ u (ou 1 u + $\frac{3}{4}$ u), $\frac{3}{4}$ u.

Objectifs

Utiliser une bande unité partagée en quatre parties égales pour mesurer des longueurs.

Durée

55 minutes.

Matériel

- **Pour le temps 1 :** une bande de papier (de 20 cm par exemple).
- **Pour le temps 2 :** une planche représentant des crayons et une bande unité dédiée à l'exercice (document photocopiable cf. annexe).

Les images de crayons à mesurer peuvent être remplacées par du matériel tangible : crayons de différentes longueurs, pailles, baguettes ou tasseaux recoupés, etc. Quel que soit le matériel, il est nécessaire de veiller à ce que la longueur des objets à mesurer corresponde à un nombre entier de quarts d'unité.

Temps 1 – Rappels et explicitation de l'objectif, mise en réussite

Les nombres entiers ne sont pas toujours suffisants pour comparer des grandeurs.

Le professeur commence par demander aux élèves de ranger leurs règles graduées en centimètres en leur expliquant qu'ils vont **comparer des longueurs sans utiliser les outils conventionnels** comme le double décimètre. Il interroge les élèves sur les procédures apprises les années précédentes pour exprimer ou communiquer une longueur en la mesurant par report d'un étalon (allumettes, trombones, pouces, etc.).

Le professeur présente une bande de papier dont la longueur sera la longueur de référence pour l'étape 1. Il invite quelques élèves à venir expliquer comment ils utilisent la bande pour mesurer des longueurs.

Lorsque la mesure de l'objet mesuré ne correspond pas exactement à la longueur d'une unité entière, les élèves encadrent la longueur entre deux nombres entiers d'unités :

« La longueur du banc est égale à 8 unités. La longueur du tableau au fond de la classe mesure entre 5 unités et 6 unités. ».

Le professeur annonce qu'il veut maintenant comparer deux longueurs. Il choisit deux objets non déplaçables dont les dimensions sont suffisamment proches pour ne pas permettre une comparaison visuelle immédiate. Mesurer les deux longueurs permettra donc de les comparer sans avoir à déplacer les objets.

Il choisit, par exemple, la base d'un tableau et d'une fenêtre. Si les objets « réels » de la classe ne permettent pas d'obtenir des mesures égales à un nombre entier de quarts d'unité, le professeur introduira des objets avec des longueurs adaptées.

Deux élèves se déplacent et utilisent la bande unité pour mesurer les longueurs. Le professeur commente et verbalise le problème rencontré : « La longueur de la fenêtre est supérieure à 5 unités, elle est comprise entre 5 unités et 6 unités. La longueur du tableau est, elle aussi, comprise entre 5 et 6 unités. Comment déterminer laquelle des deux est la plus longue ? ».

Mesurer une longueur à l’aide d’une bande unité partagée en quatre parties égales.

Le professeur demande alors aux élèves de trouver une solution pour réaliser des mesures plus précises. Il recueille les propositions et retient l’idée de partager la bande unité en fractions de cette unité : utiliser les fractions permet de mesurer plus précisément des longueurs.

Des partages différents peuvent être testés mais, dans les exemples ci-dessous, la bande unité sera partagée en quatre quarts. Des élèves mesurent les objets et le professeur verbalise leurs actions.

Exemple :

- « Pour obtenir la longueur du tableau, il faut d’abord reporter 5 fois la bande unité. Ensuite, on plie celle-ci en 4 parties égales pour obtenir un quart d’unité. On peut maintenant mesurer la partie du tableau restante : le tableau est long comme 5 unités et 1 quart d’unité. » ;
- « La longueur de la fenêtre est, elle, égale à 5 unités et 3 quarts d’unité : la longueur de la fenêtre est donc plus grande que celle du tableau. ».

Le professeur écrit sur une affiche l’encadrement réalisé initialement et note la longueur mesurée du tableau en utilisant les nombres entiers et les fractions. Cette affiche sera complétée à la fin de ce temps collectif puis en séance 4.

Exemple d’affiche réalisée collectivement à ce stade de la séance

Utiliser les fractions pour mesurer des longueurs

Le tableau mesure entre 5 unités et 6 unités.

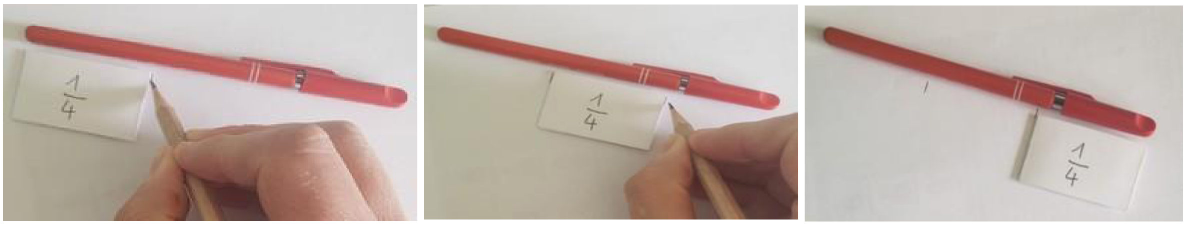
Longueur du tableau : 5 unités et $\frac{1}{4}$ d’unité.

Avant de présenter l’activité suivante, le professeur montre de nouveau, pas à pas, comment utiliser les fractions pour mesurer des longueurs. Il présente deux procédures différentes en prenant une bande unité et un nouvel objet, par exemple, un stylo dont la longueur est inférieure à l’unité.

Procédure A : le professeur plie la bande unité en quatre parties égales puis en conserve une seule en maintenant la bande pliée. La longueur de cette partie correspond à un quart de l’unité. Pour vérifier la précision du partage, il reporte quatre fois la partie conservée : la longueur obtenue doit être égale à l’unité.

Puis, en partant de l’une des extrémités de l’objet à mesurer, il reporte la fraction d’unité et verbalise :

« Pour mesurer la longueur de cet objet, je compte le nombre de fois où la fraction de l’unité est reportée. J’ai reporté 3 fois un quart d’unité, la longueur du stylo est donc égale à trois quarts de l’unité. ».



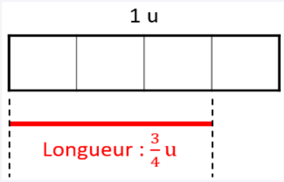
Procédure B : le professeur plie la bande afin de partager l’unité en quatre parties égales mais cette fois-ci, la bande est dépliée afin de rendre visibles les quatre parties.

Il compte à combien de *quarts* d’unité correspond la longueur de l’objet mesuré : « La longueur du stylo rouge correspond à *trois quarts* d’unité. ».

Cette procédure présente l'avantage de simplifier la lecture de la mesure. Cependant, le professeur doit rappeler l'importance de vérifier que les parts obtenues sont bien égales. En effet, si la bande unité est divisée en parts inégales, il reste possible de comparer des longueurs, mais impossible d'utiliser les fractions pour les exprimer correctement.

Suite de l'affiche collective à la fin du temps 1

Le professeur complète l'affiche et trace un segment rouge qui représente le stylo. Il colle la bande unité et note la longueur mesurée. Cette trace écrite sera complétée au cours des séances suivantes, en particulier lorsque la bande unité sera utilisée pour construire une règle graduée en fractions d'unité.



Temps 2 – Mise en activité des élèves

Phase 1 (individuel, 10 minutes) : les élèves mesurent les longueurs des crayons.

Phase 2 (exemple collectif puis individuel, 5 minutes) : chaque élève choisit un objet et rédige une devinette en indiquant la longueur de l'objet qu'il a choisi.

Phase 3 (binômes, 10 minutes) : les élèves se déplacent et s'interrogent mutuellement afin de valider les propositions de mesures.

Le professeur donne aux élèves la consigne suivante : « Vous devez mesurer la longueur des crayons représentés sur votre feuille. Pour mesurer ces crayons, vous utiliserez une nouvelle bande unité, différente de la précédente. Vous noterez soigneusement les résultats de vos mesures. ».

Ensuite, vous choisirez un des crayons, le mesurerez et vous rédigerez un message (devinette) où vous indiquerez la longueur de votre crayon.

Enfin, vous proposerez votre message à un camarade qui devra retrouver le crayon que vous avez choisi. ».

Durant cette première phase, **le professeur** accompagne les élèves qui rencontrent des difficultés afin qu'ils puissent participer à la suite de la séance.

À la fin du temps imparti (il n'est pas indispensable que tous les élèves aient fini de mesurer les huit crayons), un exemple de message est donné à la classe par un élève, guidé par le professeur et écrit au tableau :

« Mon crayon mesure 1 unité et $\frac{2}{4}$ d'unité. Quel est le crayon que j'ai choisi ? ».

Les autres élèves font des propositions de réponse. Celles-ci sont vérifiées, ce qui permet de répéter la procédure de mesurage.

Lorsqu'ils ont fini de rédiger leurs phrases, les élèves disposent de 10 minutes pour se déplacer à la rencontre de leurs camarades et lire leur message.

Si le camarade choisi n'a pas la réponse car il n'a pas mesuré l'objet en question, l'élève cherche un nouveau binôme.

Lorsque le camarade trouve la réponse, c'est à lui de proposer son message.

Si les deux élèves ne sont pas d'accord, ils sont encouragés à vérifier ensemble la longueur du crayon en question.

Temps 3 – Institutionnalisation, retour réflexif

Un temps de bilan permet de revenir sur la séance (réussites et difficultés des élèves durant l'activité, procédure apprise, intérêt de l'utilisation des fractions pour mesurer) :

- les phrases rédigées étaient-elles assez précises ?;
- est-ce que nous avons tous utilisé les fractions pour exprimer les mesures ?;
- pourquoi avons-nous eu besoin d'utiliser les fractions ?;
- comment mesure-t-on des longueurs avec une bande unité lorsque les entiers ne suffisent plus ? etc.

Présentation synthétique de la séance 2 – Utiliser une bande unité partagée en dix parties égales pour mesurer des longueurs

Durée

45 minutes.

Déroulement

Chaque élève doit créer un exercice en choisissant dans la classe des objets réels à mesurer. Il détermine d'abord les mesures avec une bande unité partagée en dixièmes d'unité, note ses réponses puis propose son exercice à un camarade (bande unité de 40 cm de longueur environ à agrandir en Annexe).

Il est peu fréquent que les longueurs des objets réels soient exactement égales à un nombre entier de dixièmes d'unité. Les élèves devront donc recourir à des encadrements comme :

« La longueur de l'objet est comprise entre 7 *dixièmes* d'unité et 8 *dixièmes* d'unité. ».

Le professeur demande aux élèves de choisir uniquement des objets dont la longueur est inférieure ou égale à l'unité. Il s'agit d'éviter, dans cette séance, des formulations comme : « La longueur de l'objet est comprise entre 2 unités et 9 dixièmes d'unité et 3 unités » (formule dans laquelle la conjonction « et » doit être interprétée de deux manières différentes).

Afin qu'il n'y ait pas d'ambiguïté sur les longueurs à mesurer, un vocabulaire précis devra être utilisé. Il s'agit de nommer par exemple « la largeur » d'un cahier de leçon, « l'épaisseur » d'un dictionnaire, « la hauteur » d'une trousse, la « profondeur » d'un casier, etc. Un croquis peut être réalisé afin d'indiquer la longueur qui doit être mesurée.

Le professeur écrit au tableau un exemple de question et sa réponse :

« Quelle est la longueur de mon feutre rouge ?

Longueur du feutre rouge → entre $\frac{2}{10}$ u et $\frac{3}{10}$ u ».

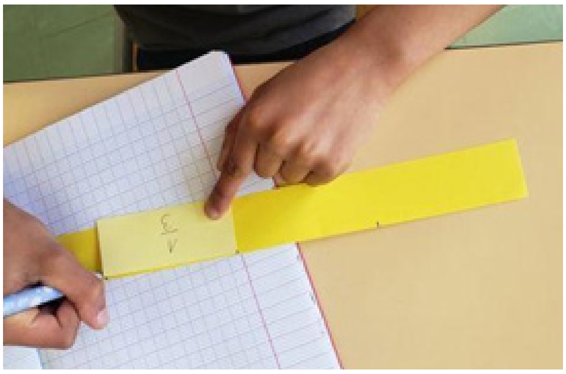
Présentation synthétique de la séance 3 – Construire une bande de longueur égale à l'unité à partir d'une fraction de cette unité.

Durée

45 minutes sur une ou plusieurs séances courtes.

Déroulement

Dans un premier temps, le professeur distribue à chaque élève **une bande de papier de longueur quelconque** (longueur d'une feuille A4 par exemple). Il explique ensuite que chacun va devoir construire **une bande de longueur égale à l'unité à partir d'une fraction de cette unité**.

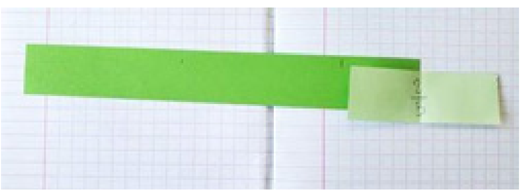


Il distribue ensuite alors **une bande de longueur égale à $\frac{1}{3}$ de l'unité**.

À l'issue d'un temps de recherche individuelle, **un élève** montre comment construire une bande de longueur égale à l'unité en reportant trois fois la bande de longueur égale à un tiers de l'unité.

L'exercice est répété : **les élèves** construisent une autre bande unité, différente de la première, à partir de la fraction $\frac{1}{7}$ u (*un septième* de la nouvelle unité).

Dans un second temps, le professeur demande aux élèves de construire une bande unité à partir d'une bande de longueur égale à $\frac{2}{5}$ de l'unité.



Cette fois-ci le report de la bande ne permet pas de répondre directement à la consigne : les élèves pourront commencer par retrouver la fraction unitaire $\frac{1}{5}$ de l'unité en pliant l'unité en 2 parties égales. Ils pourront ensuite reporter 5 fois la longueur égale à $\frac{1}{5}$ de l'unité (ou bien reporter deux fois $\frac{2}{5}$ u puis $\frac{1}{5}$ u pour obtenir 5 fois $\frac{1}{5}$ u).

En fonction des réussites et des difficultés des élèves, cette activité sera à nouveau proposée lors de séances courtes.

Le choix des fractions permettra d'adapter les consignes aux besoins des élèves, par exemple :

Groupe A : $\frac{1}{5}$ u puis $\frac{2}{3}$ u.

Groupe B : $\frac{4}{7}$ u puis 1 + $\frac{1}{3}$ u.

Focus sur la séance 4 – Construire une règle graduée en quarts d'unité et l'utiliser pour mesurer des longueurs

À partir d'une bande unité qu'ils plient pour obtenir 4 quarts d'unité, ils reportent la longueur *un quart d'unité* pour construire une règle graduée en *quarts d'unité*. Ils utilisent cette règle pour mesurer et comparer des longueurs de segments. Ils expriment les résultats sous la forme :

« La longueur du segment est : 1 unité et $\frac{3}{4}$ d'unité » qui peut être noté à l'écrit 1 u et $\frac{3}{4}$ u ou encore 1 u + $\frac{3}{4}$ u.

Objectifs

Comparer des longueurs en utilisant la règle graduée en quarts d'unités.

Durée

55 minutes.

Matériel

- Document photocopiable (cf. annexe) : des segments à mesurer et tracés sur des feuilles A3 et représentent des déplacements de nageurs dans des piscines de longueurs différentes.
- Document photocopiable (cf. annexe) : une bande unité par élève (petite bande bleue sur le support en annexe) et une seconde bande de papier pour fabriquer la règle.

Pendant l'explication du problème, les nageurs sont représentés par des pions, ce qui permet de visualiser les déplacements. Ces pions pourront servir à nouveau pour la séance suivante (tracés).

Temps 1 – Définition des objectifs et mise en réussite

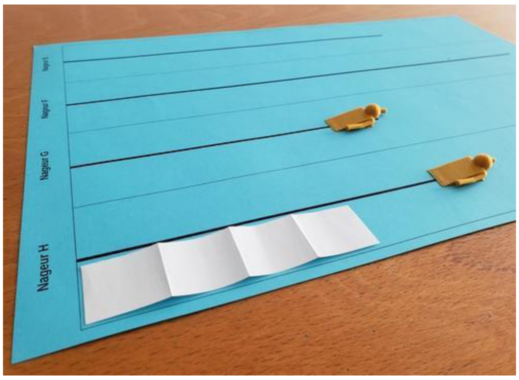
Durée : 20 minutes.

De l'utilisation de la bande unité à la construction de la règle graduée

Le professeur explique aux élèves qu'ils vont construire une règle graduée en quarts d'unité pour mesurer des longueurs. Il leur montre les feuilles sur lesquelles sont tracés les segments et présente le problème.

« Une compétition se prépare dans une grande ville. Dans cette ville, il y a deux lieux différents pour s'entrainer : la piscine olympique et la piscine de quartier : deux bassins qui n'ont pas la même longueur.

Pour que chaque participant puisse connaitre son niveau, un test en temps limité a été réalisé. Une trace du parcours de chacun des nageurs a été conservée : les segments représentent les distances parcourues par chacun des participants. ». La longueur des traces doit pouvoir être exprimée avec l'unité choisie et les quarts de cette unité.



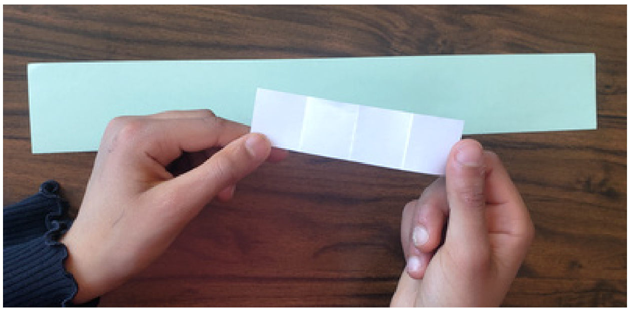
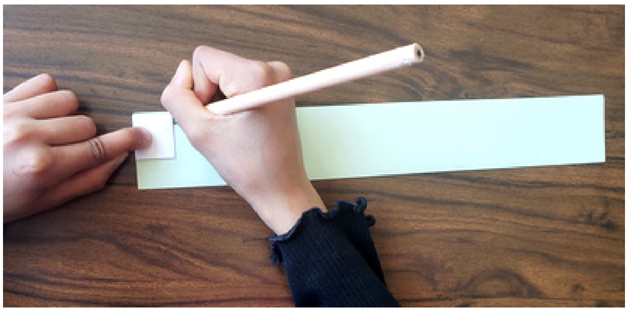
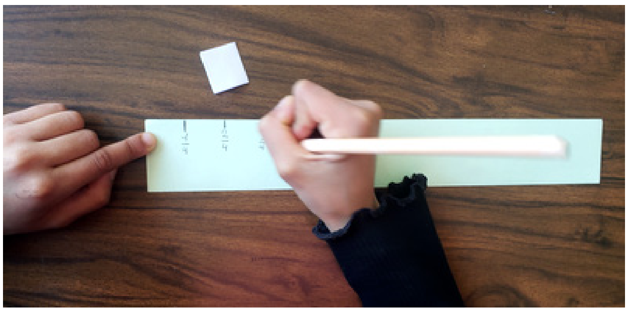
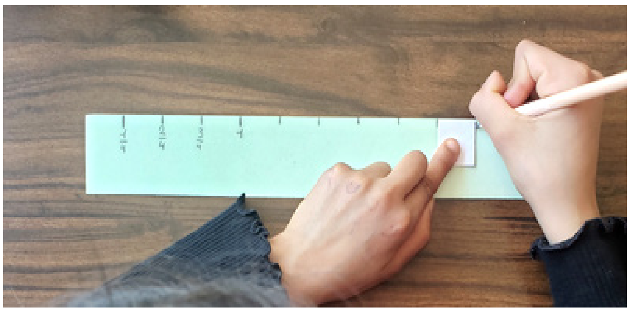
Le professeur montre la bande de papier de longueur égale à une unité. Il demande à un élève de mesurer la distance parcourue par un des personnages avec cette bande unité en utilisant la procédure apprise dans la première partie de la séquence.

Procédure pour construire une règle graduée

Avec la bande unité partagée en quatre parts égales, une règle graduée en quarts d'unité est fabriquée et servira à mesurer plus rapidement les longueurs.

Le professeur place le quart d'unité au bord d'une autre bande de papier (d'une autre couleur si possible), trace un trait et montre l'espace entre le bord de la règle et le premier trait : « Cette longueur est égale à un quart de l'unité. ». Il répète la procédure jusqu'à quatre quarts d'unité et verbalise : « Un quart d'unité, un quart d'unité, encore un quart d'unité et encore un quart d'unité : la longueur entre le bord de la règle et le quatrième trait est égale à 4 quarts d'unité, c'est-à-dire à l'unité entière. ». Il écrit ensuite les fractions $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, et $\frac{3}{4}$ sous les premières graduations et 1 sous la quatrième, puis poursuit la graduation de la règle.

Remarque : dans cette séance, c'est le bord de la règle qui a été choisi comme origine. Si l'origine n'avait pas coïncidé avec le bord de la règle, elle aurait alors été repérée par le nombre 0.

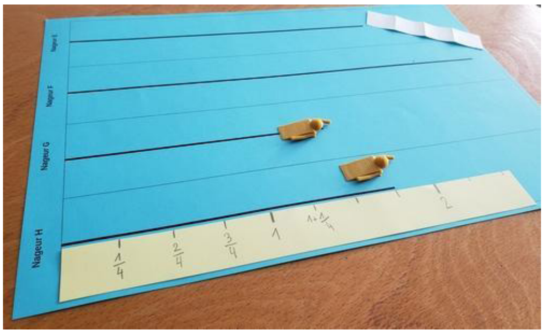
Pour graduer la règle au-delà de l'unité, plusieurs choix sont possibles : écrire uniquement les nombres entiers, écrire tous les nombres sous la forme 1 + $\frac{1}{4}$; 1 + $\frac{2}{4}$; 1 + $\frac{3}{4}$ etc.

Construction des règles graduée

Chaque élève construit une règle graduée en quarts d’unité. La comparaison des productions et l’entraide est encouragée afin d’obtenir des règles identiques pour la suite de la séance. Le professeur vérifie la précision des premières règles graduées construites.

Temps 2 – Mise en activité des élèves

Durée : 20 minutes.



Mesurer avec une règle graduée en quarts d’unité

Le professeur demande à un élève de montrer comment utiliser une règle graduée en quarts d’unité pour mesurer la longueur d’un segment.

Le professeur souligne la nécessité de placer l’origine de la règle à l’une des extrémités du segment à mesurer.

Il fait remarquer qu’il n’y a plus besoin de compter les quarts d’unité mais qu’il suffit de lire la mesure sur la règle : « Si on place l’origine de la règle à une extrémité du segment alors le nombre écrit sous le trait correspond à la longueur du segment, c’est-à-dire, dans le problème, à la distance parcourue par le personnage depuis le départ. ».

Phase autonome

Les élèves travaillent en binôme :

- l’un mesure les segments représentant les distances parcourues dans la piscine olympique,
- tandis que l’autre mesure ceux correspondant aux distances parcourues dans la piscine de quartier.

À partir de leurs mesures, ils devront ensuite ordonner les performances des participants en rangeant les longueurs dans l’ordre croissant.

Temps 3 – Institutionnalisation, retour réflexif

Durée : 15 minutes.

Le professeur questionne les élèves sur l’activité réalisée :

- « Quel nageur a parcouru la plus petite distance ? »
- « Quelle distance a parcourue le nageur E ? »
- « Quels nageurs ont parcouru plus de 2 unités ? etc. »

Pour vérifier les réponses, les élèves répètent les mesurages, verbalisent leurs actions et expriment les résultats en utilisant les nombres entiers et les fractions.

Nombres choisis pour cette activité

A = 2 u	B = 2 u + $\frac{3}{4}$ u	C = 2 u + $\frac{2}{4}$ u	D = 1 u + $\frac{1}{4}$ u
E = 2 u + $\frac{1}{4}$	F = 3 u	G = 1 u + $\frac{2}{4}$ u	H = 1 u + $\frac{3}{4}$ u

Trace écrite collective

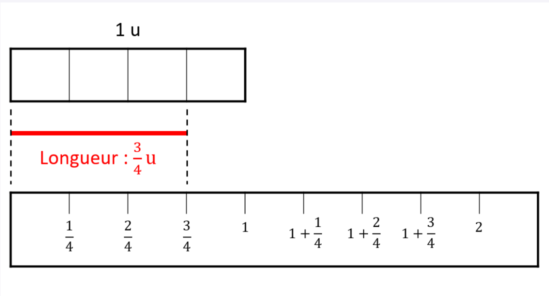
Le professeur complète l'affiche « Utiliser les fractions pour mesurer des longueurs » commencée lors de la séance 1. Il montre la bande unité qui avait servi de référence et demande à un élève de répéter une procédure pour construire une règle graduée en quarts d'unité.

Un second élève utilise cette règle graduée pour mesurer le segment rouge : la longueur de celui-ci est égale à trois quarts d'unité.

Pour finir, la règle graduée est collée sous le segment de manière à faire coïncider son origine et l'extrémité du segment.

Fin de la trace écrite commencée en séance 1

Utiliser les fractions pour mesurer des longueurs



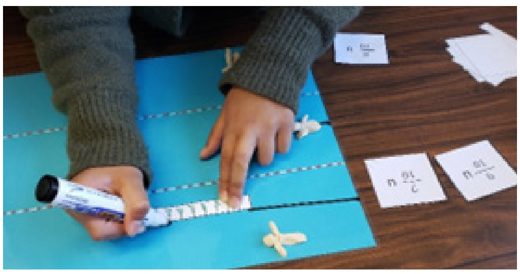
Présentation synthétique de la séance 5 – Tracer des segments à l'aide d'une règle graduée en dixièmes d'unité

Le professeur montre au tableau comment utiliser une règle graduée en fractions d'une unité u pour tracer un segment de longueur donnée, par exemple $\frac{7}{10}$ u. Il demande ensuite à un élève de prolonger ce premier segment en traçant, à partir de son extrémité, un segment de longueur égale à $\frac{4}{10}$ u, puis un autre de longueur égale à 1 u + $\frac{2}{10}$ u.

Il expose ensuite la règle d'un jeu dans lequel il faudra tracer des segments sur une feuille A3, segments qui représenteront les déplacements de nageurs dans une piscine. Les élèves joueront par groupes de 3. Une pioche est constituée avec des cartes sur lesquelles sont écrites les longueurs (exemple de matériel en **annexe** : longueurs allant de $\frac{1}{10}$ u à 1 u + $\frac{2}{10}$ u).

Exemple de déroulement du jeu : le premier élève pioche la carte $\frac{3}{10}$ u qui signifie que son personnage peut avancer d'une longueur correspondant à 3 dixièmes de l'unité : il utilise alors une règle graduée en dixièmes pour tracer un segment égal à $\frac{3}{10}$ d'unité. Lorsque ce sera à nouveau à lui de jouer, il repartira de l'extrémité du segment pour le prolonger. Les segments peuvent former une ligne brisée mais l'élève a tout intérêt à tracer une ligne la plus droite possible pour atteindre l'arrivée avant les concurrents.

Fin du jeu : Lorsqu'un joueur a tracé une ligne brisée lui permettant d'atteindre ou de dépasser l'extrémité de la feuille, on termine le tour de jeu car plusieurs concurrents peuvent être ex aequo.



Présentation synthétique de la séance 6 – Utiliser des égalités entre les fractions pour tracer des segments d'une longueur donnée

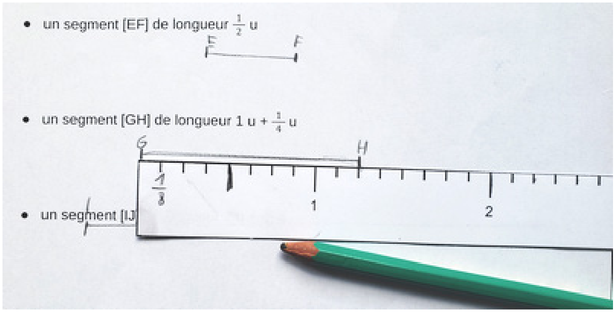
Durée

30 minutes.

Matériel

Règles graduées en huitièmes d'unité (sans fractions écrites) + document élève à photocopier (en annexe).

Description



Dans cette séance, les élèves mobilisent les égalités de fractions :

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{8} \qquad \frac{1}{2} = \frac{2}{4} \qquad \frac{1}{2} = \frac{2}{8}$$

Le professeur distribue à chacun des élèves une règle et leur demande de l'observer. L'unité de longueur qui a servi à construire cette règle est identifiée : c'est la longueur entre le bord de la règle et le point repéré par le nombre 1. Cette unité est partagée en huit parties égales, la règle est donc graduée en huitièmes d'unité.

Il demande aux élèves de montrer une longueur égale à 1 unité, puis $\frac{1}{2}$ d'unité, $\frac{1}{8}$ d'unité, $\frac{1}{4}$ d'unité et enfin 1 u + $\frac{1}{8}$ d'unité. Les élèves peuvent répondre en déplaçant leur doigt sur la règle. Le professeur pourra ensuite inciter les élèves qui en ont besoin à écrire sur leur règle pour placer certaines fractions, comme ils l'ont déjà réalisé lors des séances précédentes.

Les élèves ont pour consigne de tracer des segments de longueurs données en utilisant si besoin les relations entre les fractions qu'ils connaissent :

$\frac{7}{8}$ d'unité ; 2 unités + $\frac{5}{8}$ d'unité ; $\frac{1}{2}$ unité ; 1 unité + $\frac{1}{4}$ d'unité ; 2 unités + $\frac{3}{4}$ d'unité.

Afin de travailler sur les égalités $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$ et $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$, cette activité pourra être répétée, lors d'une nouvelle séance, avec une règle graduée en dixièmes d'unités. Les élèves traceront par exemple des segments ayant pour longueurs :

$\frac{7}{10}$ unité ; 2 unités + $\frac{3}{10}$ d'unité ; $\frac{1}{2}$ unité, 1 unité + $\frac{1}{5}$ d'unité ; 2 unités + $\frac{3}{5}$ d'unité.

Prolongement

Les règles graduées en fractions d'unité seront également utilisées lors de la séquence suivante pour comparer deux fractions dont l'une a un dénominateur multiple du dénominateur de l'autre. En effet, le positionnement des fractions sur la règle graduée permet de ranger les nombres dans l'ordre croissant et de pouvoir vérifier, par exemple, que $\frac{5}{8} < \frac{3}{4}$ ou $\frac{4}{10} < \frac{3}{5}$.

Proposition de séquence n° 2 – Multiplier un nombre par 4

Objectifs

Savoir multiplier un nombre par 4 en utilisant les doubles.

Savoir que pour multiplier par 4, on peut multiplier le nombre par 2 puis de nouveau par 2 (associativité de la multiplication).

Éléments de progression

Âge / niveau	Progressivité
CP	Mémoriser des faits numériques : • connaitre les doubles et les moitiés de nombres usuels.
CE1	Mémoriser des faits numériques : • connaitre dans les deux sens les tables de multiplication : table de 2 ; • connaitre des faits multiplicatifs usuels : - les doubles des nombres de 1 à 15, - les doubles des nombres 20, 25, 30, 35, 40, 45 et 50, - les doubles des nombres 100, 150, 200, 250, 300 et 500. Apprendre des procédures de calcul mental : • calculer le produit d'un nombre compris entre 11 et 19 par un nombre inférieur à 10 en décomposant le plus grand des deux facteurs en la somme de deux nombres (propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition).
CE2	Apprendre des procédures de calcul mental : • multiplier un nombre entier par 4 ou par 8 ; • calculer le produit d'un nombre compris entre 11 et 99 par un nombre inférieur à 10 en décomposant le plus grand des deux facteurs en la somme de deux nombres (propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition).
Au CM	Les procédures de calcul mental enseignées au C2 sont utilisées au cours des deux années de CM puis au collège, afin de renforcer leur automatisation. C'est le cas de multiplier un nombre par 4 ou par 8. Au cours du CM1 la procédure suivante sera enseignée : Multiplier par 5 un nombre entier inférieur à 200. Au cours du CM2 certaines procédures apprises seront étendues aux nombres décimaux (calculer le double d'un nombre décimal, multiplier un nombre décimal par 5, par 50.) et à la division (diviser un nombre entier par 4 ou par 8).

Enjeux pédagogiques

L'enseignement du calcul mental au cycle 2 est constitué de trois types d'apprentissages :

- mémoriser des faits numériques qui peuvent être restitués de façon quasi instantanée ;
- savoir utiliser les connaissances sur la numération pour effectuer des calculs rapidement en s'appuyant notamment sur la position des chiffres dans les nombres ;
- maitriser des procédures de calcul mental efficaces qui seront progressivement automatisées.

Automatisation des procédures

Des recherches en neurosciences mettent en évidence que la construction d'automatismes est fondamentale pour l'apprentissage des mathématiques, d'une part pour que la mémoire de travail soit la plus libre possible lors de la résolution d'une tâche mathématique complexe, d'autre part pour augmenter la confiance en soi de chaque élève vis-à-vis de tâches mathématiques.

Par exemple, dans son ouvrage *Le calcul mental entre sens et technique* (2007), Denis Butlen, souligne que l'automatisation des procédures de calcul mental est essentielle pour libérer les ressources cognitives des élèves, leur permettant ainsi de se concentrer sur des tâches plus complexes et conceptuelles. Il préconise toutefois que cette automatisation s'accompagne d'un travail sur la compréhension des nombres et des opérations afin de favoriser une adaptabilité efficace des élèves face aux problèmes rencontrés. Jérôme Prado, chercheur au Centre de Recherche en Neurosciences de Lyon[1], s'intéresse également aux mécanismes de mémorisation et à leur impact sur l'apprentissage des mathématiques. Il explique que l'automatisation des procédures de calcul mental permet de réduire la charge cognitive, libérant ainsi de l'espace en mémoire de travail pour des tâches plus complexes. Prado souligne que pour atteindre cette automatisation, il est crucial de pratiquer régulièrement le calcul mental, en intégrant des activités variées et ludiques qui encouragent la répétition et la consolidation des connaissances.

Pour favoriser la construction de ces automatismes, trois principes sont mis en avant dans des recherches en psychologie cognitive :

- une pratique répétée de la procédure visée ;
- des révisions étalées dans le temps, alternées avec d'autres apprentissages ;
- des tests destinés à consolider la mémorisation.

Du calcul en ligne vers le calcul mental

Certaines procédures de calcul mental peuvent nécessiter de garder des résultats intermédiaires en mémoire, ce qui peut être difficile pour certains élèves. Ceux-ci seront encouragés à noter par écrit des résultats intermédiaires au début des apprentissages, puis à alléger progressivement le recours à l'écrit, jusqu'à s'en libérer totalement dès qu'ils n'en auront plus besoin.

Enseignement de procédures de calcul mental

Les procédures indiquées dans le programme, ici multiplier un nombre par 4 ou par 8 mettent en jeu une propriété de la multiplication, l'associativité. Cette propriété si elle ne doit pas être citée avec les élèves, doit faire l'objet d'une séquence d'enseignement explicite et donner lieu à une trace écrite.

1. Les automatismes au collège. MENJS.

Déroulement de la séquence

Prérequis

L'élève a appris à déterminer le double d'un nombre inférieur à 99 (certains de ces doubles sont connus par cœur). Pour les autres il sait déterminer le double d'un nombre de façon très rapide quand il n'y a pas de retenue en s'appuyant sur sa connaissance de la numération, par exemple, pour le double de 34 (3 dizaines plus 3 dizaines plus 4 unités plus 4 unités font 6 dizaines et 8 unités, c'est-à-dire soixante-huit). Lorsqu'il existe une retenue, l'élève peut utiliser une décomposition du nombre afin de s'appuyer sur des doubles connus et la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition pour trouver le double recherché, par exemple :

$2 \times 27 = 2 \times (20 + 7) = (2 \times 20) + (2 \times 7) = 40 + 14 = 54$, ou encore :

$2 \times 27 = 2 \times (25 + 2) = (2 \times 25) + (2 \times 2) = 50 + 4 = 54$.

Dans cette séquence, l'élève s'appuiera sur la connaissance des faits multiplicatifs usuels (nombres de 1 à 20, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 60 et 75 ; 100,150,200,250,300, 400, 500 et 600).

La séquence comprendra plusieurs séances qui respecteront les rythmes d'apprentissages des élèves.

Variable didactique utilisée pour structurer la séquence

Dans un premier temps, les nombres utilisés dans la séquence sont choisis parmi ceux dont les élèves connaissent déjà les doubles, en s'appuyant sur la mémorisation des faits numériques travaillés antérieurement (comme les doubles des nombres11, 12, 16, 17, 30, 35, 40, 45, 50, 60, 75, 150, 250, 300, 400, 500 et 600). En s'appuyant sur des doubles déjà connus, le choix des nombres facilite l'introduction de la procédure visée : « multiplier par 4, c'est faire le double du double », ce qui aide les élèves à se l'approprier progressivement.

Une fois cette stratégie assimilée, la séquence s'ouvre progressivement à des nombres plus variés, pour lesquels les élèves ne disposent pas nécessairement de doubles déjà connus. Cette évolution vise à faire émerger et verbaliser différentes procédures de calcul (utilisation de tables connues, doubles successifs, propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, utilisation des connaissances en numération etc.), tout en développant la flexibilité numérique et le raisonnement mathématique.

Progression	Composante	Focus
Séance 1 (45 minutes)	Découverte de la procédure multiplier un nombre par 4 à partir d'une situation problème. La procédure enseignée est le double du double. Institutionnalisation de la procédure visée (double du double) et production d'une trace écrite, entrainement et évaluation formative.	Cf. focus Différenciation : les outils de manipulation doivent être mis à disposition des élèves en cas de besoin.

Progression	Composante	Focus
Plusieurs séances (3 ou 4) courtes de (5 à 15 minutes)	**Entrainement** Les séances commenceront par un petit rappel de la procédure (double du double). Première séance : calculs sur l'ardoise, avec correction collective au tableau en utilisant la procédure (double du double). Les calculs seront donnés un par un. **Choix des nombres** 11, 12, 16, 17, 30, 35, 40, 45, 50, 60, 75, 110, 120, 150, 160, 170, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 600, 750, 1 500, 2500 puis élargissement progressif à des nombres dont le chiffre des unités est compris et 1 et 5. À partir de la deuxième séance : plusieurs calculs pourront être proposés sur fiche par exemple en augmentant progressivement le nombre de calculs (proposer par exemple 3 calculs en 3 minutes puis augmenter progressivement le nombre de calculs dans le même temps, en fonction des réussites des élèves.).	Ces séances pourront être proposées en rituels.
Évaluation intermédiaire à visée formative	**Évaluation intermédiaire** (lorsque tous les élèves maitrisent la procédure). Multiplier un nombre par 4 en utilisant la procédure du double du double. **Choix des nombres** 11, 12, 16, 17, 30, 35, 40, 45, 50, 60, 75, 110, 120, 150, 160, 170, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 600, 750, 1 500, 2 500 et des nombres dont le chiffre des unités est compris et 1 et 5.	Évaluation chronométrée de l'automatisation de l'utilisation de la procédure à l'aide d'une fiche de 6 à 9 calculs en 3 minutes.
Séance 5	**Renforcement** en introduisant des nombres en jeu qui ne nécessitent pas nécessairement l'utilisation de la procédure (multiplier des dizaines entières par 4, multiplier un nombre inférieur à 10 par 4 en utilisant les tables de multiplication, utilisation de la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, etc.). **Institutionnalisation en fin de séance** La trace écrite élaborée en séance 1 sera complétée par les cas particuliers pour lesquels l'utilisation de la procédure n'est pas pertinente. Exemple : « Pour multiplier par 4 des dizaines entières : 4 x 20 c'est 4 fois deux dizaines, donc 8 dizaines ou 80. 4 x 20 = 80. Pour multiplier par 4 des nombres inférieurs à 10, on utilise la table de multiplication par 4 4 x 8 = 32. ».	
Séances très courtes (5 à 10 minutes)	Réinvestissement Les fiches de calcul intègreront des calculs avec les dizaines entières et la table de 4 aux calculs avec la procédure enseignée x 2 x 2.	Ces séances pourront être proposées en rituels.
Tout au long de l'année	Des séances de renforcement et d'évaluations chronométrées seront proposées tout au long de l'année, régulièrement, afin de permettre la stabilisation de la procédure (maintien en mémoire).	

Évaluation

Le travail mené lors de chaque séance doit permettre au professeur d'identifier rapidement les élèves qui ont compris la procédure et ceux qui ont encore besoin d'explication ou d'accompagnement.

L'évaluation de la séance 4 consistera en un certain nombre de calculs x 4 à effectuer en un temps limité sur fiche.

Le temps limité est important puisqu'il valide l'efficience de la procédure. La procédure efficace est en effet la procédure la plus rapide en fonction des nombres en jeu. Il permet également de conduire les élèves à abandonner les procédures les moins efficientes qui sont les plus couteuses en temps, comme ici, l'addition réitérée par exemple.

D'autre part, les études montrent que les filles sont plus impactées lors des évaluations par le chronomètre. Il est donc nécessaire tout au long de l'année de les confronter à l'usage du chronomètre pour les y habituer et faire diminuer leur appréhension devant des exercices en temps limité afin d'automatiser les procédures utilisées.

Les séances courtes d'entrainement pourront être faites en rituels plusieurs fois par semaine sur une période. Ces séances courtes permettront aux élèves de s'entrainer au départ uniquement sur la procédure enseignée, c'est-à-dire x 2 x 2. Progressivement, lorsque l'institutionnalisation des cas particuliers aura été faite, des calculs du type 4 fois des dizaines entières ou résultats de la table de 4, seront intégrés aux fiches proposées.

Enfin lorsque les élèves auront maitrisé la procédure ainsi que les cas particuliers, on mélangera les procédures enseignées depuis le début de l'année avec l'objectif de travailler à la prise de décision de la procédure à utiliser.

Au fur et à mesure que les élèves s'approprient les différentes procédures de calcul pour les maitriser, le nombre de calculs proposés augmente afin d'atteindre le nombre de calculs attendu les programmes. L'objectif est que, d'ici la fin du CE2, les élèves soient capables de produire 15 résultats corrects en moins de 3 minutes.

Des entrainements réguliers seront organisés pour développer et évaluer la fluence numérique. Le professeur proposera des séries de 20 calculs, en lien avec les procédures vues en classe. L'objectif est d'aider les élèves à gagner en rapidité et à adopter des stratégies efficientes, comme par exemple celle de « passer » un calcul qui leur semble difficile pour y revenir plus tard, sans rester bloqués. Les entrainements pourront être de ce type (en fonction des procédures enseignées précédemment) :

4 x 23 = ….	4 x 41 = ….	45 + 30 = ….	2 x 36 = ….
4 x 30 = ….	19 + 24 = ….	4 x 17 = ….	4 x 27 = ….
37 + 19 = ….	4 x 38 = ….	28 = 4 x ….	4 x 15 = ….
2 x 18 = ….	47 + 29 = ….	4 x 40 = ….	4 x …. = 36
4 x 32 = ….	4 x 21 = ….	4 x 6 = ….	27 + 19 = ….

Focus sur la séance 1 – Découverte de la procédure multiplier un nombre par 4 en calculant le double du double

Objectifs

Être capable de multiplier mentalement, en notant éventuellement le résultat intermédiaire, un nombre inférieur à 100 par 4, en multipliant deux fois de suite ce nombre par 2.

Critère de réussite

L'élève doit savoir que pour multiplier par 4 il faut multiplier deux fois par 2, il doit aussi être capable de multiplier par 2 un nombre, mentalement ou en ligne (en notant le résultat intermédiaire) puis de le multiplier de nouveau par 2.

Les élèves s'appuient sur leur connaissance des doubles (faits multiplicatifs). En fin de CE1, ils doivent être capables de réussir huit égalités en une minute et douze en une minute à la fin du CE2. Il est donc essentiel de maintenir un entrainement régulier aux faits numériques en parallèle.

Temps 1 – Définition des objectifs et mise en réussite

Résolution d'une situation problème présentée au tableau (5 minutes).

Problème

« La directrice de l'école veut commander des livres pour mettre dans les bibliothèques des 4 classes de l'école. Elle prévoit d'acheter 35 livres par classe. Combien de livres va-t-elle commander ? ».

Laisser les élèves chercher sur l'ardoise. Mettre à disposition des élèves les cubes emboitables ou autre matériel de manipulation de la classe, si besoin.

Enseignement de la procédure (15 minutes).

Au terme de la phase de recherche, le professeur interroge les élèves pour qu'ils disent comment ils ont fait pour trouver le nombre de livres commandés par la directrice.

Le professeur met en évidence celles qui sont moins efficientes, notamment en raison de leur lenteur ou du risque d'erreurs qu'elles peuvent entrainer lorsqu'elles sont utilisées avec de grands nombres. Si la procédure a été utilisée par un des élèves, la mettre en valeur à ce moment. « J'ai vu que X a réussi le calcul rapidement en utilisant une autre façon de procéder. Je vais vous montrer comment il a procédé ».

Si la procédure n'est pas apparue, le professeur l'introduit en la présentant comme plus efficiente (c'est-à-dire plus sure et plus rapide).

Si la procédure 4 x 35 = 2 x 2 x 35 n'est pas évoquée par les élèves, l'introduire avec du matériel de manipulation au tableau, en verbalisant ou faisant verbaliser la procédure par les élèves.

« La directrice va acheter 4 fois 35 cahiers, c'est-à-dire qu'elle va acheter 2 fois, 2 fois 35 cahiers, soit 2 fois 2 fois 35, soit :

2 x 35 = 70.

2 x 70 = 140.

Pour multiplier par 4 un nombre, on peut donc prendre le double du double de ce nombre, donc le multiplier deux fois de suite par 2 ».

Points d'attention

Si certains élèves proposent directement une procédure de distributivité, c'est-à-dire 4 x 30 + 4 x 5, on valorisera cette procédure qui reste très efficiente. L'élève apprend également cette procédure de x 4 = x 2 x 2.

Cette procédure sera particulièrement efficiente pour des calculs qui impliquent les doubles à connaitre dans les faits numériques.

Autres procédures enseignées.

Objectifs	Exemples	Procédures
Multiplier par 4 un nombre inférieur à 10.	4 x 8	L'élève fait appel aux résultats mémorisés de la table de multiplication par 4.
Multiplier par 4 un nombre dont je dois connaitre les faits multiplicatifs.	4 x 25 4 x 15	L'élève fait appel aux résultats mémorisés.
Multiplier par 4 une dizaine entière.	4 x 20	L'élève multiplie directement le nombre de dizaines : 4 fois 2 dizaines, cela fait 8 dizaines donc 80.
Multiplier par 4 un nombre en utilisant la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Favoriser le choix des nombres dont les unités sont supérieures à 5.	4 x 36	L'élève utilisera directement la procédure de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition : 4 x 36 = 4 x 30 + 4 x 6.

Le professeur veillera donc pendant la séquence de ne poser que des calculs pour lesquels la procédure enseignée est pertinente. Il demandera donc dans un premier temps des calculs impliquant les doubles connus. Puis en favorisant des nombres dont les unités sont inférieures ou égales à 5.

- Un obstacle didactique de cette notion est la multiplication d'un nombre par 2. Pour que cette procédure de multiplication 2 fois par 2, soit efficiente, il sera donc nécessaire en amont d'avoir travaillé les faits multiplicatifs.
- La verbalisation de la procédure est essentielle à toutes les étapes de l'apprentissage. Le professeur puis les élèves, devront pouvoir expliciter les différentes étapes de la procédure.
- Il sera important de porter une attention particulière au matériel de manipulation employé, certaines représentations du nombre étant en effet pour le calcul, plus difficiles à utiliser. L'utilisation d'un matériel de manipulation se composant de cubes emboitables par exemple, permet à l'élève de composer et décomposer rapidement des barres de dizaines.

Temps 2 – Mise en activité des élèves

Quelques calculs sont proposés à la classe et résolus sur l'ardoise à l'aide de la procédure, comme 4 x 45, 4 x 150, 4 x 16, 4 x 250, etc.

Différenciation

Certains élèves peuvent avoir besoin de recourir temporairement au matériel de manipulation ou à sa représentation schématisée sur l'ardoise (barres de dizaines et d'unités) pour se sécuriser dans la mise en œuvre de la procédure. Il sera toutefois important de limiter progressivement cet appui et de ne le conserver que pour la validation du calcul, afin de permettre aux élèves d'abstraire la notion.

Temps 3 – Institutionnalisation, retour réflexif

L'institutionnalisation de la procédure donnera lieu à une trace écrite dans un cahier dédié aux apprentissages mathématiques. Le temps d'institutionnalisation est incontournable pour que l'apprentissage s'effectue correctement par l'élève.

Par exemple : pour multiplier un nombre par 4, on peut le multiplier par 2 puis de nouveau par 2.

Par exemple : 4 x 45 = 2 x 2 x 45 = 2 x 90 = 180.

Séance 5 – Renforcement

À partir de la séance 5, le professeur introduit progressivement d'autres nombres que ceux utilisés pour les séances 1 à 4, comme par exemple 18, pour lesquels différentes stratégies sont possibles. Il verbalise les stratégies et les fait verbaliser par les élèves. Les stratégies s'appuient sur les faits numériques, sur les connaissances de l'élève en numération ou sur des procédures connues (dont la propriété de distributivité).

Exemples de stratégie possible : utilisation des tables de multiplication et associativité de la multiplication :

4 x 18 = 4 x 2 x 9 = 8 x 9 = 72.

Utilisation du double du double et des connaissances en numération :

2 x 18 = 36.

2 x 3 dizaines = 6 dizaines ; 2 x 6 unités = 12 unités ; 12 unités = 1 dizaine + 2 unités ; 7 dizaines et 2 unités ça donne 72.

Utilisation du double du double et de la propriété de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition :

2 x 18 = 36.

2 x 36 = 2 x 30 + 2 x 6 = 60 + 12 = 72.

Utilisation de la propriété de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition avec différentes décompositions additives de 18 :

4 x 20 – 4 x 2 = 80 – 8 = 72

4 x 15 + 4 x 3 = 60 + 12 = 72

4 x 10 + 4 x 8 = 40 + 32 = 72, etc.

Proposition de séquence n° 3 – Résoudre des problèmes additifs en deux étapes au CE2

Objectif

Résoudre des problèmes du champ additif en deux étapes : une étape de comparaison et une étape de type parties-tout.

Éclairage de la recherche

La séquence proposée a été construite en référence à des travaux de recherche portant sur la résolution de problèmes arithmétiques dont les références sont recensées dans le chapitre IV du guide *La résolution de problèmes au cours moyen* disponible sur éduscol[2].

Elle est fondée sur différents principes.

- La séquence est centrée sur une famille de problèmes partageant la même structure. Il s'agit ainsi de procurer aux élèves de nouvelles occasions d'enrichir leur mémoire de problèmes « routiniers » résolus, en faisant l'hypothèse qu'ensuite, face à un problème inédit, ils pourront, par des analogies avec certains de ces problèmes, en tirer parti (Houdement, 2017).
- Cette famille de problèmes est constituée de problèmes dont la résolution ne se réduit pas à une seule étape, mais passe par plusieurs étapes. Proposer des problèmes à plusieurs étapes est nécessaire pour éviter de laisser des élèves penser que résoudre un problème consiste à trouver « LA » bonne opération. Cela permet aussi au professeur de détecter des difficultés d'élèves en limitant les « faux-positifs » que l'on observe parfois lors de la résolution de problèmes en une seule étape, c'est-à-dire le recours à des opérations qui sont correctes, mais qui sont en réalité proposées au hasard ou à partir d'un raisonnement fondé sur des indices superficiels.
- Il s'agit de développer chez les élèves des stratégies de résolution de problèmes comme « *lire le problème, identifier la question, analyser les données et les relations* » ; ceci est « *important parce que beaucoup d'élèves sautent cette étape pour sélectionner directement les nombres et les mots-clés présents dans l'énoncé en vue de choisir l'opération à utiliser. Même si ces stratégies ne garantissent pas la résolution correcte du problème, habituer les élèves à se questionner avant de " foncer tête baissée " dans les calculs constitue déjà en soi un élément essentiel pour lutter contre les stratégies superficielles.* » (Fagnant, 2022).
- Dans la séquence proposée ici, l'enseignement de ces stratégies passe par l'enseignement d'un schéma efficace pour représenter les nouveaux problèmes qui sont rencontrés. Cet enseignement est complété par des éléments liés à la résolution de problèmes à plusieurs étapes : l'attention des élèves est portée sur la planification des étapes de la résolution et la « qualification » des résultats des étapes intermédiaires par des phrases explicitant le rôle de chacune des grandeurs calculées dans le problème (Houdement, 2017).

2. La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen

Éléments de progression

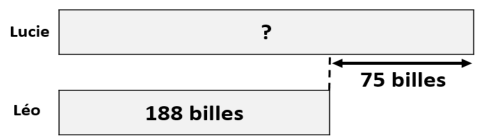
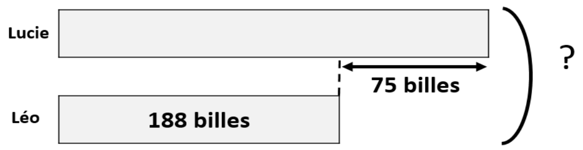
Deux grandes familles de **problèmes additifs en une étape** sont travaillées **dès le cycle 1** :

- les problèmes de type **parties-tout**, pour lesquels les élèves doivent déterminer le tout ou une partie ;
- les problèmes de **comparaison**, pour lesquels les élèves doivent déterminer le cardinal d'une collection à partir de celui d'une autre collection et de l'écart entre les deux. Pour ces derniers, les élèves rencontrent des énoncés **concordants avec l'opération à effectuer** (comme « Pierre a cinq billes. Julie a trois billes de plus que Pierre. Combien Julie a-t-elle de billes ? », où l'on entend « de plus » et où la réponse est apportée par la somme de cinq et de trois), mais également **des énoncés discordants avec l'opération à effectuer** (comme « " Pierre a cinq billes. Il a trois billes de moins que Julie. Combien Julie a-t-elle de billes ? ", où l'on entend " de moins " et où l'on cherche pourtant la plus grande valeur).

Depuis le CP, les élèves résolvent **des problèmes additifs en deux étapes relevant toutes les deux de la même structure** (soit parties-tout, soit comparaison) ; par exemple, au CE1, les élèves résolvent des problèmes de comparaison en deux étapes comme : *Elsa a 15,30 €. Noé a 6 € de plus qu'Elsa. Martin a 2 € de moins que Noé. Quelle somme d'argent a Martin ?*

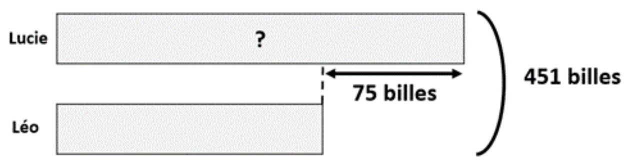
Dans la séquence développée dans ce document, les élèves apprennent à résoudre **des problèmes additifs en deux étapes combinant les deux structures** : ce sont des problèmes dans lesquels deux valeurs sont comparées, et où, connaissant l'une d'entre elles et l'écart entre les deux, on cherche « le tout » (c'est-à-dire la somme des deux valeurs).

Au CE1, des représentations associées à chacune des deux familles de problèmes en une étape sont enseignées aux élèves. Dans la séquence présentée ici, **le schéma qui est enseigné reprend celui qui est utilisé pour des problèmes de comparaison en une étape, complété par le signe qui matérialise le tout dans le schéma utilisé pour représenter les problèmes de parties-tout en une étape**.

Schéma enseigné au CE1 pour les problèmes de comparaison en une étape	Schéma enseigné dans cette séquence
	

En accord avec ce qui est proposé dans le guide *La résolution de problèmes au cours moyen* (*ibid.*, p. 118), les longueurs respectives des deux barres intérieures ne font pas l'objet d'un questionnement : en particulier, on ne cherche pas à construire des barres de longueurs proportionnelles aux valeurs qu'elles représentent.

Au cycle 3, les élèves apprendront à résoudre des problèmes faisant intervenir les mêmes composantes, mais pour lesquels ce sont l'écart et le tout qui sont connus, comme : *Léo et Lucie ont des billes. Lucie a 75 billes de plus que Léo. En tout, ils ont 451 billes. Combien de billes Lucie a-t-elle ?*



Démarche d'enseignement

Choix de conception et variables didactiques utilisées pour structurer la séquence

- **La structure des problèmes : les premières séances de la séquence** comportent uniquement des énoncés de problèmes relevant de la nouvelle structure visée dans la séquence : deux grandeurs sont comparées, une des deux valeurs est connue, l'écart est connu, et on cherche le tout. Les problèmes proposés se résolvent donc tous en deux étapes, la seule variation portant sur la valeur inconnue : dans certains cas, la valeur inconnue est la plus grande des deux valeurs (et le problème se résout par deux additions) ; dans les autres cas, la valeur inconnue est la plus petite (et le problème se résout par une soustraction et une addition). Pour éviter de laisser des stratégies superficielles se développer (comme « j'entends ou je lis *de plus*, donc je fais une addition »), des énoncés discordants avec l'opération à effectuer sont présents dès la séance 1. Il s'agit donc d'amener les élèves à repérer pour chaque nouveau problème si la valeur inconnue est la plus grande ou la plus petite des deux valeurs.
  Dans la suite de la séquence, les problèmes proposés continuent à comporter des problèmes relevant de la principale structure travaillée dans la séquence, mais sont mélangés avec des problèmes dont la résolution ne nécessite qu'une seule opération : problèmes additifs en une étape de type parties-tout ou de comparaison. Il s'agit alors de développer la flexibilité des élèves et leur capacité à planifier une solution : *pour résoudre ce problème, que vais-je d'abord calculer ?*
- **Les grandeurs :** les premiers problèmes de la séquence portent sur des quantités, qui sont des grandeurs qui peuvent être facilement représentées par un matériel comme du matériel multibase (une unité pour un cube, une barre pour une dizaine, etc.). Ceci est utilisé en début de séquence pour introduire le schéma en barres enseigné dans la séquence.
  Dans la suite de la séquence, d'autres grandeurs sont présentes : monnaie, longueurs, durées. La présence dans un énoncé d'une nouvelle grandeur ne doit pas constituer un « événement » pour les élèves : il s'agit au contraire d'apprendre aux élèves à faire abstraction des grandeurs en jeu pour se concentrer sur les relations d'inclusion et de comparaison présentes dans l'énoncé.
- **L'habillage des énoncés :** selon les séances, les habillages sont les mêmes pour tous les problèmes de la séance ou varient d'un problème à l'autre :
  - dans le premier cas, il s'agit de permettre aux élèves de se focaliser sur ce qui varie par ailleurs, en l'occurrence la structure du problème (*Il y a un tout et deux parties. Connait-on déjà ces deux parties ? Faut-il d'abord calculer l'une d'elles ? Est-ce la plus grande ? la plus petite ?*) ;
  - dans le second cas, il s'agit d'apprendre aux élèves à faire abstraction de l'habillage des énoncés pour reconnaitre des problèmes de même structure.
- **Les nombres :** les données numériques relèvent du champ numérique visé en CE2 ; les nombres entiers portent jusqu'à 1000, et des nombres décimaux sont proposés dans le contexte de la monnaie. Cependant, pour alléger les tâches de calcul et permettre aux élèves de porter d'abord leur attention sur la structure des problèmes, le choix a été fait de proposer en début de séquence une majorité d'énoncés avec des données inférieures à 100 (des nombres plus grands et des nombres décimaux étant présents dans la suite de la séquence). Le champ numérique est également adapté en fonction de la modalité de calcul que l'on souhaite faire mobiliser (calcul mental ou calcul posé) ; par exemple, pour les séances courtes de cette séquence, le choix a été fait de proposer des nombres adaptés à des procédures de calcul mental bien identifiées et déjà enseignées (comme ajouter deux nombres inférieurs à 100 ; ajouter ou soustraire un nombre entier de dizaines ; ajouter 9 ou 19 ; soustraire un nombre inférieur à 9).

Déroulement de la séquence

Séances	Objectifs	Durée	Modalité
Focus séance 1 Annexe n° 1	**Apprendre à représenter et à résoudre des problèmes appartenant à une nouvelle famille.** **Structure :** problèmes en deux étapes : une étape de comparaison et une étape de type parties-tout. **Grandeurs et habillages :** quantités (billes).	50 min	Enseignement d'une procédure de résolution de problème et élaboration d'une trace écrite de référence. Entrainement guidé (différenciation portant sur le nombre de problèmes traités et sur l'accompagnement par le professeur).
Séances courtes Annexe n° 2	**Apprendre à faire des analogies entre problèmes ayant la même structure mais des contextes différents.** **Structure :** idem séance 1. **Grandeurs et habillages :** quantités (habillages variés).	15 min	Séance courte, sur ardoise, avec résolution de trois problèmes dont les énoncés sont donnés oralement.
Séance 3 évaluation intermédiaire Annexe n° 3	**Évaluation intermédiaire et remédiation.** Identifier les élèves en difficulté pour modéliser des problèmes semblables aux problèmes abordés dans les séances 1 et 2 et leur apporter une aide supplémentaire. **Structure, grandeurs, habillages :** idem séances 1 et 2.	10 min + 20 min	Évaluation courte (deux problèmes). Remédiation en petits groupes pendant le temps de classe ou en APC, avec possibilité de manipulation de matériel tangible.
Séances courtes Annexe n° 4	**Développer la flexibilité des élèves : apprendre à faire des analogies entre problèmes ayant la même structure mathématique mais faisant intervenir des grandeurs de nature différente.** **Structure :** idem séance 1. **Grandeurs et habillages :** monnaie (ardoises effacées).	15 min	Séance courte, sur ardoise, avec résolution de trois problèmes dont les énoncés sont donnés oralement.
Séances 5 et 6 Annexes n° 5 et 6	**Développer la flexibilité des élèves : apprendre à discerner et résoudre des problèmes additifs en une ou deux étapes.** **Structures :** alternance de problèmes en une étape (parties-tout ou comparaison) avec des problèmes en deux étapes combinant les deux structures. **Grandeurs et habillages :** fixés pour une séance. Séance 5 : monnaie (ardoises effacées). Séance 6 : quantités (pommes).	15 min	Séances courtes, sur ardoise, avec résolution de trois problèmes dont les énoncés sont donnés oralement.

Séances	Objectifs	Durée	Modalité
Séances 7 Annexe n° 7	**Entrainement individuel après les séances 5 et 6.** **Structures :** idem séances 5 et 6. **Grandeurs et habillages :** quantités, monnaie (habillages variés).	30 min	Résolution individuelle d'une liste de problèmes (différenciation portant sur le nombre de problèmes traités et sur l'accompagnement par le professeur).
Séances 8 et 9 Annexes n° 8 et 9	**Développer la flexibilité des élèves : apprendre à discerner et résoudre des problèmes additifs en une ou deux étapes portant sur des grandeurs variées.** **Structures :** alternance de problèmes en une étape (parties-tout ou comparaison) avec des problèmes en deux étapes combinant les deux structures. **Grandeurs et habillages :** Séance 8 : longueurs (bandes de papier). Séance 9 : durées (emploi du temps de la classe).	15 min	Séances courtes, sur ardoise, avec résolution de trois problèmes dont les énoncés sont donnés oralement.
Séance 10 Annexe n° 10	**Entrainement individuel après les séances 8 et 9.** **Structures :** idem séances 8 et 9. **Grandeurs et habillages :** quantités, monnaie, longueurs, durées (visite d'une exposition).	30 min	Résolution individuelle d'une liste de problèmes (différenciation portant sur le nombre de problèmes traités et sur l'accompagnement par le professeur).
Séance 11 Annexe n° 11	**Évaluation – Bilan de fin de séquence.** **Structures :** problèmes en deux étapes combinant les deux structures, avec un intrus : problème de comparaison en une étape. **Grandeurs et habillages :** idem séance 10.	20 à 30 min	Résolution individuelle de cinq problèmes similaires à des problèmes résolus pendant la séquence.
Après la séquence	**Entretenir les savoir-faire acquis pendant la séquence.** Les grandeurs qui interviennent dans les énoncés sont variées (en particulier, des masses et des contenances sont introduites). Des énoncés discordants sont régulièrement présents.	15 min	Régulièrement, des résolutions de problèmes sont proposées lors de séances ponctuelles, par exemple dans le créneau dédié au calcul mental. Elles sont effectuées sur ardoise ou sur le cahier d'entrainement.

Focus sur la séance 1 – Déroulement intégral

Le déroulement des séances longues est largement inspiré du déroulement d'une séance décrite en CM2 et d'une séance filmée en CP, dont on peut prendre connaissance en consultant le focus de fin de chapitre II du guide *La résolution de problèmes au cours moyen* disponible sur éduscol[3].

Temps 1 – Définition des objectifs et mise en réussite (25 minutes)

Présentation des objectifs de la séquence

Le professeur indique aux élèves qu'une nouvelle séquence de mathématiques débute et qu'au cours de cette séquence, ils vont apprendre à résoudre de nouveaux problèmes. Il précise que cette séquence va se dérouler sur plusieurs séances ; dans les premières séances, ils vont travailler uniquement sur des problèmes qui appartiennent tous à une nouvelle famille ; ensuite, dans les séances suivantes, ces problèmes seront mélangés à des problèmes appartenant à d'autres familles que les élèves ont déjà rencontrées. Au terme de la séquence, le répertoire de problèmes que les élèves sauront résoudre sera donc enrichi.

Présentation du premier problème et recherche individuelle (5 minutes)

Le professeur projette l'énoncé du problème (ou l'écrit au tableau), laisse quelques instants aux élèves pour le lire seuls, puis le lit :

Problème

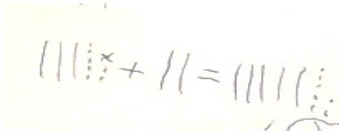
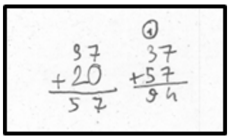
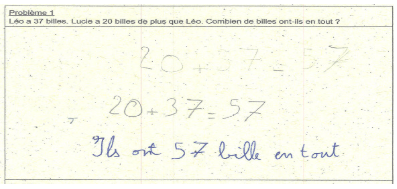
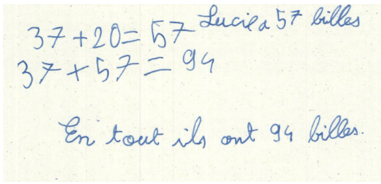
Léo a 37 billes. Lucie a 20 billes de plus que Léo.

Combien de billes ont-ils en tout ?

La phase de recherche individuelle dure environ trois minutes : le professeur invite les élèves à résoudre individuellement le problème, en les rassurant : comme la situation est nouvelle, il est possible de ne pas savoir faire ; l'essentiel est de chercher ! Le professeur circule dans les rangs pour prendre connaissance des productions des élèves. Il encourage toute tentative de recherche et valorise les réussites.

Une erreur possible consiste à ajouter les deux données numériques de l'énoncé (à gauche ci-dessous) ; le professeur en prend note, mais sans intervenir pour le moment. Parmi les productions correctes, on peut relever des calculs effectués aussi bien en calcul mental qu'en calcul posé (à droite ci-dessous) : les deux sont possibles même si, lors de la correction, le calcul mental sera valorisé (procédure d'ajout d'un nombre entier de dizaines). Enfin, dans la rédaction des réponses, on peut trouver des productions sans aucune phrase, des productions avec une phrase-réponse finale, et des productions avec chaque calcul remis en contexte : c'est ce dernier type de rédaction qui sera mis en avant lors de la correction (cf. importance de la « qualification des résultats intermédiaires » rappelée dans la partie « Éclairage de la recherche »).

3. La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen (pages 56 à 63)

Résolutions erronées : ajout des deux nombres de l'énoncé	Résolutions correctes
	
	

Enseignement de la procédure de résolution visée (10 minutes)

Le professeur indique aux élèves que certains d'entre eux ont correctement résolu le problème, d'autres non, mais rappelle que ne pas avoir réussi lors de cette première tentative n'a pas d'importance : c'est maintenant que les élèves vont apprendre à résoudre ce type de problèmes. Toute la classe va travailler ensemble pour bien comprendre le problème et aboutir à une correction qui sera écrite dans le cahier de leçons, de manière à ce que chacun puisse réussir ensuite, pendant les entrainements qui suivront, à résoudre des problèmes similaires.

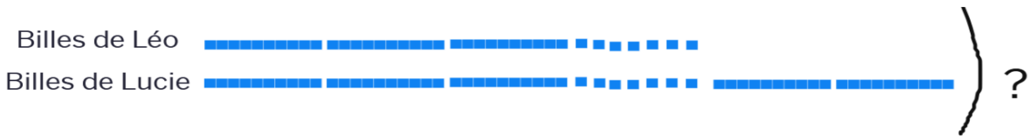
Le professeur relit l'énoncé et demande à un élève de raconter ce qu'il se passe dans cette histoire (par exemple à partir des questions « Quels sont les personnages ? Que sait-on à propos de ces personnages ? »), puis de dire ce que l'on cherche. Le professeur fait mettre en évidence que l'histoire fait intervenir deux personnages qui s'appellent Léo et Lucie, qui ont chacun des billes. Il demande à deux élèves de venir au tableau pour jouer la scène : un élève joue le rôle de Léo et un autre élève joue le rôle de Lucie. Le professeur peut choisir pour cela deux élèves qui, pendant la phase de recherche individuelle, ont résolu de manière erronée le problème en ajoutant les deux données numériques de l'énoncé.

Le professeur met à disposition des élèves un matériel organisé en dizaines et unités auquel les élèves sont habitués pour représenter des quantités (« Comme d'habitude pour résoudre des problèmes en mathématiques, nous n'avons pas besoin d'utiliser de vraies billes, mais nous allons représenter les billes avec le matériel de numération »). Il relit ensuite l'énoncé phrase par phrase pour accompagner la simulation de la situation par les deux élèves.

« *Léo possède 37 billes.* » L'élève qui joue le rôle de Léo doit préparer la bonne quantité de billes. Le professeur fait rappeler qu'on lit dans l'écriture du nombre que c'est 3 dizaines et 7 unités ; elles sont représentées au tableau sur une première ligne, étiquetée « Billes de Léo ».

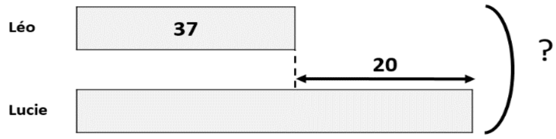
« *Lucie a 20 billes de plus que Léo.* » L'élève qui joue le rôle de Lucie doit préparer la bonne quantité de billes. Le professeur lui **demande d'abord lequel des deux personnages a le plus de billes**, puis demande de **représenter les billes de Lucie par le matériel, sans calcul, simplement en traduisant l'énoncé** : Lucie a 20 billes de plus que Léo, cela veut dire que Lucie a autant de billes que Léo, et, en plus, vingt billes (soit deux dizaines de billes en plus). La collection de billes est alors représentée au tableau par une deuxième ligne construite **en mettant « autant que pour Léo », et, en plus, deux dizaines**.

Le professeur porte ensuite l'attention des élèves sur la question : « Combien de billes ont-ils en tout ? ». Il fait expliciter que le pronom « ils » fait référence à Léo et Lucie, et que l'on cherche donc le nombre total de billes que les deux personnages ont en tout, comme le montre le point d'interrogation qu'il ajoute au schéma tracé au tableau :



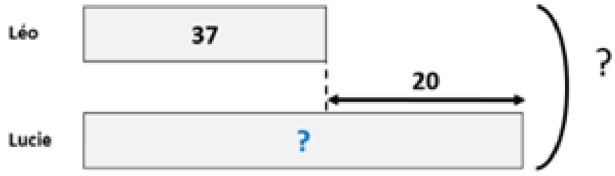
Le professeur rappelle alors que pour représenter un problème, il n'est pas utile de représenter toutes les billes : pour faciliter la représentation, on peut représenter chaque collection de billes par une barre et indiquer l'écart par une double flèche (comme pour les problèmes de comparaison en une étape que les élèves ont résolus auparavant).

Une fois la première barre tracée, le professeur demande : *Qui a le plus de billes ? Léo ou Lucie ?* Comme Lucie a 20 billes de plus que Léo, c'est elle qui a le plus de billes. La barre qui représente les billes de Lucie doit donc être plus longue que celle qui représente celles de Léo. Le point d'interrogation indique, lui, ce que la question demande de chercher. Le schéma en barres ci-contre est alors obtenu.



En pointant sur ce schéma d'abord la barre représentant les billes de Lucie, puis le point d'interrogation, le professeur indique que la résolution de ce problème va passer par deux étapes :

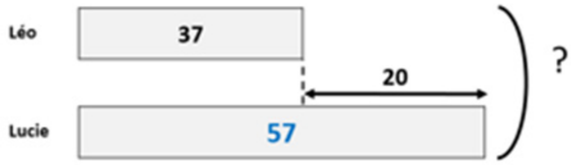
- une première étape pour calculer le nombre de billes de Lucie (un nouveau point d'interrogation est ajouté) ;
- une deuxième étape pour calculer le nombre de billes que Lucie et Léo ont en tout.



Le professeur termine alors la correction :

Je commence par calculer le nombre de billes de Lucie.

C'est Lucie qui a le plus de billes, donc pour trouver le nombre de billes qu'elle a, je fais une addition. J'ajoute 37 et 20. J'obtiens 57, et j'en déduis que Lucie a 57 billes.



37 + 20 = 57
Lucie a 57 billes.

Je calcule ensuite le nombre de billes que Lucie et Léo ont en tout : j'ai deux parties (les billes de Lucie et les billes de Léo), je cherche la valeur totale, donc je fais une addition. J'ajoute 37 et 57, et j'en déduis qu'en tout, Léo et Lucie ont 94 billes.

57 + 37 = 94
Ils ont 94 billes en tout.

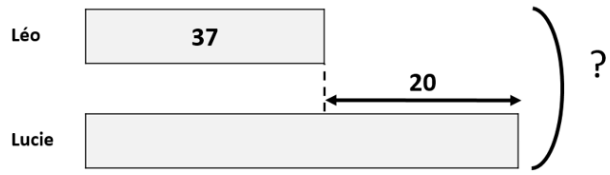
Au moment d'effectuer les additions, le professeur signale que lors de la recherche individuelle, il a remarqué que certains élèves ont effectué les calculs en posant les opérations, tandis que d'autres ont calculé mentalement. Il dit que les deux sont possibles, mais qu'ici il était plus simple de calculer mentalement.

Trace écrite (10 minutes)

Au terme de cette correction, un titre est donné à ce problème et les élèves copient une trace de la résolution dans leur cahier de leçons de mathématiques. Le professeur circule en étant attentif à l'exactitude de la copie. Une affiche avec cette trace écrite sera disponible pour la classe lors des séances ultérieures.

<u>Les billes de Léo et de Lucie</u>

Léo a 37 billes. Lucie a 20 billes de plus que Léo.
Combien de billes ont-ils en tout ?



37 + 20 = 57
Lucie a 57 billes.

57 + 37 = 94
Ils ont 94 billes en tout.

Temps 2 – Mise en activité des élèves - Entrainement (20 minutes)

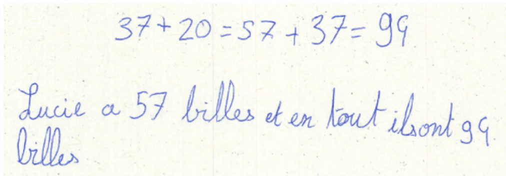
Le professeur indique aux élèves qu'ils vont maintenant résoudre d'autres problèmes tout seuls. Plus précisément, il s'agit de résoudre des problèmes qui ressemblent beaucoup au problème qui vient d'être résolu, en s'entrainant à représenter chaque problème par un schéma identique à celui qu'ils ont recopié, et en s'entrainant à résoudre des problèmes en deux étapes. Les élèves travaillent dans le cahier d'entrainement, mais la trace écrire de la résolution du premier problème reste disponible : il s'agit de s'entrainer à résoudre des problèmes comme cela a été fait pour le problème de référence.

Quatre problèmes sont prévus, mais chaque élève va travailler à son rythme. L'objectif est que tous les élèves traitent au moins les problèmes 2 et 3. L'énoncé du premier problème est distribué immédiatement et collé dans le cahier. Les énoncés des autres problèmes sont disponibles un par un sur une table ; les élèves qui ont terminé de résoudre un problème viennent chercher l'énoncé suivant.

Le professeur précise qu'il va circuler pendant que les élèves travailleront. Lors de sa circulation en classe, le professeur valide les productions correctes et, sinon, apporte des aides individuelles. Dans la mesure du possible, il privilégie un bref retour immédiat écrit sur les productions individuelles au fur et à mesure de sa circulation dans la classe. Les éventuelles productions non vérifiées pendant la séance feront l'objet d'une correction dans les cahiers après la séance.

Si au début de ce moment d'entrainement, le professeur repère un élève qui rencontre des difficultés dans la résolution du premier problème d'entrainement, il gère immédiatement la situation avec l'élève concerné. S'il y en a plusieurs, il regroupe ces élèves brièvement pour les guider : il met du matériel de numération à leur disposition pour représenter les données de l'énoncé, puis accompagne la représentation sous forme de schéma en barres sur l'ardoise ; ensuite, en montrant le cahier de leçons, il les guide dans la mise en œuvre des deux étapes de résolution. Les élèves travaillent sur ardoise au sein de ce petit groupe, puis, une fois le problème résolu, sont invités à retourner à leur place pour le résoudre à nouveau, cette fois-ci seul, sur leur cahier.

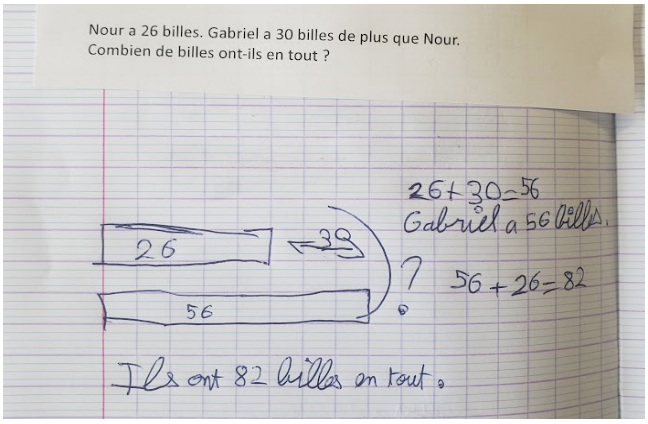
Il est possible qu'en circulant, le professeur repère des productions comme la suivante (relevée lors de la résolution du premier problème) :



Le professeur intervient alors individuellement : le caractère correct du raisonnement est valorisé, mais l'utilisation erronée du signe = est signalée (37 + 20 n'est pas égal 57 + 37) ; le professeur précise que quand on fait plusieurs calculs à la suite, on écrit un calcul par ligne.

Les énoncés des problèmes proposés lors de cette séance 1 sont disponibles en **Annexe 1**.

La photographie ci-dessous montre un exemple de production dans un cahier d'entrainement pour le problème 2, réalisée en autonomie par une élève :

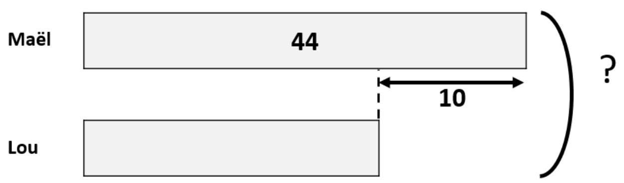


Temps 3 – Retour réflexif (5 minutes)

Un élève vient au tableau pour corriger le problème 3 (les autres problèmes sont dans la mesure du possible corrigés par le professeur en circulant pendant la séance, ou, sinon, après la séance). Au cours de cette correction, **le professeur insiste sur l'importance de se poser la question : *Qui a le plus de billes ?*** L'énoncé indique que Maël a 10 billes de plus que Lou, donc c'est Maël qui a le plus de billes et c'est Lou qui a le plus petit nombre de billes : pour trouver le nombre de billes de Lou, on fait donc une soustraction.

<table>
<tr>
<td>Maël a 44 billes. Maël a 10 billes de plus que Lou.

Combien de billes ont-ils en tout ?


</td>
<td>44 - 10 = 34

Lou a 34 billes.

44 + 34 = 78

Ils ont 78 billes en tout.</td>
</tr>
</table>

Le professeur conclut en faisant rappeler ce qui a été appris par les élèves au cours de la séance : ils ont appris à résoudre de nouveaux problèmes. Ces problèmes ressemblent aux problèmes de comparaison qu'ils avaient résolus auparavant, mais la question est différente : dans les problèmes que les élèves savaient déjà résoudre, la question portait sur l'une des deux valeurs (il fallait déterminer la plus grande ou la plus petite) ; dans les nouveaux problèmes traités aujourd'hui, la question porte sur la valeur totale. Pour cela, ils ont appris à décomposer la résolution en deux étapes : d'abord calculer la deuxième valeur (en se demandant si elle est la plus petite ou la plus grande) puis calculer la valeur totale. Le professeur précise enfin que le travail sera poursuivi le lendemain : les élèves continueront à s'entrainer à résoudre des problèmes qui ressemblent aux problèmes du jour, en utilisant la même démarche.

Séances courtes – Mise en évidence d'analogies entre des problèmes de contextes différents, mais ayant la même structure mathématique

Les séances d'entrainement courtes sont des séances **rythmées**, d'une quinzaine de minutes, **au cours desquelles une activité individuelle importante des élèves est visée**. Elles sont placées dans le créneau quotidien de calcul mental ou à un autre moment de la journée.

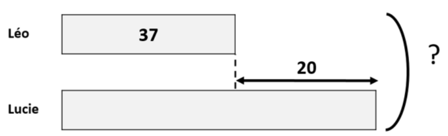
Pour chacun des problèmes, le professeur montre et lit l'énoncé, et, si nécessaire, invite les élèves à imaginer l'histoire du problème dans leur tête et à se poser la question « Que cherche-t-on ? ».

Les élèves travaillent individuellement pendant environ trois minutes, tandis que le professeur circule pour prendre connaissance d'éventuelles difficultés dans la modélisation du problème. La correction est ensuite rédigée rapidement au tableau par le professeur sous la dictée d'un élève, en prenant appui, si cela s'avère nécessaire, sur la mise en évidence d'une analogie de structure avec le problème de référence.

Par exemple, ci-dessous, pour **le problème 3 de la séance 4 (cf. annexe 4)**, le professeur peut mettre en évidence que « *résoudre ce problème, c'est comme résoudre le problème des billes de Lucie et Léo : il y a deux valeurs qui sont comparées : le prix du sandwich poulet-crudités et le prix du sandwich jambon-beaufort. Je connais le prix du premier sandwich et l'écart entre les deux prix, et je cherche le prix total. Comme pour le problème des billes, je calcule d'abord le prix que je ne connais pas, en me demandant si c'est le plus petit prix ou le plus grand prix, puis je calcule le prix total* ».

Les billes de Léo et de Lucie

Léo a 37 billes. Lucie a 20 billes de plus que Léo.
Combien de billes ont-ils en tout ?



37 + 20 = 57
Lucie a 57 billes.

57 + 37 = 94
Ils ont 94 billes en tout.

Problème 3

Adèle et Victor veulent acheter deux sandwichs : un sandwich poulet-crudités et un sandwich jambon-beaufort.

Combien vont-ils payer ?

L'ardoise a été effacée, mais le vendeur leur dit que le sandwich jambon-beaufort coûte 2 € de plus que le sandwich poulet-crudités.

3,50 € + 2 € = 5,50 €

Le sandwich jambon-beaufort coûte 5,50 €.

3,50 € + 5,50 € = 9 €

Adèle et Victor vont payer 9 €.

Séance 3 – Évaluation intermédiaire et remédiation associée

Évaluation

L'évaluation courte de la séance 3 reprend des problèmes de même structure que ceux qui ont été résolus pendant les séances 1 et 2, en faisant intervenir les mêmes grandeurs (en l'occurrence des quantités). Les élèves travaillent individuellement. Le professeur rassure les élèves : les deux problèmes ressemblent aux problèmes travaillés lors des deux séances précédentes. Il explique qu'il s'agit de se tester, pour que chacun puisse savoir s'il a progressé, s'il est capable de résoudre ces problèmes seul ou s'il a besoin d'un soutien supplémentaire. Le cahier de leçons est fermé.

Les énoncés, disponibles en **annexe 3**, sont distribués aux élèves et lus par le professeur au début de l'évaluation.

À l'issue de cette évaluation, le professeur peut dresser un relevé des difficultés et réussites des élèves en référence aux critères suivants :

Comprendre / Représenter / Modéliser (R/M)	L'élève a-t-il représenté le problème par un schéma en barres correct ?
	L'élève a-t-il identifié les deux opérations qui modélisent le problème ?
Calculer (C)	Les calculs sont-ils corrects ?
Répondre (R)	La phrase qui donne la réponse au problème est-elle correcte ?

Pendant la correction des travaux des élèves, le professeur complète le tableau suivant (R : réussi ; PR : partiellement réussi ; NR : non réussi, NT : non traité). Le professeur dénombre ensuite les R dans chaque ligne et chaque colonne. En cas de composantes massivement échouées, il reprogramme un travail dédié, en classe entière. Pour les composantes massivement réussies, le professeur repère les élèves en difficulté, et leur propose une remédiation en petit groupe (pendant le temps de classe ou en APC). Pour les élèves en réussite, des problèmes sur un champ numérique plus étendu (milliers) peuvent être proposés.

	Problème 1			Problème 2			Bilan
	R/M	C	R	R/M	C	R	
Élève 1							
Élève 2							
....							
Bilan							

Remédiations

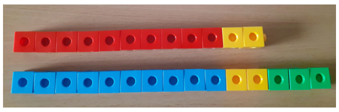
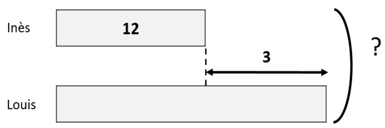
- **Pour les élèves en difficulté dans les phases de compréhension, représentation ou modélisation**, la séance de remédiation est fondée sur des problèmes ayant une structure similaire, dont les énoncés sont donnés à l'oral par le professeur.

Dans un premier temps, des énoncés sont proposés avec des données numériques réduites drastiquement, afin que les quantités en jeu puissent être représentées rapidement par des cubes empilables. Le professeur choisit un contexte dont les élèves sont familiers (et peut utiliser des prénoms des élèves du groupe).

Exemples d'énoncés :

- **Problème 1 :** Inès a 12 pommes. Louis a 3 pommes de plus qu'Inès. Combien de pommes ont-ils en tout ?
- **Problème 2 :** Inès a 12 pommes. Louis a 3 pommes de moins qu'Inès. Combien de pommes ont-ils en tout ?

Pour chacun des deux problèmes, les élèves simulent intégralement la situation avec des cubes, puis déterminent le nombre total de pommes, si nécessaire en comptant. Une fois cette simulation réalisée avec du matériel tangible, les élèves sont invités à représenter ce qu'ils ont fait sur le cahier, étape par étape, puis à traduire les étapes par des opérations, le tout sous le guidage du professeur. Si nécessaire, les phrases donnant les réponses sont écrites par dictée à l'adulte.

Simulation avec du matériel tangible	Représentation	Traduction par des opérations
		12 + 3 = 15 Louis a 15 pommes. 12 + 15 = 27 En tout, ils ont 27 pommes.

Dans un second temps, des problèmes similaires sont proposés oralement, avec des données numériques plus grandes. Les élèves construisent le schéma en barres en passant si nécessaire par l'intermédiaire du matériel de numération organisé en dizaines et en unités (comme dans la séance 1). Ils en déduisent les étapes permettant de résoudre le problème avec le guidage du professeur.

- **Pour les élèves en difficulté seulement dans la phase de calcul**, un travail entre pairs est organisé en invitant les élèves à confronter leurs réponses, à rechercher pourquoi elles sont différentes, et à corriger la ou les réponses erronées.
- **Les difficultés relatives à la formulation de la réponse finale** sont traitées collectivement et oralement, d'abord en remettant en contexte le résultat de l'opération intermédiaire ; par exemple, pour le problème 1 de l'évaluation, 67 - 10 = 57 signifie, pour les images de Simon, 67 images - 10 images = 57 images. 57 peut être écrit dans la deuxième barre du schéma et traduit par la phrase « Simon a 57 images ». Il reste alors à calculer le nombre d'images que Léa et Simon ont en tout. La réponse au problème est enfin élaborée en prenant appui sur le sujet et le verbe de la question : « Ils ont … »).

Ressources complémentaires

- Fagnant, A. (2022). Résolution de problèmes et schématisation dans l'enseignement primaire : oui, mais comment ? *48e colloque COPIRELEM – Représenter et modéliser en mathématiques : de l'activité des élèves à la formation des professeurs des écoles*. P.37-54. ARPEME.
- Houdement, C. (2017). Résolution de problèmes à l'école. *Grand N* (100), IREM de Grenoble.